УДК 539.3

ТИСК ПРУЖНОГО ТІЛА НА ЖОРСТКУ ОСНОВУ З ВИЇМКОЮ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНОЮ РІДИНОЮ, ЩО НЕ ЗМОЧУЄ ЇХ ПОВЕРХНІ

Б. С. СЛОБОДЯН

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Досліджено контактну взаємодію пружного тіла з жорсткою основою, що має поверхневу виїмку, яка зумовлює зазор між тілами. У центрі зазору знаходиться міжповерхневий місток нестисливої незмочувальної рідини, а на краях – газ під сталим тиском. З використанням методу функцій міжконтактних зазорів задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно висоти зазору, яке розв’язано аналітично. Проаналізовано залежність довжини ділянки з рідиною та її тиску від навантаження, кількості рідини та її поверхневого натягу.

Ключові слова: *контактна взаємодія, виїмка, міжповерхневий зазор, заповнювач, капілярні явища, поверхневий натяг.*

Капілярні явища можуть відігравати важливу роль під час роботи мікро- та нановимірювальної техніки. Тому було вивчено механізм теплопередачі під час контакту головки мікроскопа теплового сканування (SThM – scanning thermal microscope) з основою за наявності рідинного містка між ними. Схожі дослідження для атомного силового мікроскопа (AFM – atomic force microscope) з урахуванням капілярних явищ проводились раніше [1]. Також було вивчено вплив міжповерхневих рідинних містків на переміщення головки в записуючих пристроях, зокрема в так званих HDI (headslider/disk interface) системах жорстких дисків HDD (hard disk drive) [2]. В останнє десятиліття активно досліджують біомеханічну поведінку живих тканин з урахуванням поверхневого натягу рідини в області контакту [3].

Згідно з класифікацією К. Джонсона, за геометрією поверхонь тіл, що контактують, розрізняють два характерні види: тіла з неузгодженими поверхнями, які початково торкаються в точці чи по лінії; тіла з узгодженими поверхнями, для яких ділянка контакту сумірна з розмірами тіл, а локальний характер можуть мати ділянки, в яких відсутній контакт поверхонь.

Вплив капілярних явищ на взаємодію тіл, для яких властивий локальний контакт, розглядалось у працях [4, 5].

Контакт тіл з узгодженими межами за наявності між ними зазорів, в яких не враховано капілярних явищ, вивчено в працях [6–12], а контакт тіл узгодженої форми з урахуванням зчеплення і проковзування – у працях [13–17]. Досліджено взаємодію узгоджених поверхонь для різних видів локальних контактних неоднорідностей, зокрема, заповнювача міжконтактних зазорів [12, 18, 19] та поверхневого термоопору [20–24].

Задачі для тіл з узгодженими межами з урахуванням рідинних містків розглянуто в працях [25–28]. Так, було вивчено контактну взаємодію пружного тіла зі змінним під час навантаження зазором [25, 26] і пружного тіла з жорсткою основою за наявності виїмки еліптичної [27] та прямокутної [28] форми. Проте у всіх цих випадках рідина в містках повністю змочувала поверхні тіл.

Контактна особа: Б. С. СЛОБОДЯН, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Нижче розглянуто контактну взаємодію пружного тіла з жорсткою основою за наявності виїмки, заповненої рідиною, яка не змочує їх поверхні.

Формулювання задачі. Розглянемо контакт півпростору з жорсткою основою, межа якої вздовж нескінченної смуги завширшки $2c$ має еліптичну в перерізі виїмку, глибина якої задана функцією $r(x) = A\sqrt{1 - x^2 / c^2}$. Виїмка плитка, тобто її глибина набагато менша, ніж ширина ($r(x) << c$). Поза виїмкою поверхня жорсткого тіла плоска. Пружний півпростір притискається до основи під дією рівномірно розподіленого на нескінченності навантаження P^∞ і в ньому реалізується стан плоскої деформації. Вважаємо, що зазор між тілами частково заповнений нестисливою рідиною, яка не змочує поверхні тіл (тобто крайовий кут змочування $\theta = 180°$ [29]), і тому збирається у ширшому місці зазору в середній його частині (рис. 1). Краї зазору заповнені газом, що перебуває під незмінним тиском P_1.

