

УДК 539.3

## РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КУТОВИХ ВИРІЗІВ ЗА СКЛАДНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

М. П. САВРУК<sup>1,2</sup>, А. КАЗБЕРУК<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Білостоцька політехніка, Польща

Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв'язок плоскої задачі теорії пружності для площини з напівнескінченим кутовим закругленим вирізом за складного навантаження. На цій основі знайдено залежності між коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН) у вершині гострого кутового вирізу, максимальними напруженнями та їх градієнтом у вершині відповідного закругленого вирізу. Для обмежених тіл з кутовими вирізами отримані розв'язки є асимптотичними залежностями для малих радіусів закруглення їх вершин. Такі співвідношення можна використовувати в граничних переходах для знаходження КІН у вершинах гострих вирізів на основі розв'язків для відповідних закруглених концентраторів напружень. Ефективність методу проілюстровано на задачі про визначення КІН у вершинах прямокутного отвору в пружній площині.

**Ключові слова:** механіка руйнування, коефіцієнт інтенсивності напружень, кутовий виріз, прямокутний отвір, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

У механіці руйнування, поряд із задачами теорії тріщин, значну увагу приділяють вивченню процесів деформування та руйнування твердих тіл з кутовими вирізами. На сьогодні найбільш досліджено кутові вирізи за симетричного навантаження, коли максимальні напруження досягаються у вершині вирізу. Розроблено єдиний підхід до розв'язування такого класу задач [1–6], коли коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершині гострого вирізу знаходять на основі даних про концентрацію напружень у вершинах відповідних закруглених кутових вирізів (не дуже малого радіуса кривини), які можна отримати різними методами. Такий підхід узагальнено також на кутові вирізи за антисиметричного розподілу напружень [7]. Тоді максимальні напруження на контурі вирізу досягаються вже поза його вершиною, що ускладнює розв'язання задачі.

Нижче розроблено єдиний підхід до розв'язування плоских задач теорії пружності для тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами за складного напруженого стану, коли у вершині гострого вирізу відмінні від нуля обидва КІН. Побудовано залежності між КІН  $\tilde{K}_I^V$  і  $\tilde{K}_{II}^V$  у вершині гострого кутового вирізу, напруженнями та їх градієнтом на межовому контурі у вершині відповідного закругленого вирізу. Такі залежності для обмежених тіл мають асимптотичний характер, коли радіус кривини у вершині вирізу прямує до нуля, що можна використати для знаходження КІН у вершинах гострих вирізів на основі даних про напруження та його градієнт у вершині закругленого вирізу. Ефективність такого підходу проілюстровано на задачі про концентрацію напружень біля прямокутного отвору у нескінченній пластині під дією двовісного розтягу.

**Розподіл напружень біля гострого кутового вирізу.** Розглянемо пружну ізотропну площину з напівнескінченим гострим кутовим вирізом в умовах плос-

кої задачі теорії пружності (плоска деформація та плоский напружений стан). У вершині вирізу поле напружень має степеневі особливості з різними показниками для симетричного ( $\lambda_I$ ) та антисиметричного ( $\lambda_{II}$ ) розподілів напружень. Компоненти тензора сингулярних напружень у полярній системі координат в околі вершини вирізу можна подати у вигляді [8, 9]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_I} \Delta_1} \left[ \frac{2+\lambda_I}{2-\lambda_I} \cos(2-\lambda_I)\alpha \cos\lambda_I\theta + \cos\lambda_I\alpha \cos(2-\lambda_I)\theta \right] + \\
 &+ \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}} \Delta_2} \left[ (1+\lambda_{II}) \sin\lambda_{II}\alpha \sin(2-\lambda_{II})\theta + (2+\lambda_{II}) \sin(2-\lambda_{II})\alpha \sin\lambda_{II}\theta \right], \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_I} \Delta_1} \left[ \cos(2-\lambda_I)\alpha \cos\lambda_I\theta - \cos\lambda_I\alpha \cos(2-\lambda_I)\theta \right] + \\
 &+ \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}} \Delta_2} \left[ (\lambda_{II}-2) \sin\lambda_{II}\alpha \sin(2-\lambda_{II})\theta + (2-\lambda_{II}) \sin(2-\lambda_{II})\alpha \sin\lambda_{II}\theta \right], \\
 \tau_{r\theta} &= \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_I} \Delta_1} \left[ \frac{\lambda_I}{2-\lambda_I} \cos(2-\lambda_I)\alpha \sin\lambda_I\theta - \cos\lambda_I\alpha \sin(2-\lambda_I)\theta \right] + \\
 &+ \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}} \Delta_2} \left[ (2-\lambda_{II}) \sin\lambda_{II}\alpha \cos(2-\lambda_{II})\theta - \lambda_{II} \sin(2-\lambda_{II})\alpha \cos\lambda_{II}\theta \right],
 \end{aligned} \tag{1}$$

