

УДК 539.3

КОВЗНИЙ КОНТАКТ ШТАМПА З ПРУЖНИМ КЛИНОМ

В. І. ОСТРИК, О. М. ЩОКОТОВА

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми

Розглянуто задачу про контактну взаємодію штампа з прямолінійною основою та пружного клина, одна з граней якого закріплена. Враховано сили тертя в області контакту. Методом Вінера–Гопфа отримано аналітичний розв’язок задачі. Наведено результати обчислень контактних напружень та переміщень точок незакріпленої грані клина.

Ключові слова: ковзний контакт, штамп, пружний клин, напруження, переміщення.

Задачі про взаємодію штампів з пружним клином за гладкого контакту вивчали раніше [1–10]. Наближені розв’язки знайдені асимптотичним методом [1–5], методом колокацій [6] і ортогональних поліномів [7, 8]. Контактні задачі для пружної чвертьплощини зведені до систем інтегральних рівнянь [9, 10].

Нижче розглянуто ковзний контакт штампа з прямолінійною основою та пружного клина, одна з граней якого жорстко закріплена. Із застосуванням методу Вінера–Гопфа знайдено аналітичний розв’язок задачі. Отримано розподіл контактних напружень та переміщення точок верхньої грані клина.

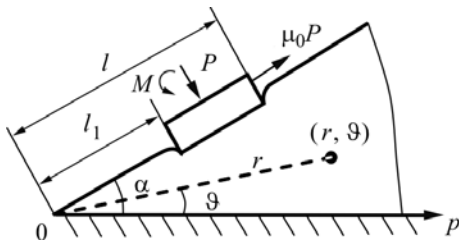


Рис. 1. Ковзний контакт штампа з пружним клином.

Fig. 1. Slipping contact of a punch with an elastic wedge.

ни, якщо $\mu_0 = 0$, маємо гладкий контакт), лінії дії яких проходять через середину основи штампа, а також моменту M штамп втискується у внутрішню частину $l_1 \leq r \leq l$ верхньої грані $\theta = \alpha$ клина. Тут є повне проковзування вздовж усієї ділянки контакту $l_1 \leq r \leq l$, на якій нормальні та дотичні напруження зв’язані законом тертя Амонтона (Кулона). Внаслідок деформації клина основа штампа повертається на деякий кут ε та зміщується на відстань b .

Мішані крайові умови на гранях клина запишемо так:

$$\begin{aligned} u_{\theta}|_{\theta=\alpha} &= b - \varepsilon r, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\alpha} = -\mu_0 \sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} \quad (l_1 \leq r \leq l), \\ \sigma_{\theta}|_{\theta=\alpha} &= 0, \quad \tau_{r\theta}|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (0 \leq r < l_1, \quad l < r < \infty), \end{aligned}$$

Контактна особа: В. І. ОСТРИК, e-mail: ostrik_v@rambler.ru

$$u_r|_{\vartheta=0} = 0, \quad u_{\vartheta}|_{\vartheta=0} = 0 \quad (0 \leq r < \infty). \quad (1)$$

Невідомі зміщення b та кут повороту штамп ε визначимо з умов рівноваги штамп:

$$\int_{l_1}^l \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} dr = -P, \quad \int_{l_1}^l r \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} dr = M - \frac{l+l_1}{2} P. \quad (2)$$

Інтегральне рівняння. Введемо невідому функцію нормальних контактних напружень (G – модуль зсуву):

$$g(r) = \frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} \quad (l_1 < r < l). \quad (3)$$

Її перетворення Мелліна, з урахуванням третьої крайової умови (1), має вигляд

$$a(s) = \int_{l_1}^l g(y) y^s dy. \quad (4)$$

Тоді переміщення та напруження на грані $\vartheta = \alpha$ подамо у вигляді інтегралів Рімана–Мелліна з невідомою густиною $a(s)$:

$$u_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(s) a(s) r^{-s} ds, \quad u_r|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M^*(s) a(s) r^{-s} ds \quad (-\delta_1 < c < \delta_1),$$

$$\frac{1}{2G} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\tau_{r\vartheta}}{2G}|_{\vartheta=\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} a(s) r^{-s-1} ds,$$

$$M(s) = 2(m-1) \frac{\lambda(s)}{s\Delta(s)}, \quad M^*(s) = (m-1) \frac{\lambda^*(s)}{s\Delta(s)},$$

$$\lambda(s) = (3m-4) \sin 2s\alpha - ms \sin 2\alpha + \mu_0 \left[\frac{(3m-4)(m-2)}{m-1} \sin^2 s\alpha - ms \left(\frac{ms}{m-1} - 2 \right) \sin^2 \alpha \right],$$

$$\lambda^*(s) = \frac{(3m-4)(m-2)}{m-1} \sin^2 s\alpha - ms \left(\frac{ms}{m-1} + 2 \right) \sin^2 \alpha - \mu_0 [(3m-4) \sin 2s\alpha + ms \sin 2\alpha],$$

$$\Delta(s) = (3m-4)m(\cos 2s\alpha - 1) - 2m^2 s^2 \sin^2 \alpha + 8(m-1)^2, \quad (5)$$

де δ_1 – найменший корінь рівняння $\Delta(s) = 0$ із півплощини $\operatorname{Re} s > 0$; m – число Пуассона ($m = 1/\nu$, ν – коефіцієнт Пуассона).