Меніск – бокова поверхня рідини, яка межує з газом – в перерізі має форму дуги кола радіуса R. Внаслідок кривизни меніска і поверхневого натягу рідини σ тиск у газі P_1 менший за тиск у рідині P_2. Перепад тисків в цих двох субстанціях ΔP визначаємо за формулою Лапласа [29]:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \sigma / R . \qquad (1)$$

Зважаючи на те, що рідина не змочує поверхні тіл, а висота зазору $h(x)$ – мала, будемо вважати, що меніск має форму півциліндра, радіус якого рівний половині висоти зазору в точках $x = \pm a$ виходу меніска на межу пружного тіла: $R = h(a)/2$. Тоді формулу Лапласа (1) запишемо так:

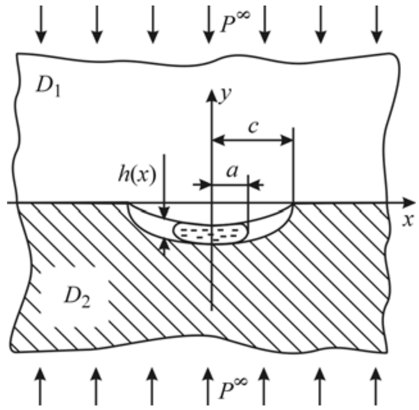

Рис. 1. Схема навантаження.

Fig. 1. Loading mode.

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{2\sigma}{h(a)} . \qquad (2)$$

Оскільки рідина нестислива і не може виходити із зазору, то рівняння збереження кількості рідини має вигляд

$$\int_{-a}^{a} h(x)dx = V_2 . \qquad (3)$$

Тут V_2 – об'єм рідини, що припадає на одиницю довжини зазору в напрямі твірної виїмки.

Зважаючи на плоску деформацію пружного півпростору, будемо розглядати контактну задачу теорії пружності для півплощини D_1, утвореної перетином півпростору площиною, перпендикулярною до твірної виїмки. Компоненти тензора напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} задовольняють рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 , \ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 , \ (x, y) \in D_1$$

та рівняння сумісності Бельтрамі–Мітчела

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\sigma_x + \sigma_y \right) = 0 , \ (x, y) \in D_1 .$$

Компоненти тензора деформації $\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$, $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$ (тут u_x, u_y – компоненти вектора переміщень) визначають через компоненти тензора напружень із закону Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right),\ \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x\right),\ \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy}.$$

Тут E, ν – модуль Юнґа та коефіцієнт Пуассона відповідно.

Контактно-крайові умови задачі запишемо у вигляді

$$\tau_{xy} = 0,\ u_y = 0,\ y = 0,\ x \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty) \tag{4}$$

на ділянках безпосереднього контакту;

$$\begin{gathered} \tau_{xy} = 0,\ x \in (-c, c); \\ \sigma_y = -P_2,\ x \in (-a, a); \\ \sigma_y = -P_1,\ x \in (-c, -a) \cup (a, c) \end{gathered} \tag{5}$$

на ділянці зазору;

$$\sigma_y = -P^\infty,\ \sigma_x = 0,\ \tau_{xy} = 0,\ \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty \tag{6}$$

на нескінченності.

Задача нелінійна, оскільки тиск у рідині P_2 та ділянка контакту рідини з поверхнями тіл $[-a, a]$ змінюються під час навантаження і наперед невідомі. Для їх визначення використаємо умови (2), (3).

Метод розв'язання. Згідно з методом функцій міжконтактних зазорів [17] задачу зведено до розв'язування сингулярного інтегрального рівняння відносно функції $h'(x)$:

$$\int_L \frac{h'(t)}{t-x}dt = -\frac{\pi K}{4}\left(P^\infty - P(x)\right) + \frac{A\pi}{c}, \quad x \in (-c, c) \tag{7}$$

за умов рівності нулеві висоти зазору в крайніх його точках

$$h(-c) = h(c) = 0. \tag{8}$$

Тут $P(x) = \begin{cases} P_1,\ |x| \in (a, c); \\ P_2, x \in (-a, a); \end{cases}$ $K = \frac{1+\kappa}{2G}$; $\kappa = 3 - 4\nu$; $G = E/\left(2 + 2\nu\right)$.

Напруження і похідні від переміщень за допомогою методу комплексних потенціалів виражають через функцію $h(x)$ у вигляді [30]

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\Phi(z),\quad \sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} - P^\infty,$$

$$2G\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x + iu_y\right) = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \frac{3-\kappa}{4}P^\infty, \quad z \in D_1,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi K}\left\{\int_{-c}^{c} \frac{h'(t)}{t-z}dt - \int_{-c}^{c} \frac{r'(t)}{t-z}dt\right\},\ z \in D_j,\ j = 1, 2.$$

Тут $z = x + iy$ комплексна змінна.

Розв'язавши сингулярне інтегральне рівняння (7), знаходимо функцію $h'(x)$. Проінтегрувавши її з врахуванням умови (8), визначаємо висоту міжконтактного зазору

$$h(x)=\left\{\frac{K}{2}\left(P^{\infty}-P_1\right)+\frac{K}{2}\left(P_2-P_1\right)\left[2\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)-\pi\right]-\frac{A}{c}\right\}\sqrt{c^2-x^2}+$$

$$+\frac{K\sigma}{2\pi h(a)}\left[\left(x+a\right)\Gamma(c,x,-a)-\left(x-a\right)\Gamma(c,x,a)\right]. \qquad (9)$$

Тут $$\Gamma(c,x,a)=\ln\frac{c^2-ax+\sqrt{(c^2-x^2)(c^2-a^2)}}{c^2-ax-\sqrt{(c^2-x^2)(c^2-a^2)}}.$$

Визначивши із формули (2) тиск рідини P_2 через тиск газу P_1 та висоту меніска $h(a)$ і підставивши його у подання (9), отримаємо:

$$h(x)=\left\{\frac{K}{2}\left(P^{\infty}-P_1\right)+\frac{K\sigma}{\pi h(a)}\left[2\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)-\pi\right]-\frac{A}{c}\right\}\sqrt{c^2-x^2}+$$

$$+\frac{K\sigma}{2\pi h(a)}\left[\left(x+a\right)\Gamma(c,x,-a)-\left(x-a\right)\Gamma(c,x,a)\right]. \qquad (10)$$

Поклавши у формулі (10) $x=a$, отримаємо квадратне рівняння для визначення висоти меніска $h(a)$

$$\left(h(a)\right)^2+\frac{K}{2}\left(P^{\infty}-P_1\right)\sqrt{c^2-a^2}\,h(a)-$$

$$-\frac{4K\sigma}{\pi}\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)\sqrt{c^2-a^2}-A\sqrt{c^2-a^2}-\frac{2K\sigma a}{\pi}\ln\left(\frac{c}{a}\right)=0. \qquad (11)$$

Розв’язавши рівняння (11), виберемо з двох його розв’язків фізично коректний (невід’ємний).

Підставивши в умову (3) функцію (10), отримаємо рівняння для знаходження наперед невідомої величини – довжини ділянки з рідиною a:

$$\left\{\frac{A}{c}-\frac{K}{2}\left(P^{\infty}-P_1\right)+\frac{K\sigma}{\pi h(a)}\left[2\arcsin\left(\frac{a}{c}\right)-\pi\right]\right\}\times$$

$$\times\left[a\sqrt{c^2-a^2}-c^2\arcsin\left(a/c\right)\right]=V_2. \qquad (12)$$

Трансцендентне рівняння (12) розв’язано числово.

Числові розрахунки. Для обчислень введено такі безрозмірні величини $\tilde{a}=a/c$; $\tilde{b}=b/c$; $\tilde{A}=A/c$; $\tilde{P}_1=KP_1$; $\tilde{\sigma}=K\sigma/c$; $\Delta\tilde{P}=K\Delta P$; $\tilde{V}_2=V_2/V$, де V – об’єм виїмки. Всі обчислення проведено для максимальної висоти виїмки $\tilde{A}=0{,}001$ і тиску газу $\tilde{P}_1=0{,}001$.

З рис. 2*a* бачимо, що під час збільшення зовнішнього тиску довжина ділянки з рідиною зростає, але з наближенням до краю виїмки це зростання значно сповільнюється.

Це зумовлено тим, що під час наближення рідини до краю зазору зменшується висота (радіус) меніска, що в свою чергу (згідно з формулою Лапласа (2)) спричиняє зростання тиску в рідині і збільшення її опору закриттю зазору. Тому для подальшого його закриття потрібно прикладати більше навантаження. Під час збільшення поверхневого натягу рідини зростає перепад тисків у рідині й газі (рис. 2*b*), що свідчить про підвищення тиску рідини (оскільки тиск газу фіксований) і, відповідно, збільшення абсолютного значення нормальних напружень на межі тіла, що контактує з рідиною.