де  $\alpha = \pi - \beta$ ;  $2\beta$  ( $0 \leq 2\beta < \pi$ ) – кут розхилу вирізу (рис. 1а);  $\Delta_1 = \cos(2-\lambda_I)\alpha - \cos\lambda_I\alpha$ ,  $\Delta_2 = (2-\lambda_{II}) \sin\lambda_{II}\alpha - \lambda_{II} \sin(2-\lambda_{II})\alpha$ ; параметри  $\lambda_I$  ( $0 < \lambda_I \leq 1$ ) і  $\lambda_{II}$  ( $0 < \lambda_{II} \leq 1$ ) – корені характеристичних рівнянь

$$(1-\lambda_I) \sin 2\alpha + \sin 2(1-\lambda_I)\alpha = 0, \quad (1-\lambda_{II}) \sin 2\alpha - \sin 2(1-\lambda_{II})\alpha = 0.$$

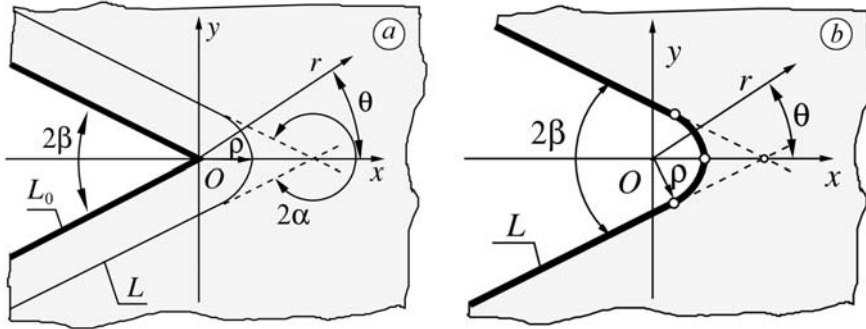


Рис. 1. Гострий (а) та закруглений (б) кутові вирізи у пружній площині.

Fig. 1. Sharp (a) and rounded (b) V-notches in an elastic plane.

Для визначення параметрів  $\lambda_I$  та  $\lambda_{II}$  можна користуватися апроксимувальними формулами [5]

$$\lambda_I \approx 1,247 \cos\beta - 1,312 \cos^2\beta + 0,8532 \cos^3\beta - 0,2882 \cos^4\beta, \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2,$$

$$\lambda_{II} \approx 0,5 - 0,3134 \operatorname{tg}\beta - 0,2479 \operatorname{tg}^2\beta + 0,1937 \operatorname{tg}^3\beta - 0,0410 \operatorname{tg}^4\beta, \quad 0 \leq \beta \leq \beta^*,$$

максимальна абсолютна похибка яких не перевищує 0,001. Тут  $\beta^* = 0,8945$  ( $51,2733^\circ$ ) – корінь рівняння  $\operatorname{tg}2(\pi - \beta) = 2(\pi - \beta)$ , який визначає граничне значення кута  $\beta$ , коли напруження за антисиметричного розподілу мають особливість у вершині вирізу.

Величини  $\tilde{K}_I^V$  та  $\tilde{K}_{II}^V$  називають узагальненими КІН у вершині кутового вирізу для симетричного та антисиметричного розподілів напружень відповідно. Вони визначають розподіл напружень в околі вершини гострого кутового вирізу. КІН  $\tilde{K}_I^V$  та  $\tilde{K}_{II}^V$  можна виразити через напруження за допомогою співвідношень

$$\tilde{K}_I^V = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ (2\pi r)^{\lambda_I} \sigma_{\theta\theta}(r, 0) \right], \quad \tilde{K}_{II}^V = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ (2\pi r)^{\lambda_{II}} \tau_{r\theta}(r, 0) \right].$$

