

УДК 536.12:621.891:539.3

## НЕСТАЦІОНАРНЕ ФРИКЦІЙНЕ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ ЗА КОВЗАННЯ КОМПОЗИЦІЙНОГО ШАРУ ПО ПОВЕРХНІ ПІВПРОСТОРУ

М. КУЦЕЙ

*Білостоцька політехніка, Польща*

Отримано аналітичний розв'язок нестационарної теплової задачі тертя для системи, що складається з композиційного плоско-паралельного шару та однорідної напівбезмежної основи. Шар ковзас зі сталою швидкістю по поверхні основи. Внаслідок дії сил тертя тіла нагріваються. Під час взаємодії на зовнішній поверхні шару відбувається конвективний теплообмін із довкіллям. Для прямокутної форми поперечного перерізу волокна композита досліджено вплив теплофізичних властивостей матеріалів волокна і матриці на розподіл температури в трибосистемі.

**Ключові слова:** *фрикційне нагрівання, композит, температура, теплообмін*

Для аналітичного визначення середньої температури в трибосистемах типу накладка–диск найчастіше використовують три розрахункові схеми: два півпростори, плоско-паралельний шар – півпростір (основа), два плоско-паралельні шари. Відповідні теплові задачі тертя формують як одновимірні крайові задачі теплопровідності [1–3]. Досліджено розподіл температури під час взаємного ковзання двох однорідних півпросторів [4–6], однорідної смуги по поверхні півпростору [7–11] та двох плоско-паралельних шарів [12].

Сучасні фрикційні елементи все частіше виготовляють із композиційних матеріалів [13–15]. Тому побудова аналітичних та числових розв'язків теплових задач тертя та дослідження на їх основі температурних полів у композитах є актуальне. Під час математичного формулювання таких задач реальний композиційний матеріал замінюють на матеріал із усередненими (ефективними) характеристиками. Процедура усереднення (гомогенізації) шаруватих середовищ із комірною періодичністю у формі прямокутника для рівнянь теплопровідності параболічного типу запропоновано раніше [16, 17]. Розглянуто також частковий випадок такої структури композита – двоперіодичне шарувате тіло [18] та нестационарне фрикційне нагрівання під час ковзання однорідного півпростору по поверхні двоперіодичного шаруватого півпростору [19]. Проаналізовано вплив рівномірного та змінного з часом нагрівання на розподіл температури у композиційному шарі, нанесеному на поверхню однорідного півпростору [20, 21]. Досліджено нестационарне температурне поле, ініційоване під час ковзання зі сталим сповільненням композиційного шару по поверхні однорідного півпростору [22]. Розв'язано також обернену задачу про знаходження невідомих інтенсивностей теплових потоків за заданим розподілом температурного поля у такому композиті [23, 24]. Нижче проаналізовано розв'язок теплової задачі тертя для трибосистеми, що складається із композиційного плоско-паралельного шару та однорідного півпростору за сталої швидкості ковзання.

**Формулювання задачі.** Нехай до верхньої поверхні плоско-паралельного шару товщиною  $d$  та на безмежності у півпросторі прикладено нормальний тиск

---

Контактна особа: М. КУЦЕЙ, e-mail: m.kuciej@pb.edu.pl

сталой інтенсивності  $p$  (рис. 1). У початковий момент часу  $t=0$  шар починає рухатись зі сталою швидкістю  $V$  по поверхні півпростору у додатному напрямку осі  $Oy$ . Внаслідок тертя на поверхні контакту  $z = 0$  генерується тепло, яке у вигляді теплових потоків йде на нагрівання шару та основи. Вважаємо, що: 1) термоопір на поверхні контакту незначний, а тому температури співдотичних тіл на ній однакові; 2) сума інтенсивностей теплових потоків, спрямованих з поверхні контакту по нормалі всередину шару і півпростору, рівна питомій потужності тертя  $q = fVp$ , де  $f$  – коефіцієнт тертя; 3) під час тертя на зовнішній поверхні шару  $z = d$  існує конвективний теплообмін із довкіллям зі сталим коефіцієнтом теплообміну  $h$ ; 4) товщина плоско-паралельного шару  $d = nb$ , де  $n$  – кількість комірок прямокутної форми  $\Delta = \{(x, z) \in R^2, 0 \leq x \leq a \cup 0 \leq z \leq b\}$ . Кожна така комірка, в свою чергу, складається із чотирьох прямокутних елементів  $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$ , причому  $\Delta_1$  має розміри  $a_1 \times b_1$  (див. схему на рис. 1). Тепловий контакт між елементами ідеальний; 5) зношування поверхні контакту нехтуємо. Усі величини, що відносяться до шару та півпростору, позначатимемо нижніми індексами  $s$  та  $f$  відповідно.