Розв'язок (5) задовольняє всі крайові умови (1), окрім першої. Підставимо в цю умову вираз для колових переміщень із співвідношень (5) з урахуванням формул (3), (4). Після заміни змінних

$$r = le^{-\xi}, \quad y = le^{-\eta} \quad (6)$$

для нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = g(le^{-\eta}) e^{-\eta} \quad (7)$$

отримаємо інтегральне рівняння з різницеvim ядром на скінченному інтервалі:

$$\int_0^a k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi) \quad (0 < \xi < a), \quad a = \ln(l/l_1), \quad (8)$$

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau, \quad K(z) = \frac{\lambda(-iz)}{-iz\Delta(-iz)}, \quad f(\xi) = \frac{1}{2(m-1)} \left(\frac{b}{l} - \varepsilon e^{-\xi} \right).$$

Полюси мероморфної функції $K(z)$ є поза смугою $|\operatorname{Im} z| < \delta_1$, тому контур інтегрування для ядра $k(\xi - \eta)$ зміщено на дійсну вісь.

Розв'язання інтегрального рівняння. Знайдемо розв'язок інтегрального рівняння (8), звівши його до нескінченної системи алгебричних рівнянь за відомим підходом [11].

Поклавши $\varphi(\xi) = 0$ для $\xi < 0$, $\xi > a$, розповсюдимо інтегральне рівняння (8) на всю числову вісь і, застосувавши до нього інтегральне перетворення Фур'є, а також теорему про згортку, отримуємо систему функціональних рівнянь Вінера–Гопфа [12]

$$\begin{aligned} K(z)\Phi^+(z) + e^{iza}\Psi^+(z) - \Psi^-(z) &= F^+(z), \\ \Phi^+(z) &= e^{iza}\Phi^-(z) \quad (c^+ < \operatorname{Im} z < c^-) \end{aligned} \quad (9)$$

з правою частиною

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a f(\xi) e^{iz\xi} d\xi = iA \left(\varepsilon \frac{e^{a(iz-1)} - 1}{z+i} - \frac{b e^{iza} - 1}{l z} \right), \quad A = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(m-1)} \quad (10)$$

відносно невідомих функцій комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, \quad (11)$$

$$\Psi^+(z) = -\frac{e^{-iza}}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{iz\xi} d\xi \int_0^a k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad \Psi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^a k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta,$$

аналітичних відповідно у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ і $\operatorname{Im} z < c^-$ ($c^+ < 0$, $c^- > 0$).

Для розв'язання системи рівнянь (9) факторизуємо її коефіцієнт

$$K(z) = K^+(z)K^-(z), \quad (12)$$

де $K^+(z)$ і $K^-(z)$ – функції, які аналітичні та не перетворюються в нуль у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ і $\operatorname{Im} z < c^-$ відповідно, у вигляді нескінченних добутків [13]:

$$K^+(z) = K(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{is'_n} \right) \left(1 + \frac{z}{i\delta_n} \right)^{-1}, \quad K^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{is_n} \right) \left(1 - \frac{z}{i\delta_n} \right)^{-1}, \quad (13)$$

де s_n і s'_n – корені рівняння $\lambda(s) = 0$ із півплощин $\operatorname{Re} s > 0$ та $\operatorname{Re} s < 0$; δ_n – корені рівняння $\Delta(s) = 0$ із півплощини $\operatorname{Re} s > 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

З урахуванням рівностей (10), (12) перепишемо систему функціональних рівнянь (9) у вигляді

$$\begin{aligned} K^+(z)\Phi^+(z) + \left\{ \frac{e^{iza}}{K^-(z)} \left[\Psi^+(z) - iA \left(\frac{\varepsilon e^{-a}}{z+i} - \frac{b}{lz} \right) \right] - \frac{iAb}{lz} \right\} &= \\ = \frac{\Psi^-(z)}{K^-(z)} - \left\{ \frac{iA}{K^-(z)} \left(\frac{\varepsilon}{z+i} - \frac{b}{lz} \right) + \frac{iAb}{lz} \right\}, & \\ \frac{iA}{K^+(z)} \left(\frac{\varepsilon e^{-a}}{z+i} - \frac{b}{lz} \right) + \frac{iAb}{IK(0)z} - \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)} &= \end{aligned}$$

$$= K^-(z)\Phi^-(z) - \left\{ \frac{e^{-iza}}{K^+(z)} \left[\Psi^-(z) - iA \left(\frac{\varepsilon}{z+i} - \frac{b}{lz} \right) \right] - \frac{iAb}{lK(0)z} \right\}. \quad (14)$$