З рис. 3*a* бачимо, що довжина ділянки з рідиною буде більшою за більшої кількості рідини в зазорі. Збільшення об’єму рідини в зазорі зумовлює зростання перепаду тисків у рідині й газі (рис. 3*b*), що за сталого тиску рідини свідчить про підвищення стискальних нормальних напружень на ділянці поверхні пружної півплощини, яка контактує з рідиною.

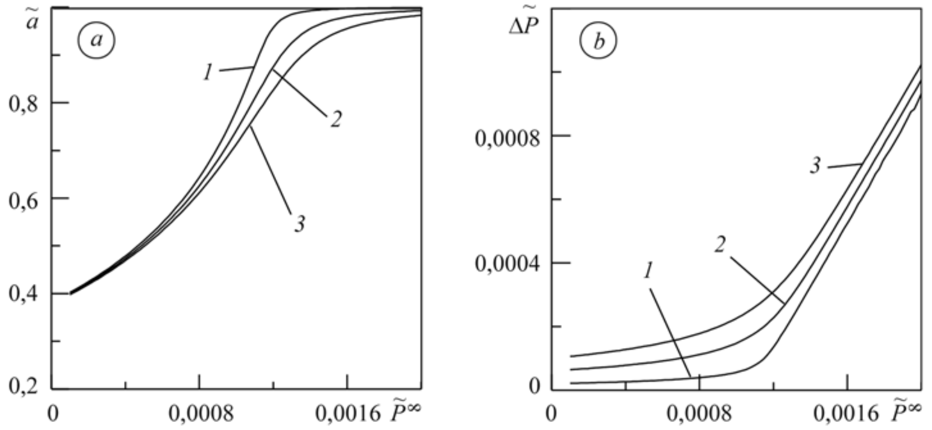

Рис. 2. Залежність довжини ділянки з рідиною (*a*) та перепаду тисків у рідині й газі (*b*) від зовнішнього навантаження для об'єму рідини $\tilde{V}_2 = 0{,}5$ за різних її поверхневих натягів: *1* – $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$; *2* – $3\cdot10^{-8}$; *3* – $5\cdot10^{-8}$.

Fig. 2. Dependence of the length of the region with liquid (*a*) and pressure jump in the liquid and gas (*b*) on loading for liquid volume $\tilde{V}_2 = 0.5$ in case of different surface tensions: *1* – $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$; *2* – $3\cdot10^{-8}$; *3* – $5\cdot10^{-8}$.

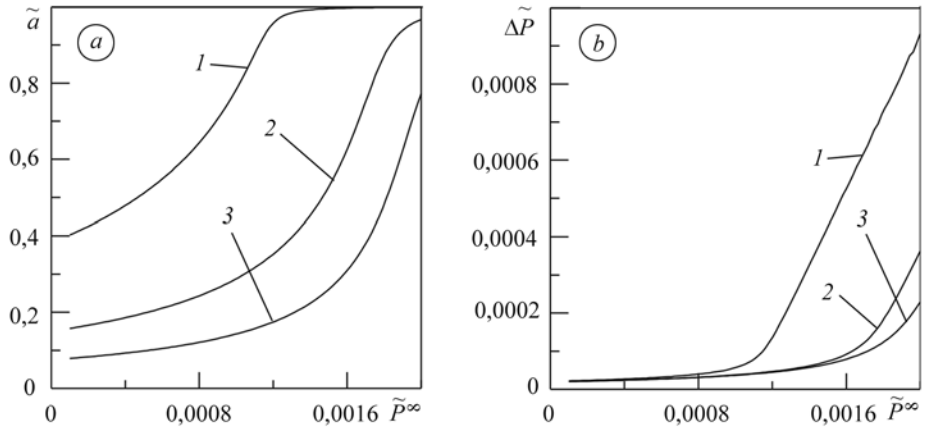

Рис. 3. Вплив кількості рідини в зазорі на залежність довжини ділянки з рідиною (*a*) та перепаду тисків у рідині й газі (*b*) від навантаження за поверхневого натягу рідини $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$: *1* – $\tilde{V}_2 = 1/2$; *2* – 1/5; *3* – 1/10.

Fig. 3. Influence of liquid volume in the gap on the dependence of the length of the region with liquid (*a*) and pressure jump in the liquid and gas (*b*) on loading in case of liquid surface tension $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$: *1* – $\tilde{V}_2 = 1/2$; *2* – 1/5; *3* – 1/10.

ВИСНОВКИ

Досліджено контактну взаємодію пружного тіла з жорсткою основою за наявності на ній еліптичної в перерізі виїмки, яка заповнена рідиною та газом. Рідина нестислива та не змочує поверхні тіл і, внаслідок дії поверхневого натягу, буде збиратися у ширшому місці зазору, тобто в центральній його частині. В іншій частині виїмки знаходиться газ під сталим тиском. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно висоти міжконтактного зазору та трансцендентного рівняння для знаходження довжини ділянки з рідиною. Проаналізовано вплив кількості рідини в зазорі та її поверхневого натягу на контактну поведінку системи. Встановлено, що під час підвищення зовнішнього тиску довжина ділянки контакту рідини з поверхнями тіл збільшується, але з її наближенням до краю виїмки це зростання значно сповільнюється. Під час збільшення об'єму рідини в зазорі та її поверхневого натягу зростає перепад тисків у рідині й газі, що свідчить про підвищення стискальних нормальних напружень на межі тіла, яке контактує з рідиною.

РЕЗЮМЕ. Исследовано контактное взаимодействие упругого тела с жестким основанием, имеющим поверхностную выемку, которая обусловливает зазор между телами. В центре зазора находится межповерхностный мостик несжимаемой несмачивающей жидкости, а на его краях – газ под постоянным давлением. С использованием метода функций межконтактных зазоров, задача сведена к сингулярному интегральному уравнению относительно высоты зазора, которое решено аналитически. Проанализировано зависимость длины участка с жидкостью и ее давления от нагрузки, количества жидкости и ее поверхностного натяжения.

*SUMMARY.*Contact interaction of the elastic half-space and a rigid substrate having a gap is investigated. The middle part of the gap contains non-wetting uncompressible liquid which forms a bridge, on its edges there is a gas at constant pressure. The solution of the problem is given by the function of the gap height and for its determination a singular integral equation, solved analytically is obtained. Dependence of the liquid region of the region with liquid and its pressure on loading, liquid volume and surface tension is analyzed.

1. *Zitzler L., Herminghaus S., and Mugele F.* Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy // Physical review. – 2002. – **B 66**. – P. 155436.
2. *Kobatake S., Kawakubo Y., and Suzuki S.* Laplace pressure measurement on laser textured thin-film disk // Tribology Int. – 2003. – **36**. – P. 329–333.
3. *Rennie A., Dickrell P., and Sawyer W.* Friction coefficient of soft contact lenses: measurements and modeling // Tribology Letters. – 2005. – **18**. – P. 499–504.
4. *Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю.* Контактирование упругих тел при наличии капиллярной адгезии // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, № 1. – С. 128–137.
5. *Zheng Jie and Streutor J. L.* A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // Tribology Letters. – 2004. – **16**, № 1–2. – P. 1–9.
6. *Kryshtafovych A. and Martynyak R.* Strength of a system of mated anisotropic half-planes with surface recesses // Int. J. Engng. Sci. – 2001. – **39**. – P. 403–413.
7. *Монастирський Б. Є.* Осесиметрична контактна задача для півпросторів з геометричним збуренням поверхні // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 6. – С. 22–27. (*Monastyrs'kyi B. Ye.* Axially symmetric contact problem for half-spaces with geometrically perturbed surface // Materials Science. – 1999. – **35**, № 6. – P. 777–782.)
8. *Монастирський Б. Є., Мартиняк Р. М.* Контакт двох півпросторів з кільцевою виїмкою на одному. Ч. 1. Сингулярне інтегральне рівняння // Там же. – 2003. – **39**, № 2. – С. 51–57. (*Monastyrs'kyi B., Martynyak R.* Contact of two half spaces one of which contains a ring-shaped pit. Part 1. Singular integral equation // Materials Science. – 2003. – **39**, № 2 – P. 206–213.)
9. *Shvets R. M., Martynyak R. M., and Kryshtafovych A. A.* Discontinuous contact of an anisotropic half-plane and a rigid base with disturbed surface // Int. J. Engng. Sci. – 1996. – **34**, № 2. – P. 183–200.
10. *Kubenko V. D.* Nonstationary Plane Elastic Contact Problem for Matched Cylindrical Surfaces // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, № 1. – P. 51–60.
11. *Kit G. S., Martynyak R., and Machishin I. M.* The effect of fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // Ibid. – 2003. – **39**, № 3. – P. 292–299.
12. *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.* Контакт пружних півпросторів за наявності між ними еліптичного зазору з рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 1. – С. 62–65. (*Martynyak R. M. and Slobodyan B. S.* Contact of elastic half spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid // Materials Science. – 2009. – **45**, № 1. – P. 66–71.)
13. *Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.* Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 1. Повний контакт // Там же. – 2005. – **41**, № 2. – С. 39–44.

(*Martynyak R. M., Malanchuk N. I. and Monastyrs'kyi B. E.* Shear of two half planes pressed to each other and containing a surface groove. P. 1. Full contact // Materials Science. – 2005. – **41**, № 2. – P. 178–185.)
14. *Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.* Зсув взаємопритиснутих півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 2. Неповний контакт // Там же. – 2006. – **42**, № 4. – С. 114–120.
(*Martynyak R. M., Malanchuk N. I. and Monastyrs'kyi B. E.* Shear of two half planes pressed to each other and containing a surface groove. P. 2. Incomplete contact // Materials Science. – 2006. – **42**, № 4. – P. 551–559.)
15. *Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.* Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2005. – **48**, № 3. – С. 101–109.
16. *Martynyak R. and Kryshtafovych A.* Friction contact of two elastic half-planes with local recesses in boundary // J. Friction and Wear. – 2000. – **21**, № 4. –P. 6–15.
17. *Martynyak R. and Kryshtafovych A.* Friction contact of two elastic half-planes with wavy surfaces // Ibid. – 2000. – **21**, № 5. – P. 1–8.
18. *Martynyak R. M.* The contact of a half-space and an uneven base in the presence of an intercontact gap filled by an ideal gas // J. Mathem. Sci. – 2001. – **107**, № 1. – P. 3680–3685.
19. *Мартиняк Р. М.* Механотермодифузійна взаємодія тіл з урахуванням заповнювача міжконтактних зазорів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 2. – С. 124–127.
(*Martynyak R. M.* Mechanothermodiffusion interaction of bodies with regard for the filler of intercontact gaps // Materials Science. – 2000. – **36**, № 2. – P. 300–304.)
20. *Martynyak R. M. and Chumak K. A.* Thermoelastic contact of half-spaces with equal thermal distortivities in the presence of a heat-permeable intersurface gap // J. Mathem. Sci. – 2010. – **165**, № 3. – P. 355–370.
21. *Martynyak R. M.* Instability of thermoelastic interaction between a half-space and a rigid base through a thin liquid layer // Ibid. – 2000. – **99**, № 5. – P. 1607–1615.
22. *Krishtafovich A. A. and Martynyak R. M.* Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, № 2. – P. 159–164.
23. *Krishtafovich A. A. and Martynyak R. M.* Thermoelastic contact of anisotropic half spaces with thermal resistance // Ibid. – 1998. – **34**, № 7. – P. 629–634.
24. *Мартиняк Р. М., Чумак К. А.* Термопружне розшарування тіл за наявності теплопроникного заповнювача міжконтактного просвіту // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 4. – С. 45–52.
(*Martynyak R. M., Chumak K. A.* Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // Materials Science. – 2009. – **45**, № 4. – P. 513–522.)
25. *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.* Взаємодія двох тіл за наявності капілярів у міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С. 164–173.
26. *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.* Вплив рідинних містків у міжповерхневому просвіті на контакт тіл із податливих матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів – 2008. – **44**, № 2. – С. 7–13.
(*Martynyak R. M. and Slobodyan B. S.* Influence of liquid bridges in the interface gap on the cotact of bodies made of compliant materials // Materials Science. – 2008. – **44**, № 2. – P. 147–155.)
27. *Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Моделювання взаємодії тіл з урахуванням поверхневого натягу рідини в міжконтактному просвіті // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2007. – **6**. – С. 19–29.
28. *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С., Зеленяк В. М.* Тиск пружного півпростору на жорстку основу з прямокутною виїмкою за наявності між ними рідинного містка // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 1. – С. 150–156.
(*Martynyak R. M., Slobodyan B. S., Zelenyak V. M.* Pressure of an elastic half space on a rigid base with rectangular hole in the case of a liquid bridge between them // J. Mathem. Sci. – 2009. – **160**, № 6. – P. 470–477.)
29. *Арцыбышев С. А.* Курс физики. Ч. 1. Механика и теплота. – М.: Гос. уч.-пед. изд-во М-ва просвещения РСФСР, 1951. – 672 с.
30. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – 648 с.

Одержано 17.06.2010