УДК 539.3

# РІВНЯННЯ ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНЕТО-ТЕРМОМЕХАНІКИ ДІЕЛЕКТРИКІВ З УРАХУВАННЯМ ІНЕРЦІЇ ПОЛЯРИЗАЦІЇ

*В. Ф. КОНДРАТ* [2], *О. Р. ГРИЦИНА* [1,2]

[1] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;*
[2] *Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Отримані раніше співвідношення локально градієнтної теорії електромагнетотермомеханіки поляризовних нефеþví магнетних тіл узагальнено з урахуванням інерційності поляризації. Одержано ключову систему рівнянь моделі, яку записано відносно потенціалів векторів переміщення та електромагнетного поля, а також потенціалу $\mu'_\pi$, який враховує вплив локального зміщення маси на внутрішню енергію тіла. Узагальнено умову калібрування Лоренца. Встановлено, що за врахування інерції поляризації виникають дисперсія швидкості електромагнетної хвилі в тілі та додаткові динамічні складники у диференціальних рівняннях, які пов'язують потенціал $\mu'_\pi$ та скалярні потенціали векторів переміщення і електромагнетного поля.

**Ключові слова:** *взаємозв'язані електромагнетотермомеханічні процеси, локальне зміщення маси, діелектрики, нелокальність, інерція поляризації.*

Запропоновано [1, 2] повну систему співвідношень локально градієнтної теорії електромагнетотермомеханіки поляризовних деформівних неферомагнетних твердих тіл, у якій поряд із тепловими, електромагнетними та деформаційними процесами взято до уваги також локальне зміщення маси, пов'язане зі зміною структури фізично малого елемента тіла. Так вдалося описати приповерхневу неоднорідність напружено-деформованого стану та електричної поляризації, поширення електричного імпульсу внаслідок утворення поверхонь шару, аномальну залежність ємності тонких діелектричних плівок від їх товщини, оцінити значення наведеного поверхневого електричного заряду тощо [1–3]. Ця теорія побудована на припущенні оборотності процесів поляризації й локального зміщення маси, а також їхньої безінерційності. Враховано [4, 5] необоротність цих процесів. Нижче отримано співвідношення локально градієнтної моделі електромагнетотермомеханіки поляризовних неферомагнетних тіл за врахування інерції поляризації.

Підхід до врахування інерції поляризації описано раніше [6, 7], а також показано [8, 9] узгодженість побудованої за ним моделі фероелектриків з теорією динаміки ґратки. За таким підходом узагальнено [10–13] градієнтну теорію п'єзоелектриків Міндліна й модель деформівних діелектричних тіл із внутрішніми змінними. Ефективність отриманих співвідношень продемонстровано під час дослідження дії ударного навантаження, поширення акустично-оптичних та поверхневих хвиль тощо [10, 14–17].

Інший підхід до врахування інерційності різних форм руху запропоновано в працях [18, 19]. Тут у повному диференціалі беруть до уваги енергії системи складників, які є згорткою імпульсів та спряжених до них потоків. Однак поляризацію не розглядають.

*Контактна особа*: В. Ф. КОНДРАТ, e-mail: vasyl.kondrat@gmail.com

**Вихідні співвідношення модельного опису. *Балансові рівняння*.** Розглянемо ізотропне термопружне поляризовне неферомагнетне тіло, яке займає область ($V$) евклідового простору та обмежене гладкою поверхнею ($\Sigma$). Тіло перебуває під впливом механічної, теплової чи електромагнетної дій. Окрім механічних, теплових й електромагнетних процесів, братимемо до уваги також локальне зміщення маси [1, 2] та інерційність поляризації [10].

Враховуючи локальне зміщення маси, вектор $\mathbf{v}$ швидкості континуума центрів мас подаємо сумою конвективного складника $\mathbf{v}_*$ перенесення маси та складника $\rho^{-1}\partial\Pi_m/\partial t$, зумовленого зміною структури фізично малого елемента тіла [1, 2], тобто

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left(\rho\mathbf{v}_* + \frac{\partial\Pi_m}{\partial t}\right).$$

Тут $\Pi_m$ – вектор локального зміщення маси [1]; $\mathbf{v}_*$ – швидкість конвективного перенесення частинок фізично малого елемента тіла; $\rho$ – густина маси тіла; $t$ – час. За такого означення локальна форма рівняння балансу маси набуває стандартного вигляду [1]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0\,, \tag{1}$$

де $\nabla$ – оператор Гамільтона; “ $\cdot$ ” – знак скалярного добутку.

Розглянемо тепер рівняння балансу енергії системи тіло–електромагнетне поле. Повну енергію $\mathscr{E}$ системи означуємо як суму внутрішньої енергії $\rho u$, кінетичної енергії центра мас $\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2$, енергії електромагнетного поля $U_e$, а також кінетичної енергії поляризації $\frac{1}{2}\rho d_E\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2$ [10]:

$$\mathscr{E} = \rho u + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + U_e + \frac{1}{2}\rho d_E\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2.$$

Тут $u$ – питома внутрішня енергія тіла; $U_e = (\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \mu_0\mathbf{H}^2)/2$ – густина енергії електромагнетного поля, $\mathbf{E}$ та $\mathbf{H}$ – вектори напруженостей електричного та магнетного полів; $\mathbf{p} = \mathbf{P}/\rho$, $\mathbf{P}$ – вектор поляризації; $\varepsilon_0, \mu_0$ – електрична й магнетна сталі; $d_E$ — скалярна величина, пов’язана з інерційністю поляризації [10, 13]; $d\ldots/dt = \partial\ldots/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla\ldots$ – повна похідна за часом.

Повна енергія $\mathscr{E}$ системи змінюється внаслідок конвективного перенесення енергії $\rho\left[u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}d_E\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2\right]$ через поверхню тіла; потоку енергії $\hat{\sigma}\cdot\mathbf{v}$, пов’язаного із роботою внутрішніх сил; потоків тепла $\mathbf{J}_q$ та енергії електромагнетного поля $\mathbf{S}_e$; потоку енергії $\mu\mathbf{J}_m$, пов’язаної із роботою перенесення маси; потоку енергії $\mu_\pi\partial\Pi_m/\partial t$, затраченої на зміну структури тіла (через локальне зміщення маси), а також дії масових сил $\mathbf{F}$ й розподілених теплових джерел $\Re$. Відтак рівняння балансу енергії для системи в інтегральній формі має вигляд

$$\frac{d}{dt}\int_{(V)}\left(\rho u + U_e + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}\rho d_E\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2\right)dV = -\oint_{(\Sigma)}\left[\rho\left(u + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}d_E\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)^2\right)\mathbf{v} -\right.$$

$$-\hat{\sigma}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{S}_e+\mathbf{J}_q+\mu\mathbf{J}_m+\mu_\pi\frac{\partial\Pi_m}{\partial t}\Big]\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma+\int\limits_{(V)}\left(\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+\rho\Re\right)dV\,. \qquad (2)$$

Тут $\hat{\sigma}$ – тензор напружень Коші; $\mathbf{S}_e=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$; $\mathbf{J}_m=\rho(\mathbf{v}_*-\mathbf{v})$; $\mu$ – хімічний потенціал; $\mu_\pi$ – міра зміни внутрішньої енергії системи від локального зміщення маси [1]; $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла ($\Sigma$); "$\times$" – знак векторного добутку.

Із рівнянь Максвелла [20, 21]

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0\,,\ \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_e\,,\ \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,,\ \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_e+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \qquad (3)$$

одержуємо співвідношення

$$\frac{\partial U_e}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{S}_e+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*+\left[\rho_e\mathbf{E}_*+\left(\mathbf{J}_{e*}+\frac{\partial(\rho\mathbf{p})}{\partial t}\right)\times\mathbf{B}+\right.$$

$$\left.+\rho\left(\nabla\mathbf{E}_*\right)\cdot\mathbf{p}\right]\cdot\mathbf{v}+\rho\mathbf{E}_*\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-\nabla\cdot\left[\rho\left(\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p}\right)\hat{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{v}\right]=0\,, \qquad (4)$$

яке трактуємо як рівняння балансу енергії електромагнетного поля [1, 2]. Тут $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\rho\mathbf{p}$ – вектор індукції електричного поля; $\mathbf{E}_*=\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ та $\mathbf{J}_{e*}=\mathbf{J}_e-$ $-\rho_e\mathbf{v}$ – вектори напруженості електричного поля й густини електричного струму в системі відліку центрів мас, яка рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ відносно лабораторної системи координат; $\rho_e$ – густина вільного електричного заряду; $\mathbf{J}_e$ та $\mathbf{B}$ – вектор густини електричного струму та вектор індукції магнетного поля у лабораторній системі координат; $\hat{\mathbf{I}}$ – одиничний тензор. Для неферомагнетного середовища $\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$.