Зауважимо, що КІН в околі вершини вирізу також називають дещо інші величини [10]:

$$K_I^V = (2\pi)^{1/2-\lambda_I} \tilde{K}_I^V, \quad K_{II}^V = (2\pi)^{1/2-\lambda_{II}} \tilde{K}_{II}^V.$$

Сингулярному розподілу напружень (1) відповідає власний розв'язок крайової задачі для клина, який через комплексні потенціали напружень Колосова–Мухелішвілі [11] можна подати у вигляді [12]

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi z)^{\lambda_I}} \frac{\sin(2\alpha)}{(\lambda_I - 2)\sin(2\alpha) + \sin(2\lambda_I\alpha)} + \frac{i\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi z)^{\lambda_{II}}} \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\lambda_{II}\alpha - \lambda_{II} \sin 2\alpha}, \\ \Psi_0(z) &= \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi z)^{\lambda_I}} \frac{\sin(2\lambda\alpha)}{(\lambda_I - 2)\sin(2\alpha) + \sin(2\lambda_I\alpha)} + \frac{i\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi z)^{\lambda_{II}}} \frac{\sin 2\lambda_{II}\alpha}{\sin 2\lambda_{II}\alpha - \lambda_{II} \sin 2\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

Співвідношення (2) дають розв'язок однорідної сингулярної задачі теорії пружності для клина з кутом розхилу  $2\alpha > \pi$  [13] за складного напруженого стану. Вони служать асимптотикою на нескінченності розв'язків різних однорідних сингулярних крайових задач для клиноподібних областей.

**Кутувий закруглений виріз.** Розглянемо напівнескінченний кутувий закруглений виріз у пружній ізотропній площині (рис. 1b). Вважатимемо, що межа пружної області вільна від навантаження, а на нескінченності поле напружень має асимптотику (1), тобто описується комплексними потенціалами (2). Цю задачу можна інтерпретувати також в дещо інший спосіб. У пружному клині, напружено-деформований стан якого описують комплексні потенціали (2), зроблений розріз вздовж контуру  $L$  (рис. 1a). Треба знайти збурений напружений стан у пружній площині (або клині), послабленій кутувим закругленим вирізом з межовим контуром  $L$ . Оскільки пружна область симетрична відносно осі  $Ox$ , то задачу можна розбити на дві: симетричну [1] та антисиметричну [7]. Їх розв'язки знайдено методом сингулярних інтегральних рівнянь [14] для контуру вирізу, рівняння якого в параметричній формі можна подати у вигляді

$$t = \rho\omega(\xi), \quad -1 < \xi < 1,$$

де  $\rho$  – радіус кривини у вершині вирізу;  $t = x + iy \in L$ .

Числові результати отримано для кутового закругленого вирізу (гладкий контур  $L$  складається з двох променів і дуги кола радіуса  $\rho$  у вершині), коли

$$\omega(\xi) = e^{i\xi\alpha} \begin{cases} -1/\sin(\xi\alpha - \beta), & -1 < \xi < -\xi_B, \\ 1, & -\xi_B \leq \xi \leq \xi_B = (\pi/2 - \beta)/\alpha, \\ 1/\sin(\xi\alpha + \beta), & \xi_B < \xi < 1, \end{cases}$$

та гіперболічного контуру [12]:

$$\omega(\xi) = e^{-i\xi\alpha} \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos\xi\alpha}, \quad -1 < \xi < 1.$$

Тангенціальні нормальні напруження на контурі вирізу  $L$  можна подати у вигляді

$$\sigma_s(\theta) = \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi\rho)^{\lambda_I}} R_I(\theta, \beta) + \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi\rho)^{\lambda_{II}}} R_{II}(\theta, \beta), \quad (3)$$

де  $R_I(\theta, \beta) = R_I(-\theta, \beta) = R_I(\theta)$  (рис. 2а, б) і  $R_{II}(\theta, \beta) = -R_{II}(-\theta, \beta) = R_{II}(\theta)$  (рис. 2с, д) – безрозмірні напруження за симетричного та антисиметричного розподілів відповідно. З подання (3) випливає твердження, що КІН  $\tilde{K}_I^V$  та  $\tilde{K}_{II}^V$  визначають розподіл напружень у пружному тілі, послабленому відповідним гладким криволінійним вирізом для малих відносних радіусів закруглення його вершини.