Обидві частини кожного з рівнянь (14) аналітичні у смужці $c^+ < \text{Im } z < c^-$ внаслідок знищення полюса у точці $z = 0$ шляхом введення в них додаткових доданків $iAb/(lz)$, $iAb/(lK(0)z)$. Окрім виразів, відокремлених фігурними дужками, ліві частини рівнянь (14) є функції, аналітичні у верхній півплощині, а праві – у нижній. Подамо ці вирази як різницю функцій, аналітичних у півплощинах $\text{Im } z > c^+$, $\text{Im } z < c^-$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{iza}}{K^-(z)} \left[\Psi^+(z) - iA \left(\frac{\varepsilon e^{-a}}{z+i} - \frac{b}{lz} \right) \right] - \frac{iAb}{lz} &= \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z), \\ \frac{e^{-iza}}{K^+(z)} \left[\Psi^-(z) - iA \left(\frac{\varepsilon}{z+i} - \frac{b}{lz} \right) \right] - \frac{iAb}{lK(0)z} &= \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z), \\ \frac{iA}{K^-(z)} \left(\frac{\varepsilon}{z+i} - \frac{b}{lz} \right) + \frac{iAb}{lz} &= f_1^+(z) - f_1^-(z). \end{aligned} \quad (15)$$

Перетворюючи відповідні інтеграли типу Коші в ряди за лишками підінтегральної функції, одержуємо:

$$\begin{aligned} \chi_1^-(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+ e^{-s_k a}}{s_k + iz} \left[\Psi^+(is_k) - A \left(\frac{\varepsilon e^{-a}}{s_k + 1} - \frac{b}{ls_k} \right) \right], \\ \chi_2^+(z) &= -\frac{Ae^{-a}\varepsilon}{K^+(-i)(1-iz)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^- e^{s'_k a}}{s'_k + iz} \left[\Psi^-(is'_k) - A \left(\frac{\varepsilon}{s'_k + 1} - \frac{b}{ls'_k} \right) \right], \\ f_1^+(z) &= \frac{A\varepsilon}{K^-(-i)(1-iz)}, \quad \alpha_k^+ = \frac{s_k \Delta(s_k) K^+(is_k)}{\lambda'(s_k)}, \quad \alpha_k^- = \frac{s'_k \Delta(s'_k) K^-(is'_k)}{\lambda'(s'_k)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Ліва частина другого рівняння (14) аналітична у півплощині $\text{Im } z > c^+$:

$$\frac{A}{K^+(z)} \left(\frac{i\varepsilon e^{-a}}{z+i} - \frac{ib}{lz} \right) + \frac{iAb}{lK(0)z} - \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)} = f_2^+(z) - \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)}.$$

Виконані перетворення дають змогу віднести до лівої частини функціональних рівнянь (14) функції, аналітичні у верхній півплощині, а до правої – у нижній, тобто подати функціональні рівняння у вигляді

$$\begin{aligned} K^+(z)\Phi^+(z) + \chi_1^+(z) + f_1^+(z) &= \frac{\Psi^-(z)}{K^-(z)} + \chi_1^-(z) + f_1^-(z), \\ f_2^+(z) + \chi_2^+(z) - \frac{\Psi^+(z)}{K^+(z)} &= K^-(z)\Phi^-(z) + \chi_2^-(z). \end{aligned} \quad (17)$$

Обидві частини кожного рівняння (17) аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину, а отже, є довільною цілою функцією, яку визначимо з умов на нескінченності.

Використовуючи асимптотичну поведінку коренів рівнянь $\lambda(s) = 0$, $\Delta(s) = 0$ із першого і другого квадрантів

$$s_n^+ = \frac{\pi}{\alpha} \left(n + \frac{1}{4} \right) + \frac{i}{\alpha} \ln(qn) + o(1), \quad s_n'^+ = -\frac{\pi}{\alpha} \left(n - \frac{1}{4} \right) + \frac{i}{\alpha} \ln(qn) + o(1),$$

$$\delta_n^+ = \frac{\pi n}{\alpha} + \frac{i}{\alpha} \ln(q'n) + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$q = \frac{2\pi}{\alpha} m \sin \alpha \sqrt{\frac{\mu_0}{(3m-4)[2(m-1) + i\mu_0(m-2)]}}, \quad q' = \frac{2\pi}{\alpha} \sin \alpha \sqrt{\frac{m}{3m-4}},$$

