

УДК 539.3

## СКРУЧУВАННЯ СКІНЧЕНОГО ЦИЛІНДРА ЛОКАЛЬНО РОЗПОДІЛЕНИМИ ЗУСИЛЛЯМИ ТЕРТЯ

*В. П. РЕВЕНКО*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Досліджено напружений стан скінченного циліндра під дією зусиль скручування, які виникають внаслідок дії сил тертя. Відокремлено кутову змінну і тривимірну задачу зведено до розв'язання двовимірних крайових задач. Виявлено, що на напружений стан циліндра суттєво впливають навантаження від чистого скручування. Розглянуто задачу про чисте скручення циліндра навантаженнями, локально розподіленими на його боковій поверхні. Показано, що під впливом кусково-неперервних дотичних навантажень виникають особливості в напруженнях  $\tau_{\varphi z}$  у точці розриву навантажень. Вивчено зміну максимуму дотичних напружень у циліндрі з наближенням розподілу навантажень до прямокутного.

**Ключові слова:** *власні функції, скручування, зусилля тертя, тривимірний напружений стан, тензор напружень, циліндр.*

Напружено-деформований стан (НДС) пружного циліндра під дією тільки зусиль чистого кручення досліджували раніше [1–6] аналітичними і числовими методами і експериментально описано розподіл напружень [7]. Нижче розглянуто довільний розподіл навантажень і враховано, що зусилля скручування спричинені дією сил тертя.

**Формулювання задачі.** Розглянемо ізотропний циліндр [1, 2], який займає область  $D = \{(r, \varphi, z) \in ([0, R] \times [0, 2\pi] \times [-h, h])\}$ , до частини бокової поверхні якого з заданою нормальною силою прикладена накладка, за допомогою якої створюють зусилля скручування. Вважатимемо, що дотичні зусилля скручування виникають внаслідок сухого тертя між накладкою і циліндром і лінійно залежать від нормального тиску накладки на циліндр. Крайові умови на боковій поверхні циліндра мають вигляд

$$\sigma_r(R, \varphi, z) = \sigma_1(\varphi, z), \quad \tau_{rz}(R, \varphi, z) = 0, \quad \tau_{r\varphi}(R, \varphi, z) = \tau_2(\varphi, z), \quad (1)$$

де  $\sigma_1(\varphi, z) = \kappa \tau_2(\varphi, z)$ ;  $\tau_2(\varphi, z)$  – задані навантаження;  $\kappa$  – коефіцієнт зв'язку між нормальним і дотичним навантаженнями. При  $\kappa = 0$ ,  $\sigma_1(\varphi, z) = 0$  і крайові умови (1) враховуватимуть лише дотичні навантаження [1].

Показано [8], що НДС довільно навантаженого циліндра, після виділення основного напруженого стану, можна розділити на два напружених стани, один з яких задовольняє такі крайові умови на торцях:

$$\sigma_z(r, \varphi, \pm h) = 0, \quad \tau_{z\varphi}(r, \varphi, \pm h) = 0, \quad \tau_{rz}(r, \varphi, \pm h) = 0. \quad (2)$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукатимемо методом відокремлення змінних. Для цього НДС циліндра подамо через введені функції переміщень [9], які в загальному випадку можна розкласти у вигляді рядів Фур'є:

$$\begin{aligned}
\Phi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \Phi_n^c(r, z) \cos n\varphi + \Phi_n^s(r, z) \sin n\varphi \right], \\
\Psi(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \Psi_n^c(r, z) \cos n\varphi + \Psi_n^s(r, z) \sin n\varphi \right], \\
Q(r, \varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ Q_n^c(r, z) \cos n\varphi + Q_n^s(r, z) \sin n\varphi \right],
\end{aligned} \tag{3}$$

де  $\Phi_0^s = \Psi_0^s = Q_0^s = 0$ ;  $\Phi_n^c, \Psi_n^c, Q_n^c, \Phi_n^s, \Psi_n^s, Q_n^s$  – функції, які для фіксованого індекса  $n$  задовольняють рівняння

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{n^2}{r^2} \right\} U_n(r, z) = 0. \tag{4}$$

Розкладемо праву частину крайових умов (1) у ряд Фур'є:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ \sigma_{1,n}^c(z) \cos n\varphi + \sigma_{1,n}^s(z) \sin n\varphi \}, \\
\tau_2(\varphi, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ \tau_{2,n}^c(z) \cos n\varphi + \tau_{2,n}^s(z) \sin n\varphi \},
\end{aligned} \tag{5}$$

де  $\tau_{2,0}^s = 0, \sigma_{1,0}^s = 0$ . У праці [9] знайдено рівняння для визначення функцій  $\Phi_0 = \Phi_0^c, \Psi_0 = \Psi_0^c; \Phi_n = \Phi_n^c, \Psi_n = \Psi_n^c, Q_n = Q_n^s, n = 1, 2, 3, \dots$ . Аналогічно можна одержати умови для відшукування функцій  $\Phi_n^s, \Psi_n^s, Q_n^c, n = 1, 2, \dots$ . Тоді функція  $Q_0 = Q_0^c$  описуватиме напружений стан під час чистого кручення [1]:

$$\begin{aligned}
u_r = u_z = 0, \quad u_\varphi = -\frac{\partial Q_0}{\partial r}, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_\varphi = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \\
\tau_{r\varphi} = -Gr \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial Q_0}{\partial r}, \quad \tau_{\varphi z} = -G \frac{\partial^2 Q_0}{\partial z \partial r}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Раніше [1] використовували гармонічні функції  $\chi, \xi$  та функцію переміщень  $\Psi$ , які можна виразити через введenu функцію  $Q_0$ :

$$Q_0 = \frac{\partial}{\partial z} \chi, \quad \xi = Q_0, \quad \Psi = -\frac{1}{r} \frac{\partial Q_0}{\partial r}.$$

Знайдемо, які компоненти дотичного навантаження (5) мають вирішальний вплив під час скручування циліндра. Умовно виділимо на боковій його поверхні кільце шириною  $z \in [h_1, h_2]$ . Визначимо крутний момент  $M_z$  від дії розподілених на цьому кільці дотичних навантажень (5):

$$M_z = -R^2 \int_{h_1}^{h_2} dz \int_0^{2\pi} \tau_2(\varphi, z) d\varphi = -2\pi R^2 \int_{h_1}^{h_2} \tau_{2,0}^c(z) dz. \tag{7}$$

Як бачимо, тільки компонента навантаження  $\tau_{2,0}^c(z)$ , яка відповідає чистому крученню, впливає на момент  $M_z$ . Визначимо функцію  $Q_0$  за заданим навантаженням  $\tau_{2,0}^c(z), \sigma_{1,0}^c(z) = k\tau_{2,0}^c(z)$ .

**Подання розв'язку у вигляді ряду Фур'є.** Спростимо крайові умови (1), (2) для знаходження напружень чистого кручення до такого вигляду [9, 10]:

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial r \partial z} = 0, \quad z \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} - 2(1-\nu) \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - (1-2\nu) \Phi_0 + \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \right] = 0, \quad z = \pm h;$$

$$-GR \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial Q_0}{\partial r} = \tau_{2,0}^c(z), \quad 2G \left[ z \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} \right] = \kappa \tau_{2,0}^c(z), \quad (9)$$

$$2G \frac{\partial}{\partial r} \left[ z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} - (1-2\nu) \Phi_0 \right] = 0, \quad r = R,$$

де  $\Phi_0 = \Phi_0^c$ ,  $\Psi_0 = \Psi_0^c$ . Функції  $\Phi_0$ ,  $\Psi_0$  знайдені раніше [10]. Побудуємо функцію  $Q_0$ , яка задовольняє умови (8), (9) і описує чисте кручення. Методом відокремлення змінних відшукаємо базову власну функцію  $Q_v$ , яка є обмеженим розв'язком рівняння (4):

$$Q_v = h^2 a I_0(\beta r) \cos(\mu \gamma), \quad (10)$$

де  $a$  – дійсний коефіцієнт;  $\mu$  – власне значення;  $\beta = \mu/h$ ;  $\gamma = z/h$ ,  $\gamma \in [-1, 1]$ . Підставимо функцію (10) в перше рівняння (8) і одержимо характеристичне рівняння

$$\sin(\mu) = 0$$

для визначення власних значень  $\mu_k = k\pi$ ,  $k=1, 2, 3, \dots$ . Запишемо загальне подання функції  $Q_0$  у вигляді ряду за власними функціями:

$$Q_0 = h^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k I_0(\beta_k r) \cos(\mu_k \gamma), \quad (11)$$

де  $\beta_k = \mu_k/h$ . Підставивши функцію (11) в першу крайову умову (9), одержимо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k a_k \cos(\mu_k \gamma) = \tau_0(\gamma), \quad r = R, \quad (12)$$

де  $\tau_0(\gamma) = \tau_{2,0}^c(z)$ ;  $B_k = -G\mu_k^2 I_2(\beta_k R)$ . З рівності (12) визначимо невідомі коефіцієнти:

$$a_k = \frac{1}{B_k} \int_{-1}^1 \tau_0(\gamma) \cos(\mu_k \gamma) d\gamma, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

**Чисте скручування скінченного циліндра.** На боковій поверхні задані дотичні навантаження  $\tau_0(\gamma)$ , що створюють крутний момент  $M_z$ , дію якого зрівноважують два однакові крутні моменти  $-M_z/2$ , прикладені до торців циліндра. Задамо розподіл навантаження  $\tau_0(\gamma)$ ,  $\tau_0(-\gamma) = \tau_0(\gamma)$  за трапецеїдальним законом:

$$\tau_0(\gamma) = \tau_m, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]; \quad \tau_0(\gamma) = \chi(\gamma_1 - \gamma), \quad \gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]; \quad \tau_0(\gamma) = 0, \quad \gamma \notin [-\gamma_1, \gamma_1], \quad (14)$$

де  $\tau_m$  – максимальне навантаження;  $\chi = \tau_m/\delta$ ;  $\gamma_1 = \gamma_0 + \delta$ ; величина  $\delta \geq 0$  характеризує відхилення розподілу напружень від прямокутного. Якщо покласти  $\delta = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_0$ ,  $\chi = 0$ , то з виразу (14) одержимо прямокутний розподіл навантажень. Знайдемо крутний момент від навантаження (14):

$$M_z = R \int_{-h}^h dz \int_0^{2\pi} R \tau_0(\gamma) d\varphi = 2\pi R^2 h \tau_m (2\gamma_0 + \delta).$$

Вважатимемо, що на торцях циліндра дотичне напруження  $\tau_{\varphi z}$ , яке зрівноважує момент  $M_z$ , розподілене за лінійним законом:  $\tau_{\varphi z} = -\frac{M_z}{4hJ} rz$ , де  $J = \pi R^4 / 4$ ;  $z = \pm h$ . Розв'язок поставленої задачі дає сума основного [1, 8]

$$\tau_{r\varphi}^0 = -\frac{M_z}{4hJ} rz,$$

$$\tau_{r\varphi}^0 = \frac{M_z}{16hJ} r^2$$

і збуреного (11), (13) розв'язків, якщо покласти  $\tau_0(\gamma) = \tau_{2,0}^c(z) - \frac{M_z}{16hJ} R^2$ .

Подібну задачу для чистого кручення, коли  $\delta = 0$ , розв'язав А. Тімпе [1, 6], при цьому в точці розриву зовнішнього навантаження одержав нескінченні значення напружень  $\tau_{\varphi z}$ .

**Лема.** Якщо дотичні навантаження  $\tau_{2,0}^c(z)$  задати кусково-неперервними, то напруження  $\tau_{\varphi z}$  у точці розриву буде безмежним, якщо задачу розв'язувати методом розкладу в ряд Фур'є.

**Доведення.** Нехай навантаження  $\tau_{2,0}^c(z)$  у точці  $z_0 \in [-h, h]$  має розрив першого роду, тоді напруження  $\tau_{r\varphi}(R, z)$  у точці  $z_0$  буде розривним. Із співвідношень (6) випливає, що функція  $Q_0$  у точці  $z_0$  також буде розривною за змінною  $z$ . Оскільки  $\tau_{\varphi z} = -G \frac{\partial^2 Q_0}{\partial z \partial r}$ , то, взявши похідну від кусково-неперервної функції з розривом у точці  $z_0$ , одержимо, що напруження  $\tau_{\varphi z}$  у цій точці будуть безмежні. Кінець доведення.

**Числовий аналіз.** Покладемо в умовах (9)  $\kappa = 1$ . Рис. 1 ілюструє розподіл дотичних напружень залежно від безрозмірних координат  $\alpha = r/R$ ,  $\gamma$  для  $\gamma_0 = 0,1$ . Покладемо, як і в праці [6],  $R = 1$  см;  $M_z = 1$  кг·см,  $\tau$  [кг/см<sup>2</sup>]. Для аналізу впливу на НДС циліндра відношення  $R/h$  і величини  $\delta$  досліджували відносно довгий  $R/h = 0,1$ ;  $\delta = 0,0001$  (рис. 1a) та відносно короткий  $R/h = 2$ ,  $\delta = 0,01$  (рис. 1b) циліндри. Встановили, що відношення  $R/h$  несуттєво впливає на розподіл напружень. Зафіксовано (рис. 1a, крива 1) чіткий пік дотичного напруження  $\tau_{\varphi z} = 0,49$ , оскільки розподіл навантажень дуже близький до прямокутного ( $\delta = 0,0001$ ). Якщо  $\delta \rightarrow 0$ , то спостерігається залежність  $\tau_{\varphi z} \rightarrow \infty$ .

Порівняно (див. таблицю) знайдені напруження  $\tau_{\varphi z}(1, \gamma)$  (рис. 1a, в дужках) з відомими [6] (без дужок). Як бачимо, вже при  $z > \pi R/8$  напруження відрізняються тільки в третьому знаку після коми.

Подано (рис. 2) симетричний відносно змінної  $\gamma$  розподіл нормальних напружень. Як бачимо, під час скручування нормальні напруження значно менші від дотичних.

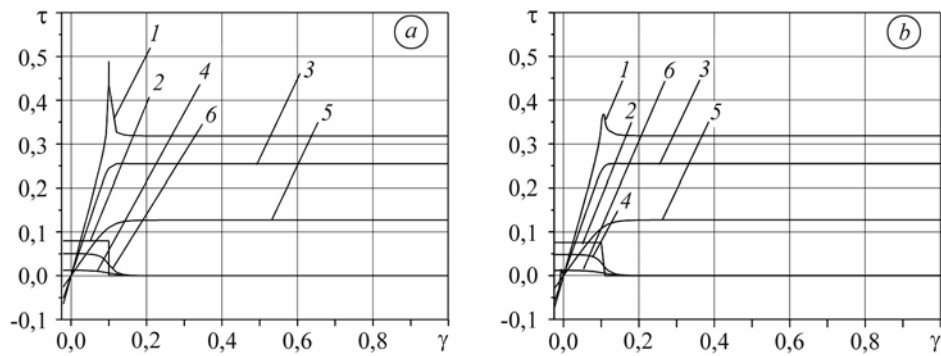


Рис. 1. Розподіл дотичних напружень у циліндрі:  $a - R/h = 0,1$ ;  $\delta = 0,0001$ ;  $b - R/h = 2$ ;  $\delta = 0,01$ ; 1 -  $\tau_{\varphi z}(1, \gamma)$ ; 2 -  $\tau_{r\varphi}(1, \gamma)$ ; 3 -  $\tau_{\varphi z}(0,8, \gamma)$ ; 4 -  $\tau_{r\varphi}(0,8, \gamma)$ ; 5 -  $\tau_{\varphi z}(0,4, \gamma)$ ; 6 -  $\tau_{r\varphi}(0,4, \gamma)$ .

Fig. 1. Distribution of stresses in a cylinder:  $a - R/h = 0.1$ ;  $\delta = 0.0001$ ;  $b - R/h = 2$ ;  $\delta = 0.01$ ; 1 -  $\tau_{\varphi z}(1, \gamma)$ ; 2 -  $\tau_{r\varphi}(1, \gamma)$ ; 3 -  $\tau_{\varphi z}(0.8, \gamma)$ ; 4 -  $\tau_{r\varphi}(0.8, \gamma)$ ; 5 -  $\tau_{\varphi z}(0.4, \gamma)$ ; 6 -  $\tau_{r\varphi}(0.4, \gamma)$ .

### Порівняння знайдених напружень $\tau_{\varphi z}$ з результатами праці [6]

$\frac{r}{R}$	$z = 0$	$z = \frac{\pi}{16}R$	$z = \frac{\pi}{8}R$	$z = \frac{\pi}{4}R$	$z = \pi R$	$z = 2\pi R$
1,0	$\infty(0)$	0,468(0,318)	0,318(0,318)	0,318(0,318)	0,318(0,318)	0,318(0,318)
0,8	0(0)	0,236(0,255)	0,256(0,255)	0,256(0,255)	0,256(0,255)	0,256(0,255)
0,6	0(0)	0,113(0,191)	0,166(0,191)	0,199(0,191)	0,191(0,191)	0,191(0,191)
0,4	0(0)	0,059(0,127)	0,098(0,127)	0,123(0,127)	0,127(0,127)	0,128(0,127)
0,2	0(0)	0,029(0,063)	0,045(0,063)	0,063(0,063)	0,064(0,063)	0,064(0,063)
0	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)

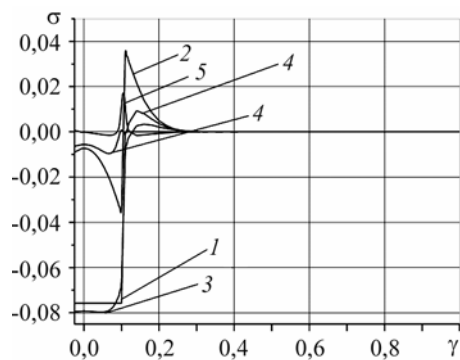


Рис. 2. Розподіл нормальних напружень у циліндрі:  $R/h = 0,1$ ;  $\delta = 0,01$ ; 1 -  $\sigma_r(1, \gamma)$ ; 2 -  $\sigma_z(1, \gamma)$ ; 3 -  $\sigma_\varphi(1, \gamma)$ ; 4 -  $\sigma_z(0,9, \gamma)$ ; 5 -  $\tau_{rz}(0,95, \gamma)$ .

Fig. 2. Distribution of stresses in a cylinder:  $R/h = 0.1$ ;  $\delta = 0.01$ ; 1 -  $\sigma_r(1, \gamma)$ ; 2 -  $\sigma_z(1, \gamma)$ ; 3 -  $\sigma_\varphi(1, \gamma)$ ; 4 -  $\sigma_z(0.9, \gamma)$ ; 5 -  $\tau_{rz}(0.95, \gamma)$ .

### ВИСНОВКИ

Показано, що загальний розв'язок тривимірних задач теорії пружності у циліндричній системі координат можна подати у вигляді набору двовимірних задач. Встановлено, що основний внесок у напружений стан циліндра під час його скручування вносять навантаження від чистого кручення. Знайдено, що під час скручування зусиллями тертя нормальні напруження в циліндрі є суттєво менші, ніж дотичні. Числово підтверджено висновки леми і показано, що чим менша вели-

чина  $\delta > 0$ , то більший пік дотичних напружень  $\tau_{\phi z}$ . Встановлено, що дотичні напруження на відстані  $R$  вздовж осі  $Oz$  від прикладання локальних зусиль не залежать від їх розподілу, а тільки від прикладеного моменту  $M_z$ .

*РЕЗЮМЕ.* Исследовано напряженное состояние конечного цилиндра, нагруженного усилиями кручения, которые возникают в результате действия сил трения. Методом разделения переменных трёхмерную задачу сведено к решению двумерных краевых задач. Основной вклад в напряженное состояние цилиндра вносят усилия чистого кручения. Рассмотрена задача о чистом кручении цилиндра усилиями, локально распределёнными на его боковой поверхности. При использовании кусочно-непрерывных касательных усилий возникают особенности в напряжении  $\tau_{\phi z}$  в точке разрыва. Изучено изменение максимума касательных напряжений при приближении распределения усилий к прямоугольному.

*SUMMARY.* The stress state of a finite cylinder loading by the action of torsion stresses that arise as a result of friction forces action is investigated. By using the method of separation of variables a three-dimensional problem is reduced to the solution of two-dimensional boundary value problems. It is found that the main contribution to the stress state of the cylinder is done by the pure torsion stresses. The problem about the cylinder pure torsion by the forces locally distributed on its lateral surface is considered. It is shown, that piecewise continuous loading causes the singularity stress  $\tau_{\phi z}$  at a point of discontinuity. The maximum shear stress change in the cylinder, when forces distribution is approaching the rectangular distribution, is investigated.

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 686 с.
2. Лурье А. И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
4. Chau K. T. and Wei X. X. Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I: Analytic solution // Int. J. of Solids and Struct. – 2000. – **37**. – P. 5707–5732.
5. Taliercio. A. Torsion of micropolar hollow circular cylinders // Mechanics Research Communications. – 2010 – **37**, № 4. – P. 406–411.
6. Timpe A. Die Torsion von Umdrehungskörpern // Math. Ann. Leipzig. – 1911. – **71**. – S. 480–509.
7. Lade P. V., Nam J., and Hong W. P. Interpretation of strains in torsion shear tests // Computers and Geotechnics. – 2009. – **36**. – P. 211–225.
8. Ревенко В. П. Дослідження напруженого стану навантаженого скінченного циліндра з використанням власних функцій // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 183–190.
9. Ревенко В. П. О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 52–65. (Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**. – P. 730–741.)
10. Ревенко В. П. Дослідження напружено-деформованого стану скінченного циліндра під дією зусиль стиску // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 42–46. (Revenko V. V. Investigation of the Stress-Strain State of a Finite Cylinder under the Action of Compressive Forces // Materials Science. – 2010. – **46**, № 3. – P. 330–335.)

Одержано 10.08.2010