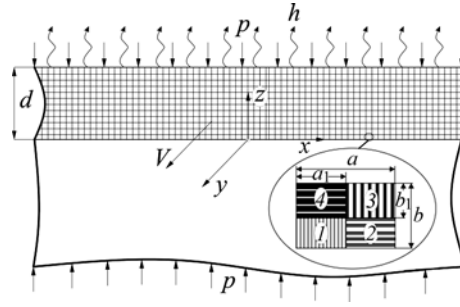


Рис.1. Схема задачі.

Fig. 1. Scheme of the problem.

Розподіл нестационарної температури  $T(z, t)$  у шарі та півпросторі знайдемо з розв'язку крайової задачі теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k_s^*} \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad 0 < \zeta < 1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k_f^*} \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad -\infty < \zeta < 0, \quad \tau > 0,$$

$$K_f^* \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0-} - K_{21}^* \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0+} = 1, \quad T^*(0+, \tau) = T^*(0-, \tau), \quad \tau > 0, \quad (2)$$

$$K_{34}^* \frac{\partial T^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} + \text{Bi} T^*(1, \tau) = 0, \quad T^*(\zeta, \tau) \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow -\infty, \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$T^*(\zeta, 0) = 0, \quad -\infty < \zeta \leq 1, \quad (4)$$

де [22, 23]

$$\zeta = z/d; \quad \tau = k_1 t/d^2; \quad K_f^* = K_f/K_1; \quad k_f^* = k_f/k_1; \quad \text{Bi} = hd/K_1;$$

$$T^* = T/T_0; \quad T_0 = qd/K_1; \quad (5)$$

$$k_s^* = \frac{K_s^*}{c_s^*}; \quad K_s^* = \frac{a^* K_4^*}{(1-b^* + b^* K_4^*)} + \frac{(1-a^*) K_2^* K_3^*}{[(1-b^*) K_2^* + b^* K_3^*]}; \quad K_2^* = \frac{K_2}{K_1}; \quad K_3^* = \frac{K_3}{K_1};$$

$$K_4^* = \frac{K_4}{K_1}; \quad K_{21}^* = (1-a^*) K_2^* + a^*; \quad K_{34}^* = (1-a^*) K_3^* + a^* K_4^*; \quad h = (1-a^*) h_3 + a^* h_4;$$

$$a^* = a_1/a; \quad b^* = b_1/b; \quad (6)$$

$$c_s^* = a^* b^* + (1 - a^*) b^* c_2^* + (1 - a^*) (1 - b^*) c_3^* + a^* (1 - b^*) c_4^*;$$

$$c_2^* = c_2 / c_1; \quad c_3^* = c_3 / c_1; \quad c_4^* = c_4 / c_1,$$

$K, k$  – коефіцієнти тепло- і температуропровідності;  $c$  – питома теплоємність.

**Розв'язок задачі.** Застосувавши до крайової задачі (1)–(6) пряме та обернене інтегральне перетворення Лапласа за безрозмірним часом  $\tau$  (6), знаходимо безрозмірне температурне поле у композиційному шарі та однорідному півпросторі [22]:

$$T^*(\zeta, \tau) = T^{*(0)}(\zeta) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(x) G(\zeta, x) e^{-x^2 \tau} dx, \quad \tau \geq 0, \quad (7)$$

$$T^{*(0)}(\zeta) = \begin{cases} [K_{34}^* + (1 - \zeta) \text{Bi}] / K_{21}^* \text{Bi}, & 0 \leq \zeta \leq 1 \\ [K_{34}^* + \text{Bi}] / K_{21}^* \text{Bi}, & -\infty < \zeta \leq 0 \end{cases}, \quad F(x) = \frac{\psi(x)}{[\varepsilon_{21} \varphi(x)]^2 + [\varepsilon_f x \psi(x)]^2}, \quad (8)$$