Порівнюючи наведені дані для кутового закругленого та гіперболічного вирізів для таких самих радіусів кривини  $\rho$  у вершині та однакових кутів розхилу  $2\beta$ , можна зробити висновок про значну різницю між ними за антисиметричного розподілу. Екстремальні значення напружень в обох випадках (рис. 2с, д) відрізняються більше ніж у два рази. За симетричного навантаження (рис. 2а, б) відносна різниця максимальних напружень у вершинах вирізів не перевищує 15%. Зазначимо, що наведений розв'язок для гіперболічного вирізу добре узгоджується з відомими даними [12], отриманими методом інтегральних рівнянь Шермана-Лаурічелли [11].

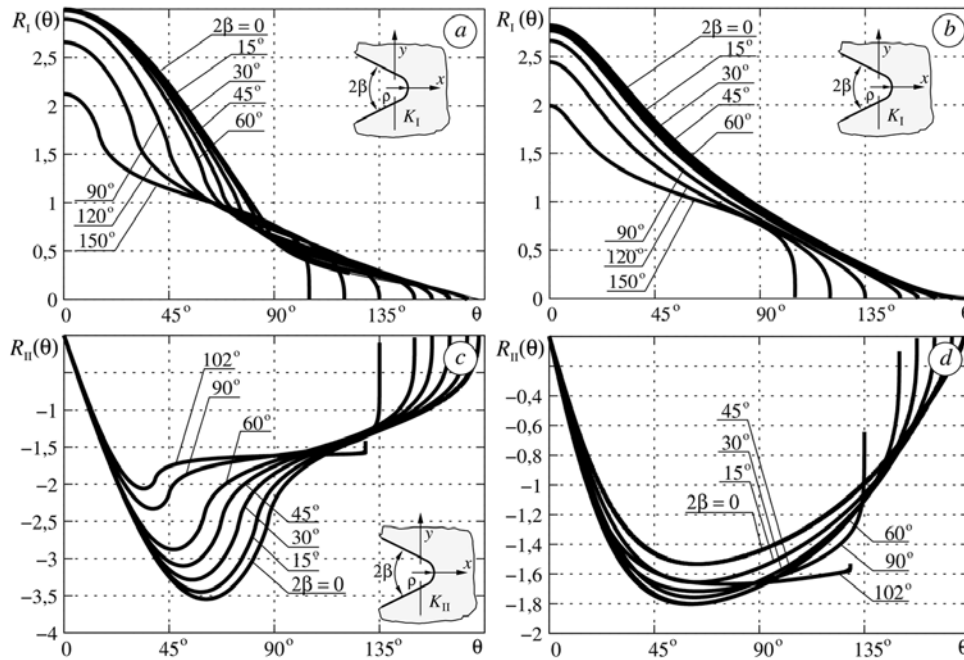


Рис. 2. Розподіл безрозмірних напружень  $R_I(\theta)$  (а, б) та  $R_{II}(\theta)$  (с, д) вздовж контуру  $L$  для кутового закругленого (а, с) і гіперболічного (б, д) вирізів.

Fig. 2. Distribution of dimensionless stresses,  $R_I(\theta)$ , (а, б) and  $R_{II}(\theta)$ , (с, д) along contour  $L$  for a rounded V-notch (а, с) and a hyperbolic notch (б, д).

Таким чином, форма контуру вирізу в околі його вершини значно впливає на розподіл напружень. Тому актуально вивчити концентрацію напружень біля кутових закруглених вирізів як найбільш реальних (клин з прямолінійними гранями закруглений у вершині дугою кола). Переваги такого підходу очевидні, коли отримані результати використовують як асимптотичні розв'язки для малих відносних радіусів закруглення вершини кутового вирізу в обмежених тілах.