Якщо до інтегрального співвідношення (2) застосувати теорему Ґаусса–Остроградського, врахувати рівняння балансу енергії електромагнетного поля (4), рівняння балансу маси (1) й ентропії [22]

$$\rho T\frac{ds}{dt}=-\nabla\cdot\mathbf{J}_q+\frac{1}{T}\mathbf{J}_q\cdot\nabla T+T\sigma_s+\rho\Re\,, \qquad (5)$$

а також формулу $\mathbf{J}_m=-\dfrac{\partial\Pi_m}{\partial t}$ [1, 2], то отримаємо таку локальну форму рівняння балансу внутрішньої енергії:

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho T\frac{ds}{dt}+\left[\hat{\sigma}-\rho\left(\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p}\right)\hat{\mathbf{I}}\right]:\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt}+$$

$$+\rho\mathbf{E}_*\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}-\mu'_\pi\frac{\partial\nabla\cdot\Pi_m}{\partial t}-\nabla\mu'_\pi\cdot\frac{\partial\Pi_m}{\partial t}-\rho d_E\frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}+$$

$$+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_s+\mathbf{v}\cdot\left\{-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\left[\hat{\sigma}-\rho\left(\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p}\right)\hat{\mathbf{I}}\right]+\rho\mathbf{F}+\mathbf{F}_e\right\}. \qquad (6)$$

Тут $s$ – питома ентропія; $T$ – абсолютна температура; $\sigma_s$ – виробництво ентропії; $\mu'_\pi=\mu_\pi-\mu$, $\hat{\mathbf{e}}=\left[\nabla\mathbf{u}+\left(\nabla\mathbf{u}\right)^T\right]\!\big/2$ – тензор деформації; $\mathbf{u}$ – вектор переміщення; індекс "$T$" вказує на операцію транспонування тензора, а

$$\mathbf{F}_e=\rho_e\mathbf{E}_*+\left(\mathbf{J}_{e*}+\frac{\partial(\rho\mathbf{p})}{\partial t}\right)\times\mathbf{B}+\rho\left(\nabla\mathbf{E}_*\right)\cdot\mathbf{p}$$

– вектор густини пондеромоторної сили.

Враховуючи рівняння балансу маси (1), зі співвідношення (6) одержимо рівняння балансу внутрішньої енергії:

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho T\frac{ds}{dt}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt}+\rho\mathbf{E}_*\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-\rho\nabla\mu'_\pi\cdot\frac{d\pi_m}{dt}-\rho d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+$$

$$+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_s+\mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*+\mathbf{F}_e\right).$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*=\hat{\boldsymbol{\sigma}}-\rho(\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p}-\rho_m\mu'_\pi-\boldsymbol{\pi}_m\cdot\nabla\mu'_\pi)\,\hat{\mathbf{I}}$; $\mathbf{F}_*=\mathbf{F}+\rho_m\nabla\mu'_\pi-\boldsymbol{\pi}_m\cdot\nabla\nabla\mu'_\pi$; $\boldsymbol{\pi}_m==\boldsymbol{\Pi}_m/\rho$; $\rho_m=\rho_{m\pi}/\rho$, $\rho_{m\pi}$ — густина наведеної маси, для якої справджується співвідношення [2]

$$\rho_{m\pi}=-\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_m. \tag{7}$$

Вважатимемо, що параметром термодинамічного стану тіла є вектор напруженості локального електричного поля $\mathbf{E}^L$ [10, 23], який відрізняється від вектора макроскопічного електричного поля $\mathbf{E}_*$. Тоді рівняння (6) запишемо у вигляді

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho T\frac{ds}{dt}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt}+\rho\mathbf{E}^L\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\rho\mu'_\pi\frac{d\rho_m}{dt}-$$

$$-\rho\nabla\mu'_\pi\cdot\frac{d\boldsymbol{\pi}_m}{dt}+\rho\left(\mathbf{E}_*-\mathbf{E}^L-d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+$$

$$+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_s+\mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*+\mathbf{F}_e\right). \tag{8}$$

З допомогою перетворення Лежандра $f=u-Ts-\mathbf{E}^L\cdot\mathbf{p}+\nabla\mu'_\pi\cdot\boldsymbol{\pi}_m-\mu'_\pi\rho_m$ перейдемо до нової термодинамічної функції *f*, яку трактуємо як узагальнену вільну енергію Гельмгольца. Тепер з рівняння балансу внутрішньої енергії (8) одержуємо:

$$\rho\frac{df}{dt}=-\rho s\frac{dT}{dt}+\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt}-\rho\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{E}^L}{dt}-\rho\rho_m\frac{d\mu'_\pi}{dt}+\rho\boldsymbol{\pi}_m\cdot\frac{d(\nabla\mu'_\pi)}{dt}+$$

$$+\rho\left(\mathbf{E}_*-\mathbf{E}^L-d_E\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\right)\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_*-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T}-T\sigma_s+$$

$$+\mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*+\mathbf{F}_e\right). \tag{9}$$

Вважаємо, що вільна енергія *f* – функція таких незалежних параметрів: температури *T*, тензора деформації $\hat{\mathbf{e}}$, вектора напруженості $\mathbf{E}^L$ локального електричного поля, потенціалу $\mu'_\pi$ та його градієнта $\nabla\mu'_\pi$, тобто $f=f(T,\mu'_\pi,\mathbf{E}^L,\nabla\mu'_\pi,\hat{\mathbf{e}})$. Тоді, враховуючи інваріантність співвідношення (9) відносно просторових трансляцій [20], отримуємо рівняння балансу імпульсу

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*+\rho\mathbf{F}_*+\mathbf{F}_e, \tag{10}$$

узагальнене рівняння Ґіббса

$$df=\frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*:d\hat{\mathbf{e}}-s\,dT-\mathbf{p}\cdot d\mathbf{E}^L-\rho_m d\mu'_\pi+\boldsymbol{\pi}_m\cdot d(\nabla\mu'_\pi), \tag{11}$$

вираз для виробництва ентропії

$$\sigma_s=-\mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T^2}+\mathbf{J}_{e*}\cdot\frac{\mathbf{E}_*}{T} \tag{12}$$

та співвідношення

$$\mathbf{E}_* - \mathbf{E}^L = d_E \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}. \tag{13}$$

Зазначимо, що рівняння (13) іноді називають рівнянням “балансу міжмолекулярних сил” [10]. Рівняння Гіббса (11) та вираз (12) – основа для формулювання визначальних співвідношень моделі.

***Визначальні рівняння.*** З огляду на незалежність параметрів $T$, $\mu'_\pi$, $\mathbf{E}^L, \nabla\mu'_\pi$ та $\hat{\mathbf{e}}$ із співвідношення Гіббса (11) маємо такі рівняння стану:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \rho \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{\mathbf{e}}}\right|_{T, \mathbf{E}^L, \mu'_\pi, (\nabla\mu'_\pi)}, \quad s = -\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{\hat{\mathbf{e}}, \mathbf{E}^L, \mu'_\pi, (\nabla\mu'_\pi)}, \quad \rho_m = -\left.\frac{\partial f}{\partial \mu'_\pi}\right|_{\hat{\mathbf{e}}, T, \mathbf{E}^L, (\nabla\mu'_\pi)},$$

$$\mathbf{p} = -\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{E}^L}\right|_{\hat{\mathbf{e}}, T, \mu'_\pi, (\nabla\mu'_\pi)}, \quad \boldsymbol{\pi}_m = \left.\frac{\partial f}{\partial (\nabla\mu'_\pi)}\right|_{\hat{\mathbf{e}}, T, \mathbf{E}^L, \mu'_\pi}. \tag{14}$$

Розвинемо узагальнену вільну енергію $f$ за збуреннями параметрів стану і для малих збурень обмежимося у цьому розвиненні квадратичними членами. Тоді для ізотропного початково однорідного тіла

$$f = f_0 - s_0(T - T_0) + \frac{1}{2\rho_0}\left(K - \frac{2}{3}G\right) I_1^2 + \frac{1}{\rho_0} G I_2 - \frac{C_V}{2T_0}(T - T_0)^2 - \frac{1}{2} d_\mu (\mu'_\pi - \mu'_{\pi 0})^2 -$$
$$- \frac{1}{\rho_0} K\alpha_T I_1 (T - T_0) - \frac{1}{\rho_0} K\alpha_\mu I_1 (\mu'_\pi - \mu'_{\pi 0}) - \beta_{T\mu} (\mu'_\pi - \mu'_{\pi 0})(T - T_0) -$$
$$- \frac{1}{2}\chi_E \mathbf{E}^L \cdot \mathbf{E}^L - \frac{1}{2}\chi_m (\nabla\mu'_\pi) \cdot (\nabla\mu'_\pi) + \chi_{Em} \mathbf{E}^L \cdot (\nabla\mu'_\pi). \tag{15}$$

Тут $I_1 = \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{I}} \equiv e$, $I_2 = \hat{\mathbf{e}} : \hat{\mathbf{e}}$ – відповідно перший та другий інваріанти тензора деформації; $K$, $G$, $d_\mu$, $C_V$, $\alpha_T$, $\alpha_\mu$, $\beta_{T\mu}$, $\chi_E$, $\chi_m$, $\chi_{Em}$ – характеристики матеріалу; $f_0$ – значення узагальненої вільної енергії $f$ у вихідному стані, коли $T = T_0$, $s = s_0$, $\rho_m = 0$, $\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0}$, $\mathbf{E}^L = 0$, $\nabla\mu'_\pi = 0$, $\mathbf{p} = 0$, $\boldsymbol{\pi}_m = 0$, $\hat{\mathbf{e}} = 0$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 0$. Тепер на основі формул (14) та (15) одержуємо такі лінійні рівняння стану:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2G\hat{\mathbf{e}} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)e - K\alpha_T \tilde{T} - K\alpha_\mu \tilde{\mu}'_\pi\right]\hat{\mathbf{I}},$$

$$s = s_0 + \frac{C_V}{T_0}\tilde{T} + \frac{1}{\rho_0} K\alpha_T e + \beta_{T\mu}\tilde{\mu}'_\pi,$$

$$\rho_m = d_\mu \tilde{\mu}'_\pi + \frac{1}{\rho_0} K\alpha_\mu e + \beta_{T\mu}\tilde{T},$$

$$\mathbf{p} = \chi_E \mathbf{E}^L - \chi_{Em}\nabla\tilde{\mu}'_\pi, \quad \boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m \nabla\tilde{\mu}'_\pi + \chi_{Em}\mathbf{E}^L. \tag{16}$$

Тут $\tilde{\mu}'_\pi = \mu'_\pi - \mu'_{\pi 0}$ та $\tilde{T} = T - T_0$ – збурення відповідних величин.

Враховуючи рівняння (13), останні два визначальні співвідношення системи (16) запишемо так:

$$\mathbf{p} + \chi_E d_E \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} = \chi_E \mathbf{E} - \chi_{Em}\nabla\tilde{\mu}'_\pi, \quad \boldsymbol{\pi}_m + \chi_{Em} d_E \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2} = \chi_{Em}\mathbf{E} - \chi_m \nabla\tilde{\mu}'_\pi. \tag{17}$$

Звідси одержуємо співвідношення, що пов’язує вектори $\boldsymbol{\pi}_m$, $\mathbf{p}$ та $\nabla\tilde{\mu}'_\pi$:

$$\boldsymbol{\pi}_m = -\chi_\mu \nabla\tilde{\mu}'_\pi + \chi_p \mathbf{p}, \tag{18}$$

де $\qquad \chi_\mu = \chi_m - \chi_{Em}^2 / \chi_E$ , $\qquad \chi_p = \chi_{Em} / \chi_E$ .

Приймаючи, що термодинамічні потоки $\mathbf{J}_{e*}$ та $\mathbf{J}_q$ є лінійні функції термодинамічних сил $\mathbf{E}_*/T$ та $-\nabla T/T^2$ , на основі рівняння (12) для виробництва ентропії отримуємо такі лінійні кінетичні рівняння:

$$\mathbf{J}_q = -\lambda\nabla T + \pi_t \mathbf{J}_e , \; \mathbf{J}_e = \sigma_e \mathbf{E} + \sigma_e \eta \nabla T . \tag{19}$$

Тут $\sigma_e, \lambda$ — коефіцієнти електро- й теплопровідності, а коефіцієнти $\eta, \pi_t$ характеризують термоелектричні явища. Зазначимо також, що $T\eta = -\pi_t$ .

**Ключові рівняння в лінійному наближенні.** Рівняння балансу маси (1), балансу ентропії (5) та імпульсу (10), формула (7), що пов'язує густину наведеної маси з вектором локального зміщення маси, визначальні співвідношення (16) і (19), рівняння (13) разом із геометричними співвідношеннями та рівняннями Максвелла (3) складають повну систему співвідношень електромагнетотермомеханіки поляризовних неферомагнетних ізотропних тіл із урахуванням локального зміщення маси та інерції поляризації. Її ключова форма відносно функцій переміщення $\mathbf{u}$ , збурень температури $\tilde{T}$ й потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$, напруженості електричного $\mathbf{E}$ й індукції магнетного $\mathbf{B}$ полів у лінеаризованому наближенні має вигляд

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left( K + \frac{1}{3} G \right) \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + G\Delta \mathbf{u} - K\alpha_T \nabla \tilde{T} - K\alpha_\mu \nabla \tilde{\mu}'_\pi + \rho_0 \mathbf{F} ,$$

$$\rho_0 C_V \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \left( \lambda - \pi_t \sigma_e \eta \right) \Delta \tilde{T} - T_0 K \alpha_T \frac{\partial \left( \nabla \cdot \mathbf{u} \right)}{\partial t} - \rho_0 T_0 \beta_{T\mu} \frac{\partial \tilde{\mu}'_m}{\partial t} - \sigma_e \pi_t \nabla \cdot \mathbf{E} + \rho_0 \Re ,$$

$$\Delta \tilde{\mu}'_\pi - \frac{D_\mu}{\chi_\mu} \tilde{\mu}'_\pi = \frac{K\alpha_\mu}{\rho_0 \chi_\mu} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\beta_{T\mu}}{\chi_\mu} \tilde{T} - \frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \frac{\chi_p}{\chi_\mu} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{\chi_p}{\chi_\mu} \frac{\rho_e}{\rho_0} ,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \; \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 ,$$

$$\mathsf{L}\left( \nabla \times \mathbf{B} \right) = \mathsf{L}\left( \mu_0 \sigma_e \mathbf{E} + \mu_0 \sigma_e \eta \nabla \tilde{T} \right) + \varepsilon \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathsf{L}' \mathbf{E} - \frac{\rho_0 \chi_{Em}}{\varepsilon} \nabla \tilde{\mu}'_\pi \right) ,$$

$$\varepsilon \mathsf{L}' \left( \nabla \cdot \mathbf{E} \right) - \rho_0 \chi_{Em} \Delta \tilde{\mu}'_\pi = \mathsf{L} \rho_\mathsf{e} . \tag{20}$$

Тут $\mathsf{L} = 1 + \chi_E d_E \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ ; $\mathsf{L}' = 1 + \chi_E d_E \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ ; $\varepsilon = \varepsilon_0 + \rho_0 \chi_E$ . Щоб одержати третє рівняння системи (20), використали співвідношення (18), формулу $\rho_m = -\nabla \cdot \pi_m$ , яка є лінійним наближенням рівняння (7), рівняння стану ($16_3$) для питомої густини наведеної маси та рівняння $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{p} = \rho_e$ , яке є наслідком рівнянь Максвелла. Отже, коли враховувати інерцію поляризації, підвищується порядок рівнянь Максвелла, які містять тепер похідні за часом вищих порядків.

Для ідеальних діелектриків $(\rho_e = 0, \sigma_e = 0)$ в ізотермічному наближенні система рівнянь (20) набуває вигляду

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left( K + \frac{1}{3} G \right) \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + G\Delta \mathbf{u} - K\alpha_\mu \nabla \tilde{\mu}'_\pi + \rho_0 \mathbf{F} ; \tag{21}$$

$$\Delta \tilde{\mu}'_\pi - \frac{d_\mu}{\chi_\mu} \tilde{\mu}'_\pi = \frac{K\alpha_\mu}{\rho_0 \chi_\mu} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \frac{\chi_p}{\chi_\mu} \nabla \cdot \mathbf{E} ; \tag{22}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0,\ \mathsf{L}'(\nabla\cdot\mathbf{E})-\frac{\rho_0\chi_{Em}}{\varepsilon}\Delta\tilde{\mu}'_\pi=0,$$

$$\nabla\times(\mathsf{L}\mathbf{B})=\rho_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{\rho_0}\mathsf{L}\mathbf{E}+\chi_E\mathbf{E}-\chi_{Em}\nabla\tilde{\mu}'_\pi\right). \qquad (23)$$

Використаємо її для вивчення впливу інерції поляризації на взаємодію механічних та електромагнетних полів.

**Перехід до потенціального опису.** Подамо вектори переміщення **u** та масових сил **F** сумами їх потенціальних та вихрових складників, а вектори напруженості електричного **E** та індукції магнетного **B** полів – через скалярний $\varphi_e$ та векторний **A** потенціали:

$$\mathbf{u}=\nabla\varphi_u+\nabla\times\psi_u,\ \mathbf{F}=\nabla\Phi+\nabla\times\Psi,\ \nabla\cdot\psi_u=0,\ \nabla\cdot\Psi=0, \qquad (24)$$

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi_e-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\ \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}. \qquad (25)$$

Підставляючи подання (25) для векторів електромагнетного поля у рівняння електродинаміки (23), одержуємо два однотипні диференціальні співвідношення:

$$\mathsf{L}(\Delta\mathbf{A})-\varepsilon\mu_0\mathsf{L}'\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=0,\ \mathsf{L}(\Delta\varphi_{em})-\varepsilon\mu_0\mathsf{L}'\frac{\partial^2\varphi_{em}}{\partial t^2}=0. \qquad (26)$$

Тут потенціал

$$\varphi_{em}=\varphi_e+\chi_E d_E\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{\partial^2\varphi_e}{\partial t^2}+\frac{\rho_0\chi_{Em}}{\varepsilon}\tilde{\mu}'_\pi. \qquad (27)$$

Щоб отримати рівняння (26), використали таку модифіковану умову калібрування Лоренца:

$$\mathsf{L}(\nabla\cdot\mathbf{A})+\varepsilon\mu_0\frac{\partial\varphi_{em}}{\partial t}=0. \qquad (28)$$

Зазначимо, що за нехтування інерцією поляризації ($d_E=0$) потенціал $\varphi_{em}$ збігається з потенціалом $\varphi_{e\mu}$, введеним раніше [24].

Підставляючи подання (24) у рівняння (21), (22), для визначення потенціалів $\varphi_u$, $\tilde{\mu}'_\pi$ та $\psi_u$ отримаємо:

$$G\Delta\psi_u+\rho_0\Psi-\rho_0\frac{\partial^2\psi_u}{\partial t^2}=0, \qquad (29)$$

$$\left(K+\frac{4}{3}G\right)\Delta\varphi_u+\rho_0\Phi-\rho_0\frac{\partial^2\varphi_u}{\partial t^2}=K\alpha_\mu\tilde{\mu}'_\pi, \qquad (30)$$

$$\mathsf{L}\left[\mathsf{L}'\left(\Delta\tilde{\mu}'_\pi-\frac{d_\mu}{\chi_\mu}\tilde{\mu}'_\pi\right)+\frac{\chi_{Em}\chi_p}{\chi_\mu}\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\Delta\tilde{\mu}'_\pi-\frac{K\alpha_\mu}{\rho_0\chi_\mu}\mathsf{L}'(\Delta\varphi_u)\right]=0. \qquad (31)$$

Як бачимо, після введення потенціалу $\varphi_{em}$ система рівнянь (26), (29)–(31) набула структури системи рівнянь, одержаної раніше [24], де інерційність поляризації не враховували. Це дає можливість рівняння (26), (29)–(31) розв’язувати послідовно, зокрема, знаходити розв’язки ($\tilde{\mu}'_\pi$ та $\varphi_u$) рівнянь (30) й (31) з подальшим визначенням потенціалів **A** та $\varphi_{em}$ з однотипних однорідних рівнянь (26). Якщо потенціали $\varphi_{em}$ та $\tilde{\mu}'_\pi$ відомі, то для пошуку функції $\varphi_e$ маємо диференціальне рівняння (27). Як і в праці [24], для визначення векторних потенціалів $\psi_u$ та $\mathbf{A}$ отримали однорідні рівняння, які не зв'язані між собою і з іншими рівняннями системи. Однак, якщо співвідношення для визначення потенціалу $\psi_u$ ідентичне відомому [24], то рівняння для потенціалу $\mathbf{A}$ модифікували, враховуючи інерцію поляризації. Зауважимо, що наслідком цього буде дисперсія швидкості поширення електромагнетної хвилі. Цікаво, що формула (31), на відміну від її аналога [24], містить динамічні складники через врахування інерції поляризації. Це є результат взаємодії електромагнетних процесів та локального зміщення маси. Оскільки рівняння (30) та (31) взаємозв'язані, а динамічну поведінку потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$ визначає інерційність поляризації, то вона впливатиме й на динаміку зміни об'єму. За нехтування у системі рівнянь (26), (29)–(31) інерцією поляризації ($d_E = 0$), прийдемо до системи співвідношень, яка узгоджується із результатами праці [24].

**ВИСНОВКИ**

Отримано повну систему співвідношень локально градієнтної електромагнетотермомеханіки неферомагнетного поляризовного ізотропного середовища з урахуванням інерції поляризації. У припущенні, що стан тіла визначає напруженість локального електричного поля, одержано рівняння "балансу міжмолекулярних сил" та відповідні визначальні співвідношення. Показано, що, враховуючи інерцію поляризації, для визначення векторів локального зміщення маси та поляризації можна одержати визначальні співвідношення, які містять другу похідну за часом від вектора поляризації. Сформульовано ключову систему рівнянь моделі, яку записано також відносно скалярного $\varphi_u$ й векторного $\psi_u$ потенціалів вектора переміщення, потенціалу $\tilde{\mu}'_\pi$, векторного потенціалу $\mathbf{A}$ електромагнетного поля та скалярного потенціалу $\varphi_{em}$. Функція $\varphi_{em}$ пов'язана зі скалярним електричним потенціалом $\varphi_e$ та потенціалом $\tilde{\mu}'_\pi$ диференціальним співвідношенням (27). Запропоновано узагальнену умову калібрування Лоренца, з допомогою якої для визначення потенціалів $\mathbf{A}$ й $\varphi_{em}$ отримано незв'язані рівняння однакової структури**.** Проаналізовано вплив інерційності поляризації на взаємодію полів.

*РЕЗЮМЕ*. Полученные ранее соотношения локально градиентной теории электромагнитотермомеханики поляризуемых неферромагнитных тел обобщены с учетом влияния инерционности поляризации. Получена ключевая система уравнений модели, записанная относительно потенциалов векторов перемещения и электромагнитного поля, а также потенциала $\mu'_\pi$, учитывающего влияние локального смещения массы на внутреннюю энергию тела. Обобщено условие калибровки Лоренца. Показано, что учет инерции поляризации приводит к дисперсии скорости электромагнитной волны в теле и возникновению дополнительных динамических составляющих в дифференциальных уравнениях, связывающих потенциал $\mu'_\pi$ и скалярные потенциалы векторов перемещения и электромагнитного поля.

*SUMMARY*. The previously obtained relationships of the local gradient theory of electromagnetothermomechanics of polarized nonferromagnetic bodies are generalized with regard of polarization inertia. A corresponding key system of equations is obtained. This system is also written relatively to the potentials of displacement vector, vectors of electromagnetic fields and potential $\mu'_\pi$, which takes into account the influence of the mass displacement on the internal energy. The generalization of the Lorentz gauge is proposed. It is established that polarization inertia accounting leads to the dispersion of the electromagnetic wave velocity in the body and occurrence of additional dynamic components in differential equations, relating the potential $\mu'_\pi$ and scalar potentials of displacement vector and electromagnetic field vectors.

1. *Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Приповерхневі механоелектромагнетні явища у термопружних поляризовних тілах за локального зміщення маси // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 4. – С. 5–17.

   (*Burak Ya. I., Kondrat V. F., and Hrytsyna O. R.* Subsurface Mechanoelectromagnetic Phenomena in Thermoelastic Polarized Bodies in the Case of Local Displacements of Mass // Materials Science. – 2007. – **43**, № 4. – P. 449–463.)
2. *Burak Ya., Kondrat V., and Hrytsyna O.* An Introduction of the Local Displacements of Mass and Electric Charge Phenomena into the Model of the Mechanics of Polarized Electromagnetic Solids // J. Mech. Mat. and Struct. – 2008. – **3**, № 6. – P. 1037–1046.
3. *On Electromechanical* Phenomena in Thin Dielectric Films / Ye. Chapla, S. Kondrat, O. Hrytsyna, and V. Kondrat // Task Quarterly. – 2009. – **13**, № 1. – P. 145–154.
4. *Кондрат В., Грицина О.* Рівняння термомеханіки деформівного твердого тіла з урахуванням необоротності локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 1. – С. 169–177.
5. *Кондрат В., Грицина О.* Моделювання електротермомеханічних процесів у в'язкій електропровідній поляризовній рідині з урахуванням необоротності локальних зміщень маси та електричного заряду // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 42–54.
6. *Maugin G. A.* Deformable Dielectrics II. Voigt's Intramolecular Force Balance in Elastic Dielectrics // Arch. Mech. – 1977. – **29**. – P. 143–151.
7. *Maugin G. A.* Deformable Dielectrics III. A Model of Interactions // Ibid. – 1977. – **29**. – P. 251–258.
8. *Pouget J., Askar A., and Maugin G. A.* Lattice Model for Elastic Ferroelectric Crystals: Microscopic Approximation // Phys. Rev. B. – 1986. – **33**. – P. 6304–6319.
9. *Pouget J., Askar A., and Maugin G. A.* Lattice Model for Elastic Ferroelectric Crystals: Continuum Approximation // Ibid. – 1986. – **33**. – P. 6320–6325.
10. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
11. *Hadjigeorgiou E. P., Kalpakides V. K., and Massalas C. V.* A General Theory for Elastic Dielectrics – Part I. The Vectorial Approach // Int. J. Non-Linear Mech. – 1999. – **34**, № 5. – P. 831–841.
12. *Dolfin M., Francaviglia M., and Restuccia L.* Thermodynamics of Deformable Dielectrics with a Non-Euclidean Structure as Internal Variable // Technische mechanik. – 2004. – **24**, № 2. – P. 137–145.
13. *Maugin G. A. and Restuccia L.* Thermodynamics of Inhomogeneous Ferroelectrics // J. Mech. Mat. and Struct. – 2008. – **3**, № 6. – P. 1113–1123.
14. *Pouget J. and Maugin G. A.* Coupled Acoustic-Optic Modes in Deformable Ferroelectrics // J. Acoust. Soc. Am. – 1980. – **68**. – P. 588–601.
15. *Pouget J. and Maugin G. A.* Bleustein-Gulyaev Surface Modes in Elastic Ferroelectrics // Ibid. – 1981. – **69**. – P. 1304–1318.
16. *Pouget J. and Maugin G. A.* Piezoelectric Rayleigh Waves in Elastic Ferroelectrics // Ibid. – 1981. – **69**. – P. 1319–1325.
17. *Dost S. and Sahin E.* Wave Propagation in Rigid Dielectrics with Polarization Inertia // Int. J. Engng. Sci. – 1986. – **24**. – P. 1445–1451.
18. *Бурак Я. Й., Нагірний Т. С.* Термодинамічні аспекти узагальненої термомеханіки // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 8. – С. 34–37.
19. *Бурак Я. Й., Грицина О. Р., Нагірний Т. С.* Визначальні співвідношення узагальненої електротермомеханіки // Там же. – 1990. – № 9. – С. 32–35.
20. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 400 с.
21. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
22. *Гроот де С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1964. – 456 с.
23. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1984. – 159 с.
24. *Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Механоелектромагнітна взаємодія в ізотропних діелектриках з урахуванням локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 150–158.


*Одержано 05.05.2010*