$$G(\zeta, x) = \begin{cases} \varepsilon_f \{ \varepsilon_{34} \cos[(1 - \zeta)x / \sqrt{k_s^*}] + \text{Bi} x^{-1} \sin[(1 - \zeta)x / \sqrt{k_s^*}] \}, & 0 \leq \zeta \leq 1, \\ \varepsilon_f \psi(x) \cos(\zeta x / \sqrt{k_f^*}) - \varepsilon_{21} \varphi(x) x^{-1} \sin(\zeta x / \sqrt{k_f^*}), & -\infty < \zeta \leq 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$\varphi(x) = \text{Bi} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{k_s^*}}\right) - \varepsilon_{34} x \sin\left(\frac{x}{\sqrt{k_s^*}}\right), \quad \psi(x) = \varepsilon_{34} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{k_s^*}}\right) + \text{Bi} x^{-1} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{k_s^*}}\right), \quad (10)$$

$$\varepsilon_{21} = K_{21}^* / \sqrt{k_s^*}, \quad \varepsilon_{34} = K_{34}^* / \sqrt{k_s^*}, \quad \varepsilon_f = K_f^* / \sqrt{k_f^*}. \quad (11)$$

Якщо теплофізичні властивості всіх чотирьох елементів комірки періодичності композита однакові, з формул (7)–(11) дістаємо відомі результати [7]. Перейшовши у них до границі, коли  $\text{Bi} \rightarrow 0$ , отримуємо розв'язок задачі для теплоізоляованої зовнішньої поверхні шару:

$$T^*(\zeta, \tau) = \frac{2\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_{21} + \varepsilon_f)} \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n T_n^*(\zeta, \tau), \quad \tau \geq 0, \quad (12)$$

$$T_n^*(\zeta, \tau) = \begin{cases} \text{ierfc}\left(\frac{2n + \zeta}{2\sqrt{k_s^* \tau}}\right) + \text{ierfc}\left(\frac{2n + 2 - \zeta}{2\sqrt{k_s^* \tau}}\right), & 0 \leq \zeta \leq 1, \\ \text{ierfc}\left[\left(\frac{2n}{\sqrt{k_s^*}} - \frac{\zeta}{\sqrt{k_f^*}}\right) \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right] + \text{ierfc}\left[\left(\frac{2n + 2}{\sqrt{k_s^*}} - \frac{\zeta}{\sqrt{k_f^*}}\right) \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right], & -\infty < \zeta \leq 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\Lambda^n = \begin{cases} \lambda^n, & 0 \leq \lambda < 1 \\ (-1)^n |\lambda|^n, & -1 < \lambda \leq 0 \end{cases}, \quad \lambda = \frac{\varepsilon_{21} - \varepsilon_f}{\varepsilon_{21} + \varepsilon_f}, \quad (14)$$

$\text{ierfc}(x) = \pi^{-1/2} \exp(-x^2) - x \text{erfc}(x)$ ;  $\text{erf}(x) = 1 - \text{erfc}(x)$ ,  $\text{erf}(x)$  – функція помилок Гауса.

Якщо на зовнішній поверхні шару під час взаємодії тіл підтримується початкова температура, то з формул (7)–(11) для  $\text{Bi} \rightarrow \infty$  знаходимо розподіл температури в трибосистемі у вигляді (12), де

$$T_n^*(\zeta, \tau) = \begin{cases} \text{ierfc}\left(\frac{2n + \zeta}{2\sqrt{k_s^* \tau}}\right) - \text{ierfc}\left(\frac{2n + 2 - \zeta}{2\sqrt{k_s^* \tau}}\right), & 0 \leq \zeta \leq 1, \\ \text{ierfc}\left[\left(\frac{2n}{\sqrt{k_s^*}} - \frac{\zeta}{\sqrt{k_f^*}}\right) \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right] - \text{ierfc}\left[\left(\frac{2n + 2}{\sqrt{k_s^*}} - \frac{\zeta}{\sqrt{k_f^*}}\right) \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right], & -\infty < \zeta \leq 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\Lambda^n = \begin{cases} (-1)^n |\lambda|^n, & 0 \leq \lambda < 1, \\ \lambda^n, & -1 < \lambda \leq 0, \end{cases} \quad (16)$$

а коефіцієнт  $\lambda$  визначаємо за формулою (14). Приймаючи додатково, що матеріал плоско-паралельного шару однорідний, з формул (12)–(16) отримуємо відомі результати [25].

Для малих значень безрозмірного часу  $0 \leq \tau \ll 1$  асимптотичний розв'язок крайової задачі (1)–(6) не залежить від числа Біо і збігається з розв'язком теплової задачі тертя для композиційного і однорідного півпросторів [19]:

$$T^*(\zeta, \tau) \cong \frac{2\sqrt{\tau}}{(\varepsilon_{21} + \varepsilon_f)} \begin{cases} \text{ierfc}(\zeta/2\sqrt{k_s^* \tau}), & 0 \leq \zeta \leq 1, \\ \text{ierfc}(\zeta/2\sqrt{k_s^* \tau}), & -\infty < \zeta \leq 0. \end{cases}$$

Розподіл безрозмірної температури у шарі і півпросторі для великих значень  $\tau \gg 1$  знаходимо за формулами

$$T^*(\zeta, \tau) \cong \begin{cases} \left( \frac{1}{\alpha \varepsilon_f} - \frac{\zeta}{K_{21}^*} \right) \left( 1 - \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi \tau}} \right), & 0 \leq \zeta \leq 1, \\ \frac{1}{\alpha \varepsilon_f} \left[ 1 - \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi \tau}} \left( 1 - \frac{\alpha \zeta}{\sqrt{k_f^*}} \right) \right], & -\infty < \zeta \leq 0, \end{cases} \quad (17)$$

де  $\alpha = K_{21}^* \text{Bi} / [\varepsilon_f (K_{34}^* + \text{Bi})]$ . Перейшовши у формулах (17) до границі, коли  $\text{Bi} \rightarrow 0$ , отримуємо:

$$T^*(\zeta, \tau) \cong \frac{2}{\varepsilon_f} \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{1}{\varepsilon_f} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi \tau}} \right) \begin{cases} 1/\varepsilon, & 0 \leq \zeta \leq 1, \\ [(1/\varepsilon) - (\zeta/\sqrt{k_f^*})], & -\infty < \zeta \leq 0, \end{cases} \quad (18)$$

де  $\varepsilon = \varepsilon_f / K_{21}^*$ . Якщо ж на зовнішній поверхні шару підтримується початкова температура, то з розв'язку (7)–(11) для  $\tau \gg 1$  і  $\text{Bi} \rightarrow \infty$  знаходимо:

$$T^*(\zeta, \tau) \cong \begin{cases} \frac{(1-\zeta)}{K_{21}^*} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi \tau}} \right), & 0 \leq \zeta \leq 1, \\ \frac{1}{K_{21}^*} \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi \tau}} \left( 1 - \frac{\zeta}{\varepsilon \sqrt{k_f^*}} \right) \right], & -\infty < \zeta \leq 0. \end{cases} \quad (19)$$

Для однакових теплофізичних властивостей елементів комірки періодичності композита формули (18) і (19) дають відомий результат [9].

**Аналіз числових результатів.** Безрозмірними вхідними параметрами задачі є: просторова змінна  $\zeta$ , час (число Фур'є)  $\tau$ , число Біо  $\text{Bi}$ , відносні тепло- і температуропровідності  $K_f^*$ ,  $k_f^*$  матеріалу півпростору, відносні теплопровідності  $K_i^*$  та питомі теплоємності  $c_i^*$ ,  $i=2,3,4$  елементів комірки періодичності композита та її розміри  $a^*$  і  $b^*$ . Для зменшення кількості вхідних параметрів вважаємо, що  $c_i^* = 1, i=2,3,4$ . Безрозмірну температуру  $T^*$  обчислено для композиційного шару, комірка періодичності якого містить включення прямокутного попе-

речного перерізу з матеріалу елемента  $\Delta_1$  (волокно), а теплофізичні властивості матеріалів трьох інших елементів  $\Delta_i$ ,  $i = 2, 3, 4$  (матриця) є однакові ( $K_2^* = K_3^* = K_4^*$ ).

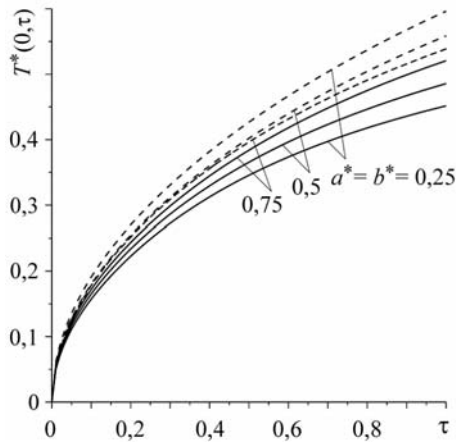


Рис. 2. Еволюція безрозмірної температури на поверхні контакту при  $Bi = 5$  для двох значень відносної теплопровідності

$$K^* \equiv K_2^* = K_3^* = K_4^* = K_f^* : K^* = 2$$

(суцільні криві) і  $K^* = 0,5$  (штрихові).

Fig. 2. Evolution of the dimensionless contact temperature on the contact surface at  $Bi = 5$  for two values of the ratio of heat conductivities

$$K^* \equiv K_2^* = K_3^* = K_4^* = K_f^* : K^* = 2$$

(solid lines) and  $K^* = 0.5$  (dashed lines).

Для заданих розмірів поперечного перерізу волокна  $a^* = b^*$  температура на поверхні контакту є вища, якщо теплопровідність матеріалу включення більша, ніж матриці (рис. 2). Зі збільшенням площі поперечного перерізу волокна (параметра  $a^* = b^*$ ) температура на поверхні контакту знижується (штрихові криві). Зі зростанням площі поперечного перерізу волокна з меншим, ніж у матриці, коефіцієнтом теплопровідності температура на поверхні тертя підвищується (суцільні криві).

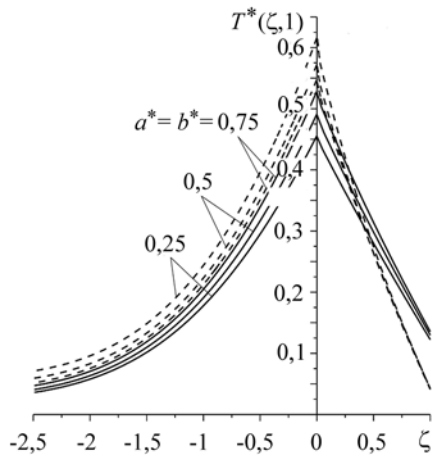


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Залежність безрозмірної температури від безрозмірної координати  $\zeta$  при  $\tau = 1$ ,  $Bi = 5$  для двох значень відносної теплопровідності  $K^* \equiv K_2^* = K_3^* = K_4^* = K_f^*$ :

$K^* = 2$  (суцільні криві) і  $K^* = 0,5$  (штрихові).

Fig. 3. Dependence of the dimensionless temperature on the dimensionless spatial coordinate  $\zeta$  at  $\tau = 1$ ,  $Bi = 5$  for two values of the ratio of heat conductivities  $K^* \equiv K_2^* = K_3^* = K_4^* = K_f^*$ :

$K^* = 2$  (solid lines),  $K^* = 0.5$  (dashed lines).

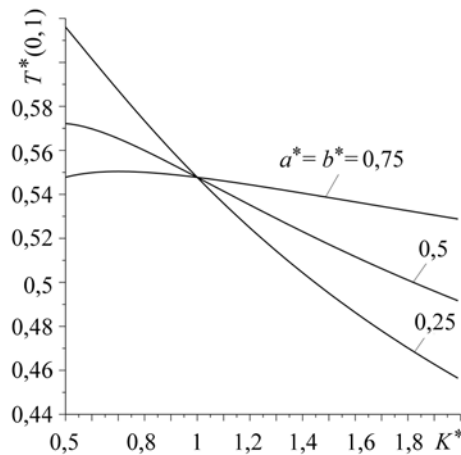


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Залежність безрозмірної температури на поверхні контакту від відносної теплопровідності  $K^* \equiv K_2^* = K_3^* = K_4^* = K_f^*$  при  $\tau = 1$ ,  $Bi = 5$ .

Fig. 4. Dependence of the dimensionless contact temperature on the dimensionless ratio of the heat conductivities  $K^* \equiv K_2^* = K_3^* = K_4^* = K_f^*$  at  $\tau = 1$ ,  $Bi = 5$ .

Найвища вона на поверхні контакту і знижується з віддаленням від неї (рис. 3). Пониження температури в шарі (для  $\zeta \in [0; 1]$ ) з віддаленням від поверхні тертя майже лінійне. Ефективна глибина прогрівання півпростору (відстань від поверхні контакту, на якій температура рівна 5% від максимального значення) становить близько двох з половиною товщин шару.

Для заданих розмірів поперечного перерізу волокна зі збільшенням відносної теплопровідності матриці температура на поверхні контакту падає (рис. 4). Значення безрозмірної температури для  $K^* = 1$  при цьому відповідає розв'язку задачі для однорідного плоско-паралельного шару.

## ВИСНОВКИ

Отримано аналітичний розв'язок теплової задачі тертя для трибосистеми, що складається з композиційного плоско-паралельного шару та однорідного півпростору. Знайдено асимптотики розв'язку для малих та великих значень числа Фур'є. Показано, що для однорідного матеріалу шару одержаний розв'язок збігається з відомим.

Досліджено вплив відносних розмірів та теплофізичних властивостей волокна і матриці композита на еволюцію температури на поверхні контакту та розподіл по нормалі від неї. Встановлено, що зі збільшенням площі поперечного перерізу волокна з вищою (нижчою), ніж у матриці, теплопровідністю максимальна температура трибосистеми знижується (підвищується).

*РЕЗЮМЕ.* Получено аналитическое решение нестационарной тепловой задачи трения для системы, состоящей из композиционного плоско-параллельного слоя и однородного полубесконечного основания. Слой скользит с постоянной скоростью по поверхности основания и вследствие действия сил трения тела нагреваются. Во время взаимодействия на внешней поверхности слоя происходит конвективный теплообмен с окружающей средой. Для прямоугольной формы поперечного сечения волокна композита исследовано влияние теплофизических свойств материалов волокна и матрицы на распределение температуры в трибосистеме.

*SUMMARY.* The solution of the transient thermal problem of friction for a strip/foundation tribosystem with heat generation on the contact surface and with a convective heat exchange with an environment on the upper surface of the strip has been obtained. For the rectangular shape of the fibre cross-section the influence of both reinforcement fraction in the cross-section of periodic cells, and coefficient of thermal conductivity of matrix and fibers on the distribution of temperature in the system has been investigated.

*Роботу виконано за проектом “Increasing the capacity of universities as a factor of development of knowledge-based economy”, фінансованим із ESF Human Capital Operational Programme і державного бюджету Польщі.*

1. *Расчет, испытание и подбор фрикционных пар /* А. В. Чичинадзе, Э. Д. Браун, А. Г. Гинзбург, З. В. Игнатъева. – М.: Наука, 1979. – 267 с.
2. *Грилицький Д. В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: Ін-т змісту і методів навчання Міністерства освіти України, 1996. – 204 с.
3. *Балакин В., Сергиенко В.* Тепловые расчеты тормозов и узлов трения. – Гомель: Ин-т механики металлополимерных систем им. В. А. Белого НАНБ, 1999. – 220 с.
4. *Olesiak Z., Pyryev Yu., and Yevtushenko A. A.* Determination of temperature and wear during braking // *Wear.* – 1997. – **210**, № 1–2. – P. 120–126.
5. *Yevtushenko A. A., Ivanyk E. G., and Yevtushenko O. O.* Exact formulae for determination of mean temperature and wear during braking // *Heat Mass Trans.* – 1999. – **35**, № 2. – P. 163–169.
6. *Носко А. Л., Носко А. П.* Решение контактной тепловой задачи с учетом теплопередачи между элементами трибосопряжения // *Трение и износ.* – 2006. – **27**, № 3. – С. 279–284.
7. *Yevtushenko A. and Kuciej M.* Influence of convective cooling on the temperature in a frictionally heated strip and foundation // *Int. Comm. Heat Mass Trans.* – 2009. – **36**, № 2. – P. 129–136.

8. *Yevtushenko A. A. and Kuciej M.* Influence of the convective cooling and the thermal resistance on the temperature of the pad/disc tribosystem // *Ibid.* – 2010. – **37**, № 4. – P. 337–342.
9. *Yevtushenko A. A., Kuciej M., and Rozniakowska M.* The contact heat transfer between the plane-parallel strip and the semi-infinite foundation // *Ibid.* – 2009. – **36**, № 8. – P. 787–793.
10. *Yevtushenko A. A., Kuciej M., and Yevtushenko O. O.* Influence of the pressure fluctuations on the temperature in pad/disc tribosystem // *Ibid.* – 2010. – **37**, № 8. – P. 978–983.
11. *Носко А. Л., Беляков Н. С., Носко А. П.* Применение обобщенных граничных условий к решению тепловых задач трения // *Трение и износ.* – 2009. – **30**, № 6. – С. 279–284.
12. *Pyryev Yu. and Yevtushenko A.* The influence of the brakes friction elements thickness on the contact temperature and wear // *Heat Mass Trans.* – 2000. – **36**, № 4. – P. 319–323.
13. *Kato T. and Soutome H.* Friction material design for brake pads using database // *Tribology Trans.* – 2001. – **44**, № 1. – P. 137–141.
14. *Mutlu I., Oner C., and Findik F.* Boric acid effect in phenolic composites on tribological properties in brake linings // *Mater. Design.* – 2007. – **28**, № 2. – P. 480–487.
15. *Wear and environmental aspects of composite materials for automotive braking industry / V. Roubicek, H. Raclavska, D. Juchelkova, and P. Filip // Wear.* – 2008. – **265**, № 1–2. – P. 167–175.
16. *Matysiak S. J., Wozniak C.* On the modeling of heat conduction problem in laminated bodies // *Acta Mech.* – 1986. – **65**. – P. 223–238.
17. *Woźniak Cz.* A nonstandard method of modeling of thermoelastic periodic composites // *Int. J. Eng. Sci.* – 1987. – **25**, № 5. – P. 483–499.
18. *Matysiak S. J. and Ukhanska O. M.* On heat conduction problem in periodic composites // *Int. Comm. Heat Mass Trans.* – 1997. – **24**, № 6. – P. 827–834.
19. *Matysiak S. J., Yevtushenko A. A., and Ivanyk E. G.* Contact temperature and wear of composite friction elements during braking // *Int. Heat Mass Trans.* – 2002. – **45**, № 1. – P. 193–199.
20. *Yevtushenko A., Rozniakowska M., and Kuciej M.* Transient temperature processes in composite strip and homogeneous foundation // *Int. Comm. Heat Mass Trans.* – 2007. – **34**, № 9–10. – P. 1108–1118.
21. *Матисяк С., Свтушенко О., Куцей М.* Температурне поле під час гальмування масивного тіла із композиційним покритвом // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2007. – **43**, № 1. – С. 61–67.  
(*Matysiak S., Yevtushenko O., and Kuciej M.* Temperature field in the process of braking of a massive body with composite coating // *Materials Science.* – 2007. – **43**, № 1. – P. 62–69.)
22. *Kuciej M.* Investigation of the temperature field induced in the process of friction of a composite pad and a homogeneous disc // *Int. Comm. Heat Mass Trans.* – 2011. – **38**, № 1–2. – P. 16–24.
23. *Estimation of heat flux and temperature +distributions in a composite strip and homogeneous foundation / Y. C. Yang, S. S. Chu, W. J. Chang, and T. S. Wu // Ibid.* – 2010. – **37**, № 5. – P. 495–500.
24. *Kulchytsky-Zhyhailo R. and Matysiak S. J.* On heat conduction problem in a semi-infinite periodically laminated layer // *Ibid.* – 2005. – **32**, № 1–2. – P. 123–132.
25. *Yevtushenko A. A. and Kuciej M.* Temperature in a frictionally heated ceramic-metal patch and cast iron disc during braking // *Num. Heat Trans.* – 2009. – **A 56**. – P. 97–108.

*Одержано 26.11.2010*