Надалі обмежимося розглядом закругленого кутового вирізу. Наведемо апроксимувальні формули для безрозмірних напружень  $R_I(\theta)$  та  $R_{II}(\theta)$  на про-

міжку  $0 \leq \theta \leq \theta^*$ , на якому напруження  $\sigma_s(\theta)$  набуває максимального значення за складного напруженого стану ( $\tilde{K}_I^V \neq 0, \tilde{K}_{II}^V \neq 0$ ):

$$R_I(\theta) = a_I + b_I \theta^2 + c_I \theta^4, R_{II}(\theta) = a_{II} \theta + b_{II} \theta^3 + c_{II} \theta^5, 0 \leq \theta \leq \theta^*. \quad (4)$$

Тут  $\theta^*$  – кут, в якому напруження  $\sigma_s(\theta)$  досягають екстремального значення, коли  $\tilde{K}_I^V = 0$ . Коефіцієнти  $a_{I,II}, b_{I,II}, c_{I,II}$  можна подати в аналітичній формі, використовуючи значення безрозмірних напружень  $R_I(\theta)$  і  $R_{II}(\theta)$  та їх похідних у вершині вирізу ( $\theta = 0$ ) та в точці  $\theta = \theta^*$ :

$$\begin{aligned} a_I = R_I, b_I = \frac{-4R_I + 4R_I^* - R_I' \theta^*}{2\theta^{*2}}, c_I = \frac{2R_I - 2R_I^* + R_I' \theta^*}{2\theta^{*4}}, \\ R_I = R_I(0), R_I^* = R_I(\theta^*), R_I' = dR_I(\theta)/d\theta|_{\theta=0^*}; \\ a_{II} = R_{II}', b_{II} = \frac{5R_{II}^* - 4R_{II}' \theta^*}{2\theta^{*3}}, c_{II} = \frac{-3R_{II}^* + 2R_{II}' \theta^*}{2\theta^{*5}}, \\ R_{II}' = dR_{II}(\theta)/d\theta|_{\theta=0}, R_{II}^* = R_{II} = R_{II}(\theta^*). \end{aligned} \quad (5)$$

Для вжитих тут параметрів запишемо апроксимувальні формули

$$\begin{aligned} \theta^* &= 2,081 - \exp(0,445\beta), \\ R_I &= 2,993 + 0,1810\beta^2 - 0,3694\beta^3 - 0,08291\beta^5, \\ R_I^* &= 1,668 + 0,7049\beta - 0,3286\beta^2 - 0,09378\beta^5, \\ R_I' &= -2,004 - 0,297\beta - 0,7830\beta^2 - 0,3101\beta^5, 0 \leq \beta \leq \pi; \\ R_{II}^* &= R_{II} = 4,467 - 0,875 \exp(1,137\beta), \\ R_{II}' &= 5,234 \exp(0,137\beta) - 0,051 \exp(3,114\beta), 0 \leq \beta \leq \beta^*, \end{aligned} \quad (6)$$

відносна похибка яких не перевищує 0,5%.

Положення точок  $\theta_{\max}$  (рис. 3a), де досягаються максимальні напруження  $R(\gamma) = \sigma_s(\theta_{\max})$  (рис. 3b), залежать від параметра  $\gamma = \rho^{\lambda_I - \lambda_{II}} K_{II}^V / K_I^V$ . На основі залежності (3) для кута  $\theta_{\max}$  отримуємо наближену формулу

$$\theta_{\max}(\gamma) = \theta^* \left\{ 1 + \text{th} [0,5822 \ln(\gamma) + 0,6222] \right\} / 2, \quad 0 \leq \gamma < \infty. \quad (7)$$

Відповідні максимальні значення тангенціальних напружень на контурі вирізу знайдемо за формулою (3), поклавши  $\theta = \theta_{\max}$ .

Отримані розв'язки сингулярної крайової задачі для напівнескінченного закругленого кутового вирізу можна використовувати як асимптотичні залежності для обмежених тіл з кутовими вирізами-отворами, коли відносні радіуси закруглення їх вершин є малі. Знаючи КІН  $\tilde{K}_I^V$  та  $\tilde{K}_{II}^V$ , за співвідношеннями (3)–(7) легко дослідити концентрацію напружень в околі вершини вирізу малого радіуса кривини якраз тоді, коли знайти числовий розв'язок надто складно. З іншого боку, побудовані залежності можна також використати для знаходження КІН у гострих вершинах кутових вирізів на основі розв'язків для відповідних закруглених вирізів за допомогою граничних переходів:

$$\tilde{K}_I^V = \frac{1}{R_I} \lim_{\rho \rightarrow 0} [(2\pi\rho)^{\lambda_I} \sigma_s(0)], \quad \tilde{K}_{II}^V = \frac{1}{R_{II}'} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ (2\pi\rho)^{\lambda_{II}} \frac{d\sigma_s(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \right]. \quad (8)$$