знаходимо асимптотичні оцінки [14] для нескінченних добутків (13):

$$K^+(z) \sim A_1(-iz)^{\rho-1}, \quad K^-(z) \sim A_2(iz)^{-\rho}, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0(m-2)}{2(m-1)} \quad (1/2 \leq \rho < 1),$$

$$A_1 = K(0) \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{1-\rho} e^{C(\rho-1)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{-s_n'} e^{\frac{1-\rho}{2[(n+1)/2]}}, \quad A_2 = \frac{1}{mA_1} \sqrt{1 + \frac{\mu_0^2(m-2)^2}{4(m-1)^2}},$$

де $C = 0,57721566\dots$ – стала Ейлера–Маскероні; $[x]$ – ціла частина числа x . Крім цього, функції $\Phi^\pm(z)$, $f_1^+(z)$, $\chi_1^+(z)$, $\chi_2^-(z)$ зникають на нескінченності. Тому робимо висновок, що обидві частини кожного рівняння (17) тотожно дорівнюють нулеві. Таким чином, розв'язок системи функціональних рівнянь (9) має вигляд

$$\Phi^+(z) = -\left[f_1^+(z) + \chi_1^+(z) \right] / K^+(z), \quad \Phi^-(z) = -\chi_2^-(z) / K^-(z),$$

$$\Psi^+(z) = K^+(z) \left[f_2^+(z) + \chi_2^+(z) \right], \quad \Psi^-(z) = -K^-(z) \left[f_1^-(z) + \chi_1^-(z) \right]. \quad (18)$$

Вирази (18) з урахуванням співвідношень (16) містять невідомі значення $\Psi^+(is_k)$, $\Psi^-(is_k')$ ($k=1, 2, \dots$), для знаходження яких покладемо у третій і четвертій рівностях (18) відповідно $z = is_n$ і $z = is_n'$ ($n=1, 2, \dots$). Скориставшись асимптотичною поведінкою коренів $s_n \sim -s_n' \sim \pi n / (2\alpha)$, $n \rightarrow \infty$, введемо малий параметр $\lambda = e^{-\pi a / (2\alpha)} = (l_1 / l)^{\pi / (2\alpha)}$ ($0 < \lambda < 1$). Тоді відносно невідомих

$$z_k^+ = \Psi^+(is_k) - A \left(\frac{\varepsilon e^{-a}}{s_k + 1} - \frac{b}{ls_k} \right), \quad z_k^- = \Psi^-(is_k') - A \left(\frac{\varepsilon}{s_k' + 1} - \frac{b}{ls_k'} \right) \quad (k=1, 2, \dots)$$

отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$z_n^+ + \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{s_k' - s_n} z_k^- \lambda^k = g_n^+, \quad z_n^- + \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{s_k - s_n'} z_k^+ \lambda^k = g_n^- \quad (n=1, 2, \dots), \quad (19)$$

$$\beta_n^+ = K^+(is_n), \quad \beta_n^- = K^-(is_n'), \quad \tilde{\alpha}_k^+ = \alpha_k^+ e^{-(s_k - \frac{\pi k}{2\alpha})a}, \quad \tilde{\alpha}_k^- = \alpha_k^- e^{(s_k' + \frac{\pi k}{2\alpha})a},$$

$$g_n^+ = A\beta_n^+ \left(\frac{b}{lK(0)s_n} - \frac{e^{-a}\varepsilon}{K^+(-i)(s_n+1)} \right), \quad g_n^- = A\beta_n^- \left(\frac{b}{ls_n'} - \frac{\varepsilon}{K^-(-i)(s_n'+1)} \right),$$

розв'язок якої шукаємо у вигляді

$$z_k^\pm = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{km}^\pm \lambda^m \quad (k=1, 2, \dots). \quad (20)$$

Підставляючи розвинення (20) у систему (19), знаходимо $\xi_{n0}^\pm = g_n^\pm$ та отримуємо рекурентні співвідношення

$$\xi_{nm}^+ = -\beta_n^+ \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k^-}{s'_k - s_n} \xi_{k,m-k}^-, \quad \xi_{nm}^- = -\beta_n^- \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{s_k - s'_n} \xi_{k,m-k}^+$$

для визначення коефіцієнтів ξ_{nm}^\pm ($n, m = 1, 2, \dots$).

