

УДК 539.3

УСЕРЕДНЕННЯ МАГНЕТНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВОЛОКНИСТИХ ФЕРОМАГНЕТНИХ КОМПОЗИТІВ

Л. А. ФІЛЬШТИНСЬКИЙ, Ю. В. ШРАМКО, Д. С. КОВАЛЕНКО

Сумський державний університет

В межах моделі регулярних структур усереднено магнетні властивості волокнистих феромагнетних композитів двоперіодичної структури. Для загального укладання волокон довільного поперечного перерізу задачу зведено до розрахунку деяких функціоналів, визначених з розв'язків регулярного інтегрального рівняння відповідної граничної задачі магнетостатики для структури. Для окремого випадку укладання волокон кругового поперечного перерізу розв'язок побудовано у вигляді ряду за еліптичними функціями. В результаті отримано наближені формули для розрахунків макропараметрів композитів з правильними комірками.

Ключові слова: *феромагнетний волокнистий композит, усереднення, макропараметри, метод інтегральний рівнянь, метод регулярних структур.*

Визначаючи фізичні поля в елементах конструкцій, композиційний матеріал зазвичай заміняють гомогенним матеріалом, еквівалентним середовищу з мікроструктурою. Під час розгляду волокнистих композитів з феромагнетною матрицею виникає проблема усереднення магнетних властивостей таких матеріалів. Ці задачі цікаві тим, що з'являється можливість керування магнетними властивостями таких матеріалів. Крім того, вони є основою для розв'язання складніших проблем про усереднення фізико-механічних властивостей п'єзомагнетних композитів [1].

Стохастичні методи визначення усереднених фізичних властивостей композитів розглядали раніше [2–4]. Побудова макромоделі волокнистих композитів з анізотропними і п'єзоелектричними компонентами в межах моделі регулярних структур подана в працях [5, 6]. Нижче запропоновано, ґрунтуючись на ідеях [5] і використовуючи метод інтегральних рівнянь та метод регулярних структур, процедуру визначення макропараметрів волокнистих феромагнетних композитів з двоперіодичним укладанням волокон. Необхідно зазначити, що проектуючи конструкції з композиційних матеріалів, важливо знати не тільки їх ефективні характеристики, але й володіти інформацією про розподіл польових величин у реальній структурі неоднорідного матеріалу, що необхідно для розрахунків на міцність, надійність та довговічність. Метод регулярних структур разом з побудовою макромоделі композита, дає вичерпну інформацію про локальні поля в околі неоднорідностей [5, 6].

Враховуючи вище сказане, процедура усереднення складається з двох етапів:

- 1) розв'язання граничної задачі магнетостатики про знаходження магнетних полів у структурі волокнистого композитного матеріалу;
- 2) визначення ефективних характеристик композита.

Постава задачі. Розглянемо кусково-однорідну регулярну структуру, що представляє собою необмежене феромагнетне середовище (матрицю), армоване вздовж осі Ox_3 двоперіодичною системою однакових волокон (рис. 1). Вважати-

мемо, що поперечний переріз волокна є однозв'язна область D , обмежена довільним досить гладким замкнутим контуром L .

Припустимо наступне:

1) конгруентні волокна мають однакові розміри та властивості;
 2) волокна безперервно скріплені з матрицею по всій поверхні контакту; на поверхні розділу матриця–волокно мають місце умови ідеального магнетного контакту;

3) у структурі задані середні значення компонент вектора магнетної індукції $\langle B_1 \rangle$ і $\langle B_2 \rangle$.

Внаслідок геометричної і фізичної симетрії у структурі можна виділити певний трансляційний елемент (фундаментальну комірку), за який можна взяти паралелограм $ABCD$, побудований на періодах ω_1 і ω_2 ($\text{Im } \omega_1 = 0$, $\omega_1^{-1} \text{Im } \omega_2 > 0$). Властивості армованого середовища (композита) достатньо вивчити в межах вказаної фундаментальної комірки Π_0 (рис. 1).