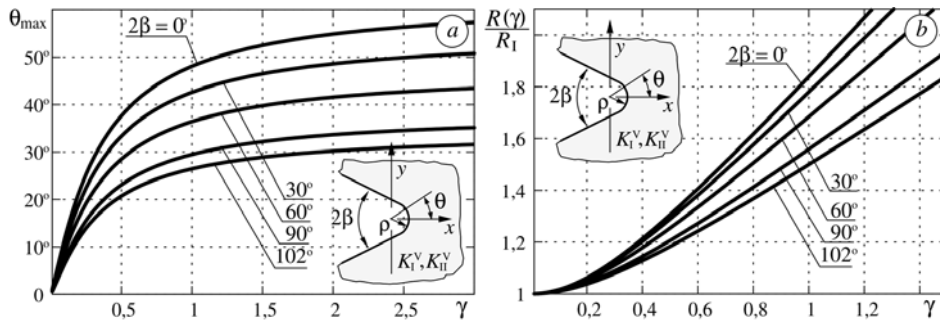


Рис. 3. Залежності кута  $\theta_{\max}$  (a) і відносного максимального напруження  $R(\gamma)/R_1$  (b) від параметра  $\gamma$  для різних кутів розхилу  $2\beta$ .

Fig. 3. Dependences of angle  $\theta_{\max}$  (a) and relative maximal stress,  $R(\gamma)/R_1$  (b), on parameter  $\gamma$  for different vertex angles,  $2\beta$ .

Застосування цього підходу проілюструємо на задачі про прямокутний отвір у пружній площині.

**Прямокутний отвір у пружній площині.** Розглянемо задачу про напружений стан пружної площини, послабленої прямокутним отвором із закругленими вершинами. Вважатимемо, що край отвору (контур  $L$ ) вільний від навантаження, а на нескінченності задано розтягувальні напруження  $\sigma_y^\infty = p$  і  $\sigma_x^\infty = q$  (рис. 4).

Задачу розв'язуватимемо методом суперпозиції. Запишемо комплексні потенціали напружень Колосова–Мусхелішвілі у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_*(z),$$

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_*(z),$$

де потенціали

$$\Phi_0(z) = (p + q)/4,$$

$$\Psi_0(z) = (p - q)/2$$

описують однорідне поле напружень у суцільній площині, а функції  $\Phi_*(z)$  і  $\Psi_*(z)$  визначають збурений напружений стан, викликаний отвором. Ці функції візьмемо у вигляді [14]

$$\Phi_*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-z} dt, \quad \Psi_*(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[ \frac{g'(t)}{t-z} \overline{dt} - \frac{\overline{t}g'(t)}{(t-z)^2} dt \right].$$

Задовольнивши для цих потенціалів крайову умову

$$\sigma_n^* + i\tau_{ns}^* = p(t) = - \left\{ \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[ t\overline{\Phi_0'(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] \right\}, \quad t \in L,$$

прийдемо до сингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_L \left[ K(t,t')g'(t)dt + L(t,t')\overline{g'(t)}\overline{dt} \right] = p(t'), \quad t' \in L, \quad (9)$$

ядра якого виражають залежності

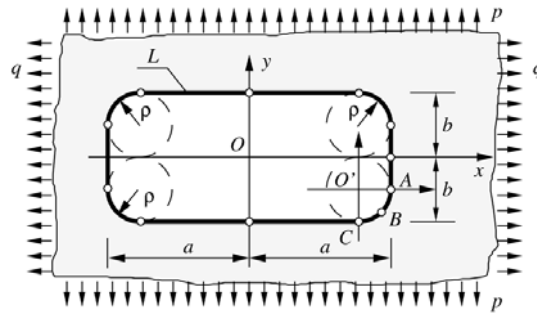


Рис. 4. Прямокутний отвір із закругленими вершинами у пружній площині.

Fig. 4. A rectangular hole with rounded vertexes in an elastic plane.

$$\begin{aligned}
K(t, t') &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{t-t'} + \frac{\overline{dt'}}{dt'} \left[ \frac{1}{\bar{t}-\bar{t}'} - \frac{\bar{t}}{(\bar{t}')^2} \right] \right\} + \frac{1}{l} \frac{ds'}{dt'}, \\
L(t, t') &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\bar{t}-\bar{t}'} - \frac{\overline{dt'}}{dt'} \left[ \frac{t-t'}{(\bar{t}-\bar{t}')^2} - \frac{t}{(\bar{t}')^2} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{10}$$

У формулах (10) додано регуляризаційні доданки [14]

$$-\frac{1}{2} \frac{\overline{dt'}}{dt'} \frac{\bar{t}}{(\bar{t}')^2} + \frac{1}{l} \frac{ds'}{dt'}, \quad + \frac{1}{2} \frac{\overline{dt'}}{dt'} \frac{\bar{t}}{(\bar{t}')^2}$$

( $s'$  – дугова абсциса точки  $t'$  на контурі  $L$ ,  $l$  – довільний параметр розмірності довжини), які забезпечують існування єдиного розв'язку інтегрального рівняння (9) для довільної правої частини.

Запишемо параметричне рівняння контуру  $L$  у вигляді

$$t = l\omega(\xi), \quad 0 \leq \xi < 2\pi.$$

Уважатимемо, що  $2a$  і  $2b$  – проєкції отвору на осі  $Ox$  і  $Oy$ , а  $\rho$  – радіус закруглення його вершин. У вершині отвору введемо локальну полярну систему координат з полюсом у точці  $O'$  та полярною віссю вздовж діагоналі кутової вершини (рис. 4). За основний параметр довжини приймемо  $l = b$ . Запишемо функцію  $\omega(\xi)$  у четвертій чверті системи координат  $Ox$ :

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \tilde{\gamma} - ic\xi, & 0 \leq \xi \leq \xi_A, \\ (\tilde{\gamma} - \varepsilon) + \varepsilon \cos \varphi - i[(1 - \varepsilon) + \varepsilon \sin \varphi], & \xi_A \leq \xi \leq \xi_C, \\ (\tilde{\gamma} - \varepsilon) - c(\xi - \xi_C) - i, & \xi_C \leq \xi \leq \pi/2, \end{cases}$$

де  $\varepsilon = \rho/l = \rho/b$  ( $0 < \varepsilon \leq 1$ ) – відносний радіус закруглення вершин;  $\xi_A = (1 - \varepsilon)/c$ ,  $\xi_B = \xi_A + \pi\varepsilon/(4c)$ ,  $\xi_C = \xi_A + \pi\varepsilon/(2c)$  – координати точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  (рис. 4);  $\tilde{\gamma} = a/b$  ( $\varepsilon \leq \tilde{\gamma} < \infty$ );  $\varphi = c(\xi - \xi_A)/\varepsilon$ ,  $c = \varepsilon + 2[(1 - \varepsilon) + (\tilde{\gamma} - \varepsilon)\varepsilon]/\pi$ .

Зробивши заміну змінних  $t = l\omega(\xi)$  ( $0 \leq \xi \leq 2\pi$ ),  $t' = l\omega(\eta)$  ( $0 \leq \eta \leq 2\pi$ ), прийдемо до канонічного вигляду інтегрального рівняння:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [M(\xi, \eta)u(\xi) + N(\xi, \eta)\overline{u(\xi)}]d\xi = p(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \tag{11}$$

де  $M(\xi, \eta) = lK(l\omega(\xi), l\omega(\eta))\omega'(\xi)$ ,  $N(\xi, \eta) = lL(l\omega(\xi), l\omega(\eta))\overline{\omega'(\xi)}$ ;  $u(\xi) = g'(l\omega(\xi))$ ,  $p(\eta) = p(l\omega(\eta))$ .

Шукану  $2\pi$ -періодичну неперервну функцію  $u(\xi)$  знайдемо, розв'язавши методом квадратур сингулярне інтегральне рівняння (11) [6, 14]. Нормальне напруження на контурі отвору  $\sigma_s(\xi)$  (за відсутності навантаження на ньому) визначимо безпосередньо через функцію  $u(\xi)$  [15]:

$$\sigma_s(\xi) = -4 \operatorname{Im}[u(\xi)/\omega'(\xi)].$$

Знайшовши напруження  $\sigma_s(\xi)$  для малих радіусів кривини у вершинах отвору, за допомогою граничного переходу на підставі залежностей (8) отримаємо КІН у гострих вