УДК 537.874

ВПЛИВ КРУГОВОЇ ТРІЩИНИ НА ЕЛЕКТРОМАГНЕТНЕ ПОЛЕ У ПРОВІДНИКУ

З. Т. НАЗАРЧУК, Я. П. КУЛИНИЧ, О. С. КОВАЛЬ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

З допомогою метода малого параметра задача розсіяння низькочастотного електромагнетного поля на круговій тріщині зведена до системи гіперсингулярних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу. Для їх розв'язання запропоновано метод ортогональних поліномів двох змінних. Показано, що електродинамічним аналогом тріщини є електричний диполь з моментом, пропорційним нормальній компоненті зондувального поля.

Ключові слова: *гіперсингуляре інтегральне рівняння, метод малого параметра, дифракція, електромагнетне поле, тріщина.*

Достовірні дані про дефекти, зокрема про найнебезпечніші із них – тріщини, необхідні для розроблення сучасних методів діагностики ресурсу і довговічності інженерних конструкцій. Одним із інструментів їх отримання є засоби неруйнівного контролю. Для розвитку теоретичних засад вихрострумового неруйнівного контролю актуально дослідити та розробити методи розв'язання тривимірних задач розсіяння електромагнетного поля тріщинами у провідних матеріалах.

У більшості наукових праць з теорії вихрострумового неруйнівного контролю розглянуто задачі взаємодії вихрових струмів із локальними об'ємними дефектами, які зведено до слабосингулярних інтегральних рівнянь по об'єму (або по поверхні) дефекту. Відомі чисельні алгоритми їх розв'язання не придатні для граничних інтегральних рівнянь, отриманих для тріщини, які належать до класу двовимірних гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Розроблення та обґрунтування аналітичних методів розв'язання таких рівнянь пов'язано зі значними математичним труднощами. Тому важливо побудувати конструктивні алгоритми чисельного їх розв'язання.

Нижче подано результати дослідження задачі розсіяння електромагнетного поля на тріщині у провідному матеріалі за умови, що розмір такого дефекту є малий проти глибини проникнення електромагнетного поля. Використано один із ефективних наближених методів – метод малого параметра.

Основні припущення та постава задачі. Розглянемо матеріал з електропровідністю σ та круговою тріщиною радіуса a. Магнетна проникність тріщини і матеріалу рівна μ_0. За одиницю довжини візьмемо радіус a та виберемо систему декартових координат $Ox_1x_2x_3$ так, щоб її початок знаходився у центрі тріщини. Вважатимемо, що тріщина лежить у площині $x_3 = 0$. Позначимо через $\vec{J}_e = J_0\,\vec{j}(x;k)$ вихрові струми (струми провідності), які наводить у тілі без тріщини деяке стороннє електромагнетне поле. Тут $x = (x_1, x_2, x_3)$, $k^2 = i\omega\sigma\mu_0 a^2$ – безрозмірний квадрат хвильового числа; ω – кругова частота; J_0 – розмірний нормувальний множник. Необхідно визначити вектори поля вихрових струмів у довільній точці матеріалу з тріщиною за умови $a \ll \delta$, де $\delta = \sqrt{2/(\omega\sigma\mu_0)}$ – глибина проникнення поля у матеріалі (скін-шар).

Контактна особа: Я. П. КУЛИНИЧ, e-mail: kulynych@ipm.lviv.ua

Використаємо фізичну модель дископодібної тріщини у вигляді невідомого поверхневого розподілу $\tau(y;\, k)$ електричних диполів, моменти яких направлені вздовж одиничного вектора $\vec{n}$, перпендикулярного до її площини. Тоді вихідну задачу розсіяння зондувального електромагнетного поля на тріщині у матеріалі зводемо до розв'язання двовимірного гіперсингулярного інтегрального рівняння першого роду відносно функції $\tau(y;k)/J_0 = \sqrt{1-|y|^2}\,\varphi(y;k)$ [1]:

$$f.p.\int\limits_{S_0} \sqrt{1-|y|^2}\,\varphi(y;k)F(|x-y|;k)\,ds_y = -4\pi\, j_n(x;k)\,, \quad x \in S_0\,. \tag{1}$$

Тут *f.p.* означає, що інтеграл розглядаємо у сенсі скінченної частини за Адамаром; $F(u;k) = \dfrac{e^{iku}}{u^3}(k^2u^2 + iku - 1)$; $j_n(x;k) = (\vec{n}, \vec{j}(x;k))$; S_0 – круг одиничного радіуса.

Побудова розв'язку рівняння (1) у низькочастотному наближенні. Розглянемо його за умови $a \ll \delta$. Так як $k = a/\delta(1+i)$, то маємо $|k| \ll 1$. Згідно з методом малого параметра подамо функції $\varphi(y;\, k)$ та $j_n(y;\, k)$ у вигляді ряду за k:

$$\varphi(y;k) = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi^{(l)}(y)k^l\,, \quad j_n(x;k) = \sum_{l=0}^{\infty} j_n^{(l)}(x)k^l\,. \tag{2}$$

Легко переконатися, що

$$F(|x-y|;\,k) = -\frac{1}{|x-y|^3}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l-1)^2(i|x-y|)^l}{l!}k^l\,.$$

Підставивши отримані вирази в рівняння (1) та прирівнявши доданки, що містять однакові степені k, отримаємо співвідношення між коефіцієнтами розкладів, що описують інтегральне рівняння

$$f.p.\int\limits_{S_0} \sqrt{1-|y|^2}\,\frac{f(y)}{|x-y|^3}\,ds_y = -4\pi\, g(x)\cdot \tag{3}$$

Тут $f(y) = \varphi^{(l)}(y)$, а $g(x)$ визначають функції $j_n^{(l)}(x)$ та регулярні інтегральні доданки, які залежать від попередніх наближень функції $\varphi(y;\, k)$. Для побудови розв'язку рівняння (3) використаємо метод ортогональних многочленів. Для цього розглянемо систему ортонормованих у крузі поліномів двох змінних [2], які у полярній системі координат $x_1 = r\cos\phi$, $x_2 = r\sin\phi$ набувають вигляду

$$\begin{aligned} v_{n\,j}^1(x) &= \tau_{n\,j} r^{n-2j} P_j^{(1/2,\, n-2j)}(2r^2-1)u_{n-2j}^{(1)}(\phi), \quad 0 \le 2j \le n, \\ v_{n\,j}^2(x) &= \tau_{n\,j} r^{n-2j} P_j^{(1/2,\, n-2j)}(2r^2-1)u_{n-2j}^{(2)}(\phi), \quad 0 \le 2j \le n-1, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\tau_{n\,j} = \sqrt{\dfrac{(3+2n)\,j!\,\Gamma(3/2-j+n)}{\pi(n-j)!\,\Gamma(3/2+j)}}$; $P_m^{(\beta,\alpha)}(x)$ – поліноми Якобі; $u_m^{(2)}(\phi) = \sin(m\phi)$; $u_m^{(1)}(\phi) = \theta_m\cos(m\phi)$, $\theta_0 = 1/\sqrt{2}$, $\theta_m = 1$ для $m > 0$.

Для цих поліномів справедливі спектральні співвідношення [2]

$$f.p.\int\limits_{S_0}\frac{\sqrt{1-|y|^2}}{|x-y|^3}\begin{Bmatrix} v_{n\,j}^1(y) \\ v_{n\,j}^2(y)\end{Bmatrix} ds_y = \gamma_{nj}\begin{Bmatrix} v_{n\,j}^1(x) \\ v_{n\,j}^2(x)\end{Bmatrix}, \tag{5}$$

за якими вдається побудувати розв'язок рівняння (3) у замкнутому вигляді. Тут

$$\gamma_{n\,j} = -\frac{4\pi\,\Gamma(j+3/2)\Gamma(-j+n+3/2)}{j!(n-j)!}\,.$$

Розвинемо невідому функцію $f(x)$ та праву частину $g(x)$ рівняння (3) у ряд за ортонормованими поліномами (4). Підставивши отримані ряди у (3) та використавши спектральне співвідношення (5), знаходимо розв'язок

$$f(x) = a_{00}^* / \gamma_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0 \le 2j \le n-1} [a_{nj}^* v_{nj}^1(x) + b_{nj}^* v_{nj}^2(x)] / \gamma_{nj} , \tag{6}$$

де $\quad a_{nj}^* = \iint\limits_{S_0} \sqrt{1-|y|^2}\, v_{nj}^1(y) g(y)\, ds_y , \quad b_{nj}^* = \iint\limits_{S_0} \sqrt{1-|y|^2}\, v_{nj}^2(y) g(y)\, ds_y$.

Отже, маємо розв'язок гіперсингулярного інтегрального рівняння (3) у вигляді нескінченного ряду. Якщо цей ряд збігається, то дістанемо розв'язок у замкнутому вигляді. Очевидно, що якщо $g(x)$ – поліном, то розв'язок (6) також описує поліном цього ж степеня. Для дослідження електромагнетного поля малих тріщин достатньо використати у розкладах (2) перші два доданки. Перший дає асимптотику статичного поля ($k \to 0$), а другий – корекційний "електродинамічний".

Визначення еквівалентного дипольного моменту тріщини. За функцією $\varphi(y;\ k)$ отримаємо вектор густини вихрових струмів, обумовлених розсіяним тріщиною електромагнетним полем. Для цього розглянемо малий елемент площі ds_y навколо точки y. Йому відповідатиме електричний диполь з моментом $d\vec{P} = \vec{n}\ \tau(y;k)\, ds_y = \vec{n}\, J_0 \sqrt{1-|y|^2} \varphi(y;k)\ ds_y$. Легко переконатися, що електричне поле такого диполя описує вираз

$$d\vec{E}_s(x) = \frac{J_0\sqrt{1-|y|^2}}{4\pi\sigma} [F(|x-y|;\, k)\vec{n} + G(|x-y|;\, k)\,\vec{e}_R]\, \varphi(y;k)\ ds_y ,$$

де $\quad G(u;\ k) = \dfrac{e^{iku}}{u^3}(3 - 3iku - k^2u^2)(\vec{e}_R, \vec{n})$, $\vec{e}_R = (x-y)/|x-y|$.

Звідси вектор густини вихрових струмів у провідному тілі з тріщиною має вигляд

$$\vec{j}_s(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_0} \sqrt{1-|y|^2} \varphi(y;\ k) [F(|x-y|;k)\, \vec{n} + G(|x-y|;\ k) \vec{e}_R]\, ds_y , \tag{7}$$

де $\quad \vec{j}_s(x) = \sigma \vec{E}_s(x) / J_0$.

У реальних умовах вихрострумового контролю відстань між точкою спостереження (первинним перетворювачем) і тріщиною значно перевищує радіус тріщини. Тут за фіксованого положення точки x функції $F(|x-y|;\ k)$, $G(|x-y|;\ k)$ та вектор $\vec{e}_R$ несуттєво змінюються за різних y. Це означає, що

$$F(|x-y|;\ k) \approx F(|x|;\ k)\ ,\ G(|x-y|;\ k) \approx G(|x|;\ k)\ ,\ \vec{e}_R \approx \vec{e}_x = x/|x|\ .$$

Тоді з виразу (7) отримуємо наближену рівність

$$\vec{j}_s(x) \approx \frac{q}{4\pi} [F(|x|;\ k)\vec{n} + G(|x|;\ k)\vec{e}_x] , \quad \text{де} \quad q = \int\limits_{S_0} \sqrt{1-|y|^2} \varphi(y;\ k)\, ds_y\ .$$

Співвідношення у правій частині наближеного виразу для $\vec{j}_s(x)$ збігаються з формулами, які описують вектор вихрових струмів, наведених електричним полем електричного диполя з моментом $\vec{P}^{eq} = q\vec{n}$, що знаходиться у центрі тріщини. Вектор $\vec{P}^{eq}$ назвемо еквівалентним дипольним моментом тріщини. Знайдемо вираз, що описує його для малої тріщини.

Заломлену хвилю у провідному матеріалі можна описати плоскою хвилею [3]. Нехтуючи взаємодію тріщини з поверхнею виробу, вважатимемо, що вихрові струми наводить електричне поле плоскої хвилі, напрям поширення якої описує одиничний вектор $p = \{p_1, p_2, p_3\}$. Тоді $\vec{J}_e = \vec{J}_{0e} e^{ik(p,x)}$, де $\vec{J}_{0e}$ – вектор густини вихрових струмів падаючої хвилі у центрі тріщини. Покладемо $\vec{e}_0 = \vec{J}_{0e} / J_{0e}$ та $J_0 = J_{0e}$ і одержимо $j_n(x;k) = \alpha_n e^{ik(p,x)}$, де $\alpha_n = (\vec{n}, \vec{e}_0)$.

Тепер подамо $j_n(y;\ k)$ та шукану функцію $\varphi(y;\ k)$, яка описує поверхневий розподіл диполів, у вигляді розкладу за малим параметром k, обмежившись першими двома членами:

$$j_n(x;\,k) = j_n^{(0)}(x) + kj_n^{(1)}(x) + O(k^2)\,,\quad \varphi(x;\,k) = \varphi^{(0)}(x) + k\varphi^{(1)}(x) + O(k^2)\,,$$

де $j_n^{(0)}(x) = \alpha_n$ та $j_n^{(1)} = i\alpha_n(p_1x_1 + p_2x_2)$ для $x \in S_0$.

Для знаходження коефіцієнтів розкладу функції $\varphi(y;\ k)$ маємо інтегральні рівняння

$$f.p.\int\limits_{S_0} \sqrt{1-|\,y\,|^2}\,\frac{\varphi^{(0)}(y)}{|\,x-y\,|^3}\,ds_y = -4\pi\alpha_n\,,$$

$$f.p.\int\limits_{S_0} \sqrt{1-|\,y\,|^2}\,\frac{\varphi^{(1)}(y)}{|\,x-y\,|^3}\,ds_y = -4\pi i\alpha_n(p_1x_1 + p_2x_2)\,\cdot$$

Тоді за формулами (6) можемо записати:

$$\varphi^{(0)}(x) = \frac{4\alpha_n}{\pi}\,,\quad \varphi^{(1)}(x) = \frac{8i\alpha_n}{3\pi}(p_1x_1 + p_2x_2)\,.$$

Звідси вираз для поверхневого розподілу диполів з точністю до величин порядку k^2 має вигляд

$$\tau(x;k) = \sqrt{1-|\,x\,|^2}\,\frac{4\alpha_n J_{0e}}{\pi}\left(1 + \frac{2ik}{3}((p_1x_1 + p_2x_2))\right) + O(k^2)\,.$$

Інтегруючи по кругу останній вираз, легко переконатися, що еквівалентний дипольний момент тріщини у розмірних величинах $\vec{P}_p^{eq} = 8a^3/3(\vec{n},\vec{J}_{0e})\vec{n}$. Ця рівність допускає важливе для практики трактування: значення еквівалентного дипольного моменту тріщиноподібного дефекту пропорційне нормальній компоненті вектора густини вихрових струмів низькочастотного зондувального поля у центрі тріщини.

ВИСНОВКИ

Для оцінки впливу дефекту на низькочастотне електромагнетне поле у провідному матеріалі використано математичну модель кругової тріщини з деяким розподілом електричних диполів. Методом малого параметра отримано систему гіперсингулярних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу. Обґрунтовано можливість їх розв'язання методом ортогональних поліномів двох змінних. За допомогою отриманих розв'язків з'ясовано, що збурене електромагнетне поле наближено описує електричний диполь, момент якого направлений перпендикулярно до поверхні тріщини, а його значення пропорційне нормальній компоненті вектора густини вихрових струмів у її центрі.

РЕЗЮМЕ. Методом малого параметра задачу рассеяния низкочастотного электромагнитного поля на круговой трещине сведено к системе гиперсингулярных интегральных уравнений типа ньютоновского потенциала. Для их решения предложен метод ортогональных полиномов двух переменных. Показано, что электродинамическим аналогом трещины является электрический диполь с моментом, пропорциональным нормальной составляющей зондирующего поля.

SUMMARY. Based on the small parameter method the problem of low-frequency electromagnetic field scattering by circular crack is reduced to a system of hypersingular integral equations. The obtained equations belong to the Newton potential equations type. The method of two-variables orthogonal polynomials is used for their solution. It is shown that electric dipole with a moment which is proportional to the normal component of an external field can be considered as the electrodynamic analogue of the crack.

1. *Кулинич Я. П., Назарчук З. Т.* Інтегральні рівняння для електромагнетного поля у провідному тілі з тріщиною // Відбір і обробка інформації. − 2005. − № 23(99). – С. 11−16.
2. *Назарчук З. Т., Кулинич Я. П.* Деякі властивості ортогональних у крузі двовимірних поліномів // Доп. НАНУ. – 2009. – № 12. – С. 27–43.
3. *Вольман В. И., Пименов Ю. В.* Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971. – 487 с.

Одержано 19.05.2010