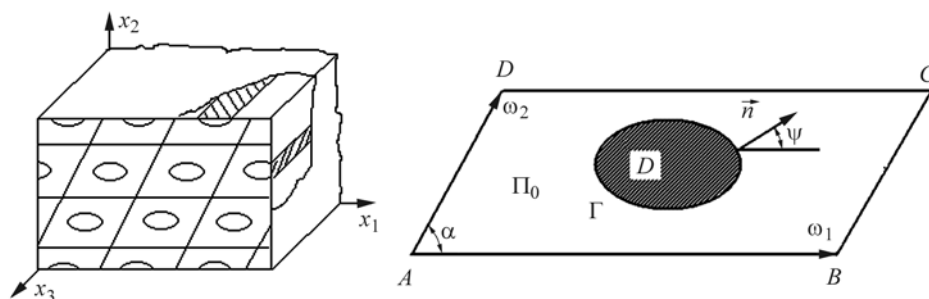


Рис. 1. Структура фундаментальної комірки.

Fig. 1. Structure of a fundamental cell. The complex periods of cell are ω_1 and ω_2 .

Розглянемо феромагнетні композити з магнетом'яких матеріалів, які знаходяться у слабких магнетних полях. Тоді мають місце рівняння магнетостатики [7]:

$$\begin{aligned} \partial_j B_j^{(k)} &= 0; \quad H_j^{(k)} = \partial_j \varphi^{(k)}; \\ B_j^{(k)} &= \mu_0 \mu_r^{(k)} H_j^{(k)}; \quad \partial_j = \partial / \partial x_j \quad (k = 0, 1; j = 1, 2), \end{aligned} \quad (1)$$

де $B_j^{(k)} = B_j^{(k)}(x_1, x_2)$ і $H_j^{(k)} = H_j^{(k)}(x_1, x_2)$ – компоненти вектора індукції та напруженості магнетного поля, $\varphi^{(k)} = \varphi^{(k)}(x_1, x_2)$ – потенціал магнетного поля; $\mu_r^{(k)}$ – відносна магнетна проникність, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м – абсолютна проникність вакууму (величини з верхнім індексом 0 відносяться до матриці; 1 – до волокна).

Методи розв'язку. Зі співвідношення (1) випливає, що для польових величин можна записати наступні комплексні подання

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)} &= \text{Re} \left(\frac{i f^{(k)}(z)}{\mu_0 \mu_r^{(k)}} \right) \quad (k = 0, 1); \\ B_1^{(k)} - i B_2^{(k)} &= i F^{(k)}(z); \quad H_1^{(k)} - i H_2^{(k)} = \frac{i}{\mu_0 \mu_r^{(k)}} F^{(k)}(z); \\ \int_{AB} B_n^{(k)} ds &= \text{Re} f^{(k)}(z) \Big|_A^B; \quad B_n^{(k)} = B_1^{(k)} \cos \psi + B_2^{(k)} \sin \psi; \end{aligned} \quad (2)$$

$$F^{(k)}(z) = \frac{d}{dz} f^{(k)}(z), \quad z = x_1 + ix_2.$$

Тут $F^{(k)}(z)$ – функції, аналітичні у відповідних областях; ψ – кут між додатною нормаллю до AB і віссю Ox_1 .

Умови сполучення магнетних полів на контурі Γ , які полягають у неперервному продовженні нормальної компоненти вектора індукції і дотичної компоненти вектора напруженості магнетного поля [7], запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{F^{(0)}(z)e^{i\psi}\} &= \operatorname{Im}\{F^{(1)}(z)e^{i\psi}\} \\ \frac{1}{\mu_r^{(0)}} \operatorname{Re}\{F^{(0)}(z)e^{i\psi}\} &= \frac{1}{\mu_r^{(1)}} \operatorname{Re}\{F^{(1)}(z)e^{i\psi}\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Співвідношення (3) існують лише на границі волокно–матриця в основній комірці. Для того, щоб вони виконувались на всіх волокнах, необхідно накласти певні умови на функцію $f^{(0)}(z)$. Припустимо:

$$f^{(0)}(z + \omega_k) - f^{(0)}(z) = c_k \quad (k = 1, 2). \quad (4)$$

Згідно з виразами (2), (4) середні значення компонент вектора індукції магнетного поля на границях комірки AB та AD визначають наступним чином

$$\begin{aligned} \langle B_2 \rangle &= -\frac{1}{\omega_1} \int_z^{z+\omega_1} B_n ds = -\frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} f^{(0)}(z) \Big|_z^{z+\omega_1} = -\frac{1}{\omega_1} \operatorname{Re} c_1; \\ \langle B_2 \rangle \cos \alpha - \langle B_1 \rangle \sin \alpha &= -\frac{1}{|\omega_2|} \int_z^{z+\omega_2} B_n ds = -\frac{1}{|\omega_2|} \operatorname{Re} c_2, \quad \alpha = \arg \omega_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Звідси випливає, що $f^{(0)}(z)$ – квазіперіодична функція [8], а функція $F^{(0)}(z)$ – двоперіодична [8]. Тоді згідно з (2) потенціал магнетного поля – квазіперіодична функція, а компоненти векторів магнетної індукції і напруженості магнетного поля двоперіодичні.

Введемо наступні подання шуканих функцій:

$$\begin{aligned} Az + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} v(t-z)p(t) ds &= \begin{cases} f^{(0)}(z), & z \in \Pi_0 / D_1 \\ f^{(1)}(z), & z \in D_1, \end{cases} \\ \frac{dv(z)}{dz} &= \zeta(z); \quad \operatorname{Im} p(t) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\zeta(z)$ – дзета-функція Вейерштрасса [8]; $p(t)$ – шукана “густина”; ds – елемент контуру Γ ; напрям інтегрування – проти годинникової стрілки; стала A підлягає визначенню з умови існування в структурі заданих середніх значень компонент вектора індукції магнетного поля $\langle B_1 \rangle$, $\langle B_2 \rangle$.

Ядро інтегрального подання (6) в основній комірці можна записати у вигляді [5, 8]

$$\begin{aligned} v(z) &= \ln z - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{2j+2}}{(2j+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+2}; \quad \ln 1 = 0; \\ g_{2k} &= \sum_{m,n} (2/P)^{2k}; \quad g_2 = 0; \quad P = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (7)$$

де штрих над символом знаходження суми означає, що член, який відповідає $m = 0$ $n = 0$, відкидається. З подань (2) та (6) з урахуванням (7), отримуємо умову рівності нулю потоку вектора індукції магнетного поля через довільний замкнений контур, що охоплює включення

$$\int_{\Gamma} p(t) ds = 0. \quad (8)$$

Мають місце співвідношення [8]

$$\begin{aligned} v(z + \omega_k) - v(z) &= \pi i + \delta_k(z + \omega_k / 2) \quad (k = 1, 2); \\ \delta_k &= 2\zeta(\omega_k / 2). \end{aligned} \quad (9)$$

Далі, враховуючи (8), (9), знаходимо:

$$\begin{aligned} c_k &= A\omega_k - b\delta_k \quad (k = 1, 2); \\ b &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} tp(t) ds. \end{aligned} \quad (10)$$

Сталу A , що фігурує в поданнях (6), визначимо з рівностей (5), (10). З урахуванням співвідношення Лежандра запишемо [8]:

$$\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i.$$

Тоді

$$A = -(\langle B_2 \rangle + i\langle B_1 \rangle) - \frac{2\pi i}{F} \text{Im} b + \frac{H\delta_1 b}{F}, \quad (11)$$

де $F = H\omega_1$ – площа фундаментальної комірки, $\omega_2 = h + iH$.

Таким чином, інтегральні подання (6) за виконання рівностей (8) і (11) забезпечують двоперіодичний характер розподілу компонент вектора магнетної індукції та існування у структурі заданих середніх значень $\langle B_1 \rangle$, $\langle B_2 \rangle$, а також не залежать від вибору “густини” $p(t)$.

Повертаючись до граничної задачі (3), зазначимо, що першу умову сполучення виконують автоматично, а другу – приводять до регулярного інтегрального рівняння другого роду відносно $p(t)$:

$$p(t_0) - \frac{\mu^*}{\pi F} \text{Re} \int_{\Gamma} p(t) G(t, t_0) ds = N(t_0), \quad (12)$$

$$G(t, t_0) = \{\delta_1 H t - i 2\pi \text{Im} t - \zeta(t - t_0) F\} e^{i\psi_0},$$

$$N(t_0) = 2\mu^* (\langle B_1 \rangle \sin \psi_0 - \langle B_2 \rangle \cos \psi_0), \quad \psi_0 = \psi(t_0), \quad t_0 \in \Gamma;$$

$$\mu^* = \frac{\mu_r^{(0)} - \mu_r^{(1)}}{\mu_r^{(0)} + \mu_r^{(1)}}.$$

Процедура знаходження магнетних полів у волокнистому композиті така: чисельно за допомогою методу механічних квадратур розв’язують інтегральне рівняння (12), потім, використовуючи (2) і (6), визначають компоненти вектора індукції магнетного поля у структурі.

Залучимо отриманий алгоритм до усереднення магнетних властивостей ферромагнетних композитів. Надалі під макромоделлю регулярно армованого ферромагнетного середовища розуміємо однорідне ферромагнетне середовище, рівняння стану якого збігається із законом зв’язку між середніми значеннями компонент вектора магнетної індукції з одного боку та вектора напруженості магнет-

ного поля – з іншого. Згідно з методом регулярних структур [5], запропонованим Е. І. Григолюком та Л. А. Фільштинським, волокнистий феромагнетний композит з двоперіодичним укладанням волокон та змодельоване однорідне середовище еквівалентні, якщо за однакових заданих середніх значеннях компонент вектора індукції (напруженості) магнетні потенціали в композиті та макромоделі – подібні квазіперіодичні функції. Тоді, враховуючи (2), (4), маємо:

$$\begin{aligned} \langle \Delta\varphi \rangle_z^{z+\omega_1} &= \omega_1 \langle H_1 \rangle = \varphi^{(0)}(z + \omega_1) - \varphi^{(0)}(z) = -\frac{\text{Im } c_1}{\mu_0 \mu_r^{(0)}}; \\ \langle \Delta\varphi \rangle_z^{z+\omega_2} &= H \langle H_2 \rangle + h \langle H_1 \rangle = \varphi^{(0)}(z + \omega_2) - \varphi^{(0)}(z) = -\frac{\text{Im } c_2}{\mu_0 \mu_r^{(0)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Вводячи тепер стандартні розв'язки $p_n(t)$ інтегрального рівняння (12) за формулою

$$p(t) = \langle B_1 \rangle p_1(t) + \langle B_2 \rangle p_2(t)$$

та з огляду на співвідношення (10), (11) і (13), одержимо рівняння стану для волокнистого феромагнетного композита

$$\begin{cases} \langle B_1 \rangle = \langle \mu_{11} \rangle \langle H_1 \rangle + \langle \mu_{12} \rangle \langle H_2 \rangle, \\ \langle B_2 \rangle = \langle \mu_{21} \rangle \langle H_1 \rangle + \langle \mu_{22} \rangle \langle H_2 \rangle, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \langle \mu_{11} \rangle &= \frac{\langle v_{22} \rangle}{\Delta}, \quad \langle \mu_{12} \rangle = \frac{\langle v_{21} \rangle}{\Delta}, \quad \langle \mu_{21} \rangle = \frac{\langle v_{12} \rangle}{\Delta}, \quad \langle \mu_{22} \rangle = \frac{\langle v_{11} \rangle}{\Delta}, \\ \Delta &= \langle v_{11} \rangle \langle v_{22} \rangle - \langle v_{12} \rangle \langle v_{21} \rangle, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \langle v_{11} \rangle &= \frac{1}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \left(1 + \frac{2\pi}{F} \text{Im } b^{(1)} \right), \quad \langle v_{12} \rangle = \frac{1}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \frac{2\pi}{F} \text{Im } b^{(2)}, \\ \langle v_{21} \rangle &= -\frac{1}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \frac{2\pi}{F} \text{Re } b^{(1)}, \quad \langle v_{22} \rangle = \frac{1}{\mu_0 \mu_r^{(1)}} \left(1 - \frac{2\pi}{F} \text{Re } b^{(2)} \right); \end{aligned}$$

$$b^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} t p_n(t) ds.$$

Очевидно, матеріал володіє анізотропією магнетних властивостей, а величини $\langle \mu_{ij} \rangle$ мають зміст ефективних магнетних проникностей. Таким чином, макропараметри волокнистого феромагнетного композита визначають точно в замкнутому вигляді через функціонали, що містять повну інформацію про геометричні та фізичні властивості композита.

Для окремого випадку симетричного укладання волокон кругового поперечного перерізу розв'язок можна побудувати у вигляді ряду за еліптичними функціями [8]. Нехай комплексні періоди фундаментальної комірки $\omega_1 = 2$ і $\omega_2 = 2l^* e^{i\alpha}$, радіус включення $R = \lambda_1 \omega_1$. Квазіперіодичну функцію $f^{(0)}(z)$ подамо у вигляді

$$f^{(0)}(z) = A_0 z + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \frac{\zeta^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad \zeta^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k} \zeta(z), \quad (15)$$

де A_k ($k = 0, 1, \dots$) – сталі, що підлягають визначенню. Зазначимо, що коефіцієнт A_0 знаходимо з умови існування в структурі заданих середніх значень $\langle B_1 \rangle$ і $\langle B_2 \rangle$. Маємо з урахуванням (4), (5) та (15):

$$A_0 = -\frac{H\delta_1}{F} A_1 + \frac{i2\pi}{F} \text{Im} A_1 - (\langle B_2 \rangle + i \langle B_1 \rangle). \quad (16)$$

Для знаходження решти сталих необхідно розглянути умови сполучення матриці та волокна (3).

Відповідно до (15) покладемо:

$$F^{(0)}(z) = A_0 + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} \frac{\zeta^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}; \quad F^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad (17)$$

де коефіцієнти B_{2k} також підлягають визначенню. Враховуючи розкладання еліптичних функцій, що справджуються в головній комірці

$$\frac{\zeta^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!} = -\frac{1}{z^{2k+2}} - \sum_{j=k}^{\infty} \frac{g_{2j+2}(2j+1)!z^{2(j-k)}}{2^{2j+2}(2k+1)!(2j-2k)!} \quad (k=0, 1, \dots)$$

та, підставляючи функції (17) в першу умову спряження (3), виразимо коефіцієнти B_{2k} через сталі A_0 і A_{2j+1} ($j=1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \frac{B_{2k}}{(2k)!} &= A_0 \delta_0^k + \frac{\bar{A}_{2k+1}}{R^{4k+2}} - \alpha_k, \\ \alpha_k &= \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j+1} \frac{g_{2j+2k+2}(2j+2k+1)!}{2^{2j+2k+2}(2j+1)!(2k)!} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \\ \delta_0^0 &= 1, \quad \delta_0^k = 0 \quad (k \neq 0). \end{aligned} \quad (18)$$

Першу умову спряження в (3), враховуючи співвідношення (16) та (18), зводимо до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} x_{2k+1} - \mu^* \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_1^{2k+2j+2} a_{k,j} x_{2j+1} &= \delta_0^k \quad (k=0, 1, \dots); \\ y_{2k+1} + \mu^* \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_1^{2k+2j+2} a_{k,j} y_{2j+1} &= -\delta_0^k, \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= \frac{\delta}{1 - \mu^* K_0}, \quad a_{0,j} = \frac{g_{2j+2}}{1 - \mu^* K_0} \quad (j=1, 2, \dots), \\ a_{k,j} &= g_{2k+2j+2} \frac{(2k+2j+1)!}{(2j+1)!(2k)!}, \\ K_0 &= \frac{\pi R^2}{F}, \quad \delta = \delta_1 \omega_1 - \frac{\pi \omega_1^2}{F}. \end{aligned}$$

При цьому шукані коефіцієнти визначаємо формулами

$$\begin{aligned} A_{2j+1} &= x_{2j+1}^* + i y_{2j+1}^*; \\ x_{2j+1}^* &= \frac{R^{2j+2} \mu^* \langle B_2 \rangle}{1 - \mu^* K_0} x_{2j+1}, \quad y_{2j+1}^* = \frac{R^{2j+2} \mu^* \langle B_1 \rangle}{1 - \mu^* K_0} y_{2j+1}. \end{aligned}$$

Нескінченні системи (19) квазірегулярні, якщо $0 \leq 2\lambda_1 < \min(\omega_1, |\omega_2|)$.

Відповідно до геометричної симетрії матеріал ортотропний, його ефективні магнетні проникності визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} \langle \mu_{11} \rangle &= \mu^{(0)} \left(1 - \frac{2\mu^* K_0}{1 - \mu^* K_0} y_1 \right)^{-1}, \quad \langle \mu_{12} \rangle = \langle \mu_{21} \rangle = 0, \\ \langle \mu_{22} \rangle &= \mu^{(0)} \left(1 + \frac{2\mu^* K_0}{1 - \mu^* K_0} x_1 \right)^{-1}, \quad \mu^{(0)} = \mu_0 \mu_r^{(0)}. \end{aligned} \quad (20)$$

У випадку правильного укладання волокон ($l^* = 1$, $\alpha = \pi/3$, $\pi/2$) можна виписати прості наближені формули для величин x_1 і y_1 , що фігурують в (20). Маємо в першому та другому наближеннях

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1}, & y_1^{(1)} &= -\frac{1}{1 + \varepsilon_0 - \varepsilon_1}; & \varepsilon_0 &= \mu^* \lambda_1^2 a_{0,0}; \\ x_1^{(2)} &= \frac{1}{1 - \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_2}}, & y_1^{(2)} &= -\frac{1}{1 + \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2}}, \end{aligned} \quad (21)$$

де для матеріалу гексагональної будови

$$\varepsilon_1 = \lambda_1^{12} (\mu^*)^2 a_{02} a_{20}, \quad \varepsilon_2 = \lambda_1^{24} (\mu^*)^2 a_{23} a_{32};$$

для тетрагонального укладання волокон

$$\varepsilon_1 = \lambda_1^8 (\mu^*)^2 a_{01} a_{10}, \quad \varepsilon_2 = \lambda_1^{16} (\mu^*)^2 a_{12} a_{21}.$$

Сталі решітки, що входять у визначення коефіцієнтів a_{ij} (19), такі [5]: $g_6 = 5,8630$; $g_{12} = 6,0096$; $g_4 = 3,1512$; $g_8 = 4,2558$.

Аналіз чисельних результатів. Розглянемо композит тетрагональної будови ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2i$) з волокнами, поперечні перерізи яких, обмежені контурами

$$t = a_r (a_0 + e^{i\theta} + a_1 e^{-i\theta} + a_2 e^{-2i\theta} + a_3 e^{-3i\theta}) e^{i\gamma},$$

де для волокон еліптичного перерізу: $a_r = 0,5(R_1 + R_2)$, $a_1 = (R_1 - R_2)(R_1 + R_2)^{-1}$, $a_0 = a_2 = a_3 = 0$; R_1 , R_2 – піввісі еліпса; для “трикутних” волокон: $a_0 = -0,25$; $a_2 = 0,25$; $a_1 = a_3 = 0$; $a_r = 2l_h$ – висота “трикутника”; для “квадратних” волокон: $a_0 = a_1 = a_2 = 0$; $a_3 = -0,12036$; $a_r = 2,27053l$; $2l$ – середня лінія. Матеріал матриці ферит F-107 ($\mu_r^{(0)} = 110$). Волокна виготовлені з технічного заліза ($\mu_r^{(1)} = 2500$).

На рис. 2 побудовано лінії рівня компонент вектора магнетної індукції B_1 та B_2 для композита з “трикутними” волокнами ($l_h = 0,6$) за умови, що в структурі діє усереднене магнетне поле $\langle \vec{B} \rangle = (0,5 \text{ Т}; 0)$.

Отримані результати свідчать про те, що коли у змодельованому феромагнетному середовищі діє однорідне магнетне поле, в структурі композита магнетне поле неоднорідне та в околі включень значення його компонент може значно перевищувати усереднені. Також встановлено, що для розглянутих геометричних конфігурацій волокон максимальні за значенням компоненти вектора магнетної індукції діють в композиті, армованому “трикутними” волокнами.

На рис. 3 подано усереднені магнетні проникності $\langle \mu_{11} \rangle / \mu^{(0)}$, $\langle \mu_{22} \rangle / \mu^{(0)}$ у функції параметра $\lambda = 2R_1 / \omega_1$ для композита з круговими волокнами (крива 4 $\langle \mu_{11} \rangle = \langle \mu_{22} \rangle$), з еліптичними $R_2 = 0,8R_1$ (криві 2, 1), а також з “квадратними” в функції параметра $\lambda = 2l / \omega_1$ (крива 6 $\langle \mu_{11} \rangle = \langle \mu_{22} \rangle$) та “трикутними” $\lambda = 2l_h / \omega_1$

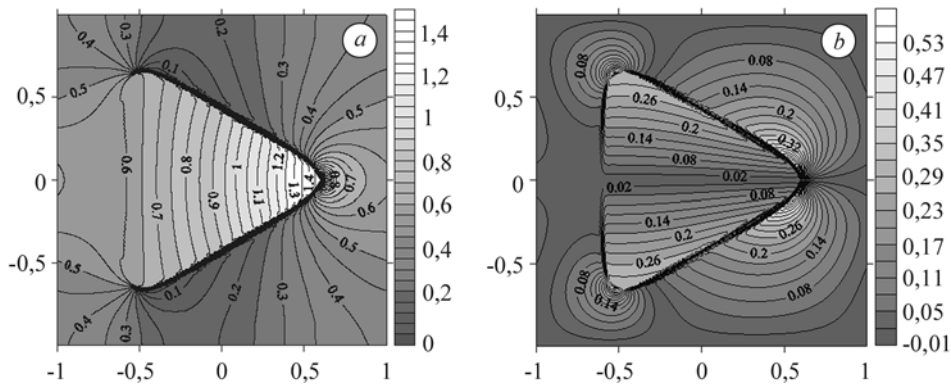


Рис. 2. Лінії рівня компонент вектора магнетної індукції B_1 (a) та B_2 (b), які діють у структурі феромагнетного композита тетрагональної будови ($\omega_1 = 2$; $\omega_2 = 2i$), за умови, що в змодельованому однорідному середовищі задане усереднене магнетне поле $\langle \vec{B} \rangle = (0,5 \text{ T}; 0)$.

Fig. 2. Magnetic path of components of magnetic induction vector B_1 (a) and B_2 (b), which take place in tetragonal structure composite ($\omega_1 = 2$; $\omega_2 = 2i$), under condition that the averaged magnetic field $\langle \vec{B} \rangle = (0.5 \text{ T}; 0)$ is set in a modeled homogeneous medium.

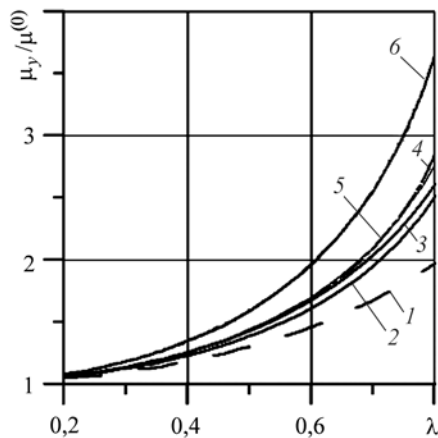


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Усереднені відносні магнетні проникності μ_{ii} ($i = 1, 2$) композита тетрагональної будови ($\omega_1 = 2$; $\omega_2 = 2i$) з круговими волокнами (крива 4, модулі рівні), еліптичними (криві 2, 1), якщо $\lambda = 2R_1 / \omega_1$, а також “квадратними”, якщо $\lambda = 2l / \omega_1$ (крива 6, модулі рівні) та “трикутними”, якщо $\lambda = 2l_h / \omega_1$ (криві 3, 5).

Fig. 3. The averaged relative magnetic permeability, μ_{ii} ($i = 1, 2$), of tetragonal structure composite ($\omega_1 = 2$; $\omega_2 = 2i$) with the circular fibers (curve 4, modulus are equal), elliptical fibers (curves 2, 1) at $\lambda = 2R_1 / \omega_1$, with “square” fibers (curve 6, modulus are equal) at $\lambda = 2l / \omega_1$ and “triangular” fibers (curves 3, 5) at $\lambda = 2l_h / \omega_1$.

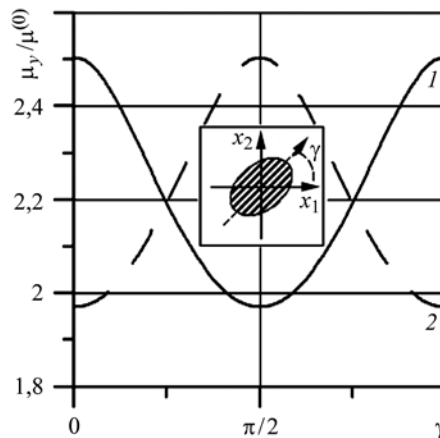


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Усереднені відносні магнетні проникності композита μ_{ii} ($i = 1, 2$) (криві 1, 2) тетрагональної будови з еліптичними волокнами ($R_1 = 0,8\lambda$; $R_2 = 0,8R_1$) у функції кута γ .

Fig. 4. The averaged relative magnetic permeability, μ_{ii} ($i = 1, 2$), (curves 1, 2) of tetragonal structure composite with the elliptical fibers ($R_1 = 0.8\lambda$; $R_2 = 0.8R_1$) versus angle γ .

(криві 3, 5). З отриманих результатів слідує, що модельне середовище ізотропне за армування волокнами кругового і “квадратного” поперечного перетину, і ортотропне за армування еліптичними або “трикутними” волокнами. Крім того, композити з еліптичними у перерізі волокнами мають нижчі значення макропараметрів, ніж з круговими. Необхідно зазначити, що у випадку укладання волокон кругового поперечного перерізу (рис. 3, крива 4) усереднені проникності (14), отримані з розв’язків інтегрального рівняння, та ті, що розраховані за наближеними формулами (21), відрізняються у п’ятому знаку після коми.

Для композита з волокнами еліптичного поперечного перерізу на рис. 4, коли розмір волокон фіксований ($R_1 = 0,8\lambda$), наведені ефективні макропараметри середовища у функції кута γ між більшою піввіссю еліпса та віссю Ox_1 . Результати розрахунків свідчать про те, що ефективні характеристики композита істотно залежать від орієнтації еліптичних волокон у комірці. Так, зі зростанням кута γ ($0 \leq \gamma \leq \pi/2$) коефіцієнт $\langle \mu_{11} \rangle$ спадає, а $\langle \mu_{22} \rangle$ зростає, крім того, якщо $\gamma = \pi/4$ $\langle \mu_{11} \rangle = \langle \mu_{22} \rangle$.

Необхідно зазначити, що за наявності функціоналів у виразах для макропараметрів волокнистих ферромагнетних композитів (14) можна розв’язувати задачі оптимізації про одержання композита за заздалегідь заданими властивостями.

РЕЗЮМЕ. В рамках модели регулярных структур осреднено магнитные свойства волокнистых ферромагнитных композитов двоякопериодической структуры. Для общей укладки волокон произвольного поперечного сечения задача сводится к вычислению некоторых функционалов, определенных на решениях регулярного интегрального уравнения соответствующей граничной задачи магнитостатики для структуры. Для частного случая укладки волокон кругового поперечного сечения решение построено в виде ряда по эллиптическим функциям. В результате получены приближенные формулы для расчета макропараметров композитов с правильными решетками.

SUMMARY. Within the framework of the regular structures model the averaging of magnetic properties of fibrous ferromagnetic composites with double-periodic structure is carried out. It is shown, that for a general case of any cross-section fibers stacking the problem is reduced to calculation of some functionals, determined using the solutions of the regular integral equations of the appropriate magnetostatic boundary problem for a structure. For the particular case of circular cross-section fibers staking the solution is built in the form of elliptical functions series. As a result the approximation formulas for calculating macroparameters of perfect lattice composites are obtained.

1. *The effective properties of smart composites with linear coupling behaviors* / F. Yang, D. Zhang, L. Li, and X. Han // *Int. J. Mech. Mater. Des.* – 2008. – 4. – P. 255–263.
2. *Соколкин Ю. В., Паньков А. А.* Электроупругость пьезокомпозитов с нерегулярными структурами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с.
3. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П.* Нелинейные свойства композитных материалов стохастической структуры. – К.: Наук. думка, 1993. – 131 с.
4. *Фильштинский Л. А., Шаповалов С. П.* О сравнении статистического и детерминированного подходов к определению механических свойств волокнистых композитных материалов // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1985. – № 3. – С. 57–63.
5. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Регулярные кусочно-однородные структуры с деформациями. – М.: Изд. фирма “Физико-матем. лит.”, 1994. – 335 с.
6. *Фильштинський Л. А., Шрамко Ю. В.* Усереднення фізико-механічних характеристик п’єзокомпозитів (плоска деформація) // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2004. – № 2. – С. 67–72.

(Fil'shtyn's'kyi L. A. and Shramko Yu. V., Averaging of the Physicomechanical Characteristics of Piezocomposites (Plane Deformation) // Materials Science. – 2004. – № 2. – P. 232–239.)

7. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 159 с.
8. *Ахизер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304 с.

Одержано 01.04.2009