Подамо розв'язок системи рівнянь (19) у вигляді

$$z_k^\pm = \varepsilon \tilde{z}_k^\pm + (b/l) \tilde{z}_k^\pm \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Тоді з умов рівноваги (2) одержимо лінійну систему алгебричних рівнянь

$$a_{11} \bar{\varepsilon} + a_{12} \bar{b} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad a_{21} \bar{\varepsilon} + a_{22} \bar{b} = \frac{K^+(i)}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-a}) - \frac{M}{Pl} \right], \quad (21)$$

$$a_{11} = A \left[\frac{1}{K(0)K^-(i)} - \frac{e^{-a}}{K^+(i)} \right] + \frac{1}{K(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+ \lambda^k}{s_k} \tilde{z}_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^- \lambda^k}{s'_k} \tilde{z}_k^-,$$

$$a_{12} = -\frac{A\gamma}{K(0)} + \frac{1}{K(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+ \lambda^k}{s_k} \tilde{z}_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^- \lambda^k}{s'_k} \tilde{z}_k^-, \quad \gamma = a - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{s'_k} - \frac{2}{\delta_k} \right),$$

$$a_{21} = \frac{A}{2} \left[\frac{1}{K^-(i)} - \frac{\kappa e^{-a}}{K^+(i)} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+ \lambda^k}{s_k - 1} \tilde{z}_k^+ - \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^- \lambda^k}{s'_k - 1} \tilde{z}_k^-, \quad \kappa = \frac{K^+(i) e^{-a}}{K^-(i)},$$

$$a_{22} = -A \left(1 - \frac{\kappa}{K(0)} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+ \lambda^k}{s_k - 1} \tilde{z}_k^+ - \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^- \lambda^k}{s'_k - 1} \tilde{z}_k^-$$

для обчислення параметрів $\bar{\varepsilon} = (2Gl/P)\varepsilon$ і $\bar{b} = (2G/P)b$.

Обертаючи перше співвідношення (11), з урахуванням рівностей (12), (15), (18) знаходимо розв'язок інтегрального рівняння (8):

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(t) e^{-i\xi t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{K(t)} \left[\Psi^-(t) - iA \left(\frac{\varepsilon}{t+i} - \frac{b}{lt} \right) \right] e^{-i\xi t} dt - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{K(t)} \left[\Psi^+(t) - iA \left(\frac{\varepsilon e^{-a}}{t+i} - \frac{b}{lt} \right) \right] e^{it(a-\xi)} dt \quad (0 \leq \xi \leq a). \end{aligned} \quad (22)$$

Контактні напруження та переміщення на верхній грані клина. Обчислюючи інтеграл (22) за теорією лишків та переходячи до функції $g(r)$ (3) за допомогою заміни (6), (7), дістанемо контактні напруження

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_g}{2G} \Big|_{\vartheta=\alpha} &= -\frac{2\varepsilon(m \cos^2 \alpha - 1)}{(m-2) \sin 2\alpha + 4\mu_0 \sin^2 \alpha} + \frac{\sqrt{2\pi} Ab}{K(0)r} + \\ &+ \sqrt{2\pi} \frac{l}{l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k \Delta(s_k) z_k^+}{\lambda'(s_k)} \left(\frac{r}{l_1} \right)^{-s_k-1} + \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s'_k \Delta(s'_k) z_k^-}{\lambda'(s'_k)} \left(\frac{r}{l} \right)^{-s'_k-1} \quad (l_1 < r < l). \end{aligned} \quad (23)$$

На краях штамп напруження (23) необмежені. Застосовуючи лему Ватсона [15] до першого та другого інтегралів із формул (11) і враховуючи при цьому розв'язок (18), отримаємо асимптотичну поведінку контактних напружень:

$$\frac{\sigma_g}{2G} \Big|_{\vartheta=\alpha} \sim \frac{\sqrt{2\pi} \omega_1}{A_1 \Gamma(\rho)} \left(1 - \frac{r}{l} \right)^{\rho-1}, \quad r \rightarrow l - 0,$$

$$\frac{\sigma_9}{2G}\Big|_{9=\alpha} \sim \frac{\sqrt{2\pi}\omega_2}{A_2\Gamma(1-\rho)} \frac{l}{l_1} \left(\frac{r}{l_1} - 1\right)^{-\rho}, \quad r \rightarrow l_1 + 0,$$

$$\omega_1 = A \left(\frac{b}{l} - \frac{\varepsilon}{K^-(-i)} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^+ z_k^+ \lambda^k, \quad \omega_2 = A \left(\frac{b}{K(0)l} - \frac{e^{-a}\varepsilon}{K^+(-i)} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^- z_k^- \lambda^k.$$

Визначимо переміщення точок верхньої грані клина. Підставивши вираз для $a(s)$ (4) у перше і друге співвідношення (5), виконавши заміни (6), (7) та врахувавши першу рівність (11), знаходимо:

$$u_9|_{9=\alpha} = \frac{l}{i\sqrt{2\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi^+(is)M(s)e^{s\xi} ds, \quad u_r|_{9=\alpha} = \frac{\sqrt{2}l}{i\sqrt{\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi^+(is)M^*(s)e^{s\xi} ds. \quad (24)$$

Перетворивши інтеграли (24) так само, як інтеграли (22), маємо:

$$u_9|_{9=\alpha} = \frac{l}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \lambda(-\delta_n)}{\delta_n \Delta'(-\delta_n) K^-(-i\delta_n)} \left(\frac{r}{l_1}\right)^{\delta_n},$$

$$u_r|_{9=\alpha} = \frac{l}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \lambda^*(-\delta_n)}{\delta_n \Delta'(-\delta_n) K^-(-i\delta_n)} \left(\frac{r}{l_1}\right)^{\delta_n} \quad (0 \leq r < l_1),$$

$$u_9|_{9=\alpha} = \frac{l}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \lambda(\delta_n)}{\delta_n \Delta'(\delta_n) K^+(i\delta_n)} \left(\frac{r}{l}\right)^{-\delta_n},$$

$$u_r|_{9=\alpha} = \frac{l}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \lambda^*(\delta_n)}{\delta_n \Delta'(\delta_n) K^+(i\delta_n)} \left(\frac{r}{l}\right)^{-\delta_n} \quad (l < r < \infty),$$

$$u_r|_{9=\alpha} = 2 \frac{(m-2)\sin^2 \alpha + \mu_0(m-1)\sin 2\alpha}{(m-2)\sin 2\alpha + 4\mu_0 \sin^2 \alpha} \varepsilon r - \frac{2m \sin^2 \alpha + \mu_0[m \sin 2\alpha + 2\alpha(3m-4)]}{2\alpha(3m-4) - m \sin 2\alpha + 2\mu_0 m \sin^2 \alpha} b +$$

$$+ \frac{l}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^*(s_n) z_n^+}{\lambda'(s_n)} \left(\frac{r}{l_1}\right)^{-s_n} + \frac{l}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^*(s'_n) z_n^-}{\lambda'(s'_n)} \left(\frac{r}{l}\right)^{-s'_n} \quad (l_1 \leq r \leq l), \quad (25)$$

$$c_n = A \left(\frac{e^{-a}\varepsilon}{K^+(-i)(\delta_n-1)} - \frac{b}{K(0)\delta_n l} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^- z_k^- \lambda^k}{s'_k + \delta_n},$$

$$b_n = A \left(\frac{\varepsilon}{K^-(-i)(\delta_n+1)} - \frac{b}{\delta_n l} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+ z_k^+ \lambda^k}{s_k - \delta_n}.$$

Симетричний випадок. Розглянемо втискування штампа за відсутності кута повороту ($\varepsilon = 0$) і тертя ($\mu_0 = 0$). Через парність функцій $K(z)$, $k(\xi - \eta)$, $f(\xi)$ розв'язок $\varphi(\eta)$ інтегрального рівняння (8) є симетричний: $\varphi(\eta) \equiv \varphi(a - \eta)$ ($0 < \eta < a$). Тоді для функцій із рівностей (11) маємо: $\Phi^+(z) \equiv \Phi^-(-z)$, $\Psi^+(z) \equiv -\Psi^-(-z)$.

Із співвідношень (3), (7), (24) для функцій нормальних напружень $\sigma(r) = \sigma_9|_{9=\alpha}$ і колових переміщень $u(r) = u_9|_{9=\alpha}$ ($0 < r < \infty$) на незакріпленій грані клина отримуємо тотожності

$$r\sigma(r) \equiv \frac{l_1}{r} \sigma\left(\frac{l_1}{r}\right), \quad u(r) \equiv u\left(\frac{l_1}{r}\right), \quad (26)$$

які свідчать, що напруження $\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha}$, помножені на радіальну координату r , а також переміщення $u_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha}$ незмінні при перетворенні інверсії відносно точки $r = \sqrt{l_1}$. Тут нескінченна система алгебричних рівнянь (19) спрощується. У ній замість двох груп рівнянь залишається одна з невідомими $z_k^+ = -z_k^-$ ($k = 1, 2, \dots$). При цьому $s_k^+ = -s_k^-$, $\beta_n^+ = K(0)\beta_n^-$, $\tilde{\alpha}_k^+ = -K(0)\tilde{\alpha}_k^-$, $g_n^+ = -g_n^-$ ($k, n = 1, 2, \dots$). З урахуванням останніх співвідношень тотожності (26) безпосередньо впливають із рівностей (23), (25).

За допомогою першого рівняння (21) ($\bar{\varepsilon} = 0$) зміщення штампа виразимо через силу P , а з другого рівняння (21) визначимо момент M , необхідний для забезпечення його поступального переміщення.

Результати розрахунків. На рис. 2 і 3 подано результати обчислень нормальних контактних напружень та переміщень точок грані $\vartheta = \alpha$ пружного клина з кутом розхилу $\alpha = \pi/4$ за відсутності моменту ($M = 0$, $m = 10/3$).

Рис. 2. Розподіл нормальних контактних напружень: 1 – $l/l_1 = 2$; 2 – 6; суцільні криві – $\mu_0 = 0,5$ (рух штампа від вершини); штрихові – $\mu_0 = -0,5$ (рух штампа до вершини); штрихпунктирні – $\mu_0 = 0$ (гладкий контакт); $\alpha = \pi/4$, $m = 10/3$, $M = 0$.

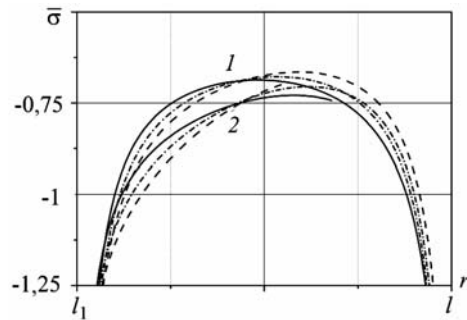


Fig. 2. The distribution of normal contact stresses: 1 – $l/l_1 = 2$; 2 – 6; solid curves – $\mu_0 = 0.5$ (punch movement from the tip); dashed curves – $\mu_0 = -0.5$ (punch movement to the tip); dashed-dot curves – $\mu_0 = 0$ (a smooth contact); $\alpha = \pi/4$, $m = 10/3$, $M = 0$.

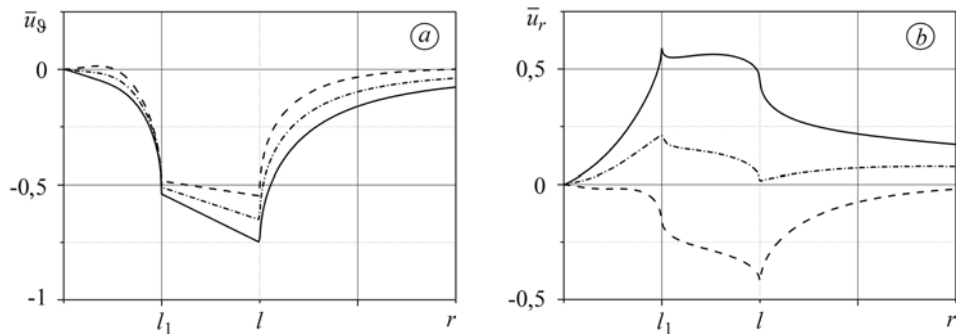


Рис. 3. Переміщення точок верхньої грані клина: а – колові; б – радіальні. (Позначення див. рис. 1).

Fig. 3. The displacements on the upper wedge side: a – circular; b – radial. (Designation as in Fig. 1).

Розподіл безрозмірних нормальних контактних напружень $\bar{\sigma} = (l - l_1)P^{-1} \sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=\alpha}$ наведено на рис. 2 (l/l_1 – відношення відстаней від країв штампа до вершини кли-

на). Зі зростанням відношення l/l_1 , тобто зі зменшенням відстані від штампа до вершини клина, так само, як і під час руху штампа до вершини клина ($\mu_0 < 0$), розподіл контактних напружень стає асиметричнішим.

Безрозмірні колові переміщення $\bar{u}_g = (2G/P)u_g|_{g=\alpha}$, які відтворюють форму деформованої верхньої грані клина, зображено на рис. 3а, якщо $l/l_1 = 2$. Зі збільшенням коефіцієнта тертя за руху штампа від вершини клина ($\mu_0 > 0$) його просідання, а також кут повороту зростають. Під час переміщення штампа у зворотному напрямку (штрихова крива), порівняно з гладким контактом (штрихпунктирна), зменшується як його просідання, так і кут повороту (табл. 1).

Таблиця 1. Відносний кут повороту $\bar{\varepsilon} = (2G/P)\varepsilon$ та відносне зміщення $\bar{b} = (2G/P)b$ штампа

l/l_1	2		6	
μ_0	$\bar{\varepsilon}$	\bar{b}	$\bar{\varepsilon}$	\bar{b}
0,5	0,421	-0,329	0,370	-0,158
0	0,283	-0,369	0,339	-0,126
-0,5	0,144	-0,409	0,309	-0,091

Подано (рис. 3б) радіальні переміщення $\bar{u}_r = (2G/P)u_r|_{g=\alpha}$ точок верхньої грані клина, якщо $l/l_1 = 2$. За гладкого контакту (штрихпунктирні криві) граничні точки пружного клина зміщуються від його вершини. Проковзування штампа від вершини клина (суцільна крива) значно посилює це зміщення, а у зворотному напрямку (штрихові) веде до зміщення граничних точок клина у напрямку руху штампа. Поздовжня деформація $\varepsilon_r = \partial u_r / \partial r$ на ділянці

контакту є деформація стиску ($\varepsilon_r < 0$), необмежена на краях зони контакту ($r \rightarrow l - 0$, $r \rightarrow l_1 + 0$), і лише за значного зсуву внаслідок тертя (коли $\mu_0 \geq 0,5$) всередині ділянки контакту виникає зона розтягу ($\varepsilon_r > 0$). Поза нею вільна межа клина стиснута перед штампом ($\varepsilon_r < 0$) і розтягнута позаду нього ($\varepsilon_r > 0$) за ковзного контакту, та скрізь розтягнута, окрім точок межі, які значно віддалені від штампа, за гладкого контакту.

Дію моменту M , прикладеного до штампа, можна врахувати зміщенням сили P зі середини уздовж основи штампа. Повний контакт штампа з пружним клином можливий за умови, коли координата r_0 точки прикладання нормальної сили P належатиме певному проміжку $r_1 \leq r_0 \leq r_2$. Якщо $r_0 < r_1$ або $r_0 > r_2$, контакт порушується на одному з країв штампа, на що вказує зміна знака контактного тиску на цьому краї. У табл. 2 для клина з кутом розхилу $\alpha = \pi/4$ ($m = 10/3$) подано граничні значення $\lambda_1 = (r_1 - l_1)/(l - l_1)$, $\lambda_2 = (r_2 - l_1)/(l - l_1)$ відносної координати точки прикладання сили P , в межах яких штамп щільно прилягає до поверхні клина.

Таблиця 2. Граничні значення λ_1, λ_2 відносної координати точки прикладання сили P

l/l_1		1		2		6		10	
		λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2
μ_0	0,5	0,227	0,727	0,243	0,704	0,229	0,665	0,211	0,656
	0	0,250	0,750	0,262	0,723	0,236	0,664	0,215	0,647
	-0,5	0,273	0,773	0,281	0,740	0,244	0,662	0,221	0,636

ВИСНОВКИ

Методом Вінера–Гопфа знайдено аналітичний розв’язок задачі про фрикційний контакт з повним проковзуванням штампа з прямолінійною основою і пружного клина із однією закріпленою гранню. Отримано та проаналізовано розподіл контактних напружень, колові та радіальні переміщення точок незакріпленої грані пружного клина. Знайдено кут повороту та зміщення штампа. З’ясовано, що за відсутності тертя та кута повороту штампа контактні напруження, помножені на радіальну координату, а також колові переміщення незакріпленої грані клина незмінні за перетворення інверсії. За повного контакту обчислено межі точки прикладання втискувальної сили. Показано, що тертя суттєво впливає на напружено-деформований стан клина та параметри контакту: просідання, кут повороту штампа та межі відносної координати точки прикладання втискувальної сили.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена задача о контактом взаимодействии штампа с прямолинейным основанием и упругого клина, одна грань которого жестко закреплена. Учтены силы трения в области контакта. Методом Винера–Гопфа получено аналитическое решение задачи. Приведены результаты вычислений контактных напряжений и перемещений точек незакрепленной грани клина.

SUMMARY. The problem of contact interaction of a punch with a rectilinear base and an elastic wedge with one rigid side is considered. Friction forces in the contact region are taken into account. With the use of the Wiener–Hopf method, the analytical solution of the problem was received. The computational results of contact stresses and displacements at the free side of the wedge are presented.

1. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1967. – 20, № 1. – С. 3–13.
2. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967. – № 2. – С. 120–131.
3. Александров В. М. К контактными задачам для упругого клина с одной защемленной гранью // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1968. – 21, № 2. – С. 17–27.
4. Александров В. М. Контактные задачи для упругого плоского клина // Контактные задачи и их инженерные приложения. – М.: Изд. НИИмаш, 1969.
5. Александров В. М., Копасенко В. В. Контактная задача для упругого клина с жестко защемленной гранью // Прикл. механика. – 1968. – 4, вып. 7. – С. 75–82.
6. Бронштейн М. И. Решение контактной задачи для штампа на клиновидном основании // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1968. – Вып. 4. – С. 2–4.
7. Лутченко С. А. О вдавливании штампов в боковую поверхность упругого основания в виде клина // Прикл. механика. – 1966. – 2, вып. 12. – С. 61–66.
8. Лутченко С. А., Попов Г. Я. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости для клина // Там же. – 1970. – 6, вып. 3. – С. 64–71.
9. Тоноян В. С. Об одной плоской контактной задаче для упругой четвертьплоскости // Докл. АН АрмССР. – 1963. – 37, № 3. – С. 121–130.
10. Тоноян В. С. Плоская контактная задача для упругой четвертьплоскости с неподвижной вертикальной кромкой // Там же. – 1963. – 37, № 5. – С. 249–258.
11. Антипов Ю. А. Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. – 1987. – № 7. – С. 29–33.
12. Нобл Б. Метод Винера–Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
13. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
14. Зражевський Г. М., Острик В. І. Асимптотика канонічних добутків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 69–77.
15. Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.

Одержано 21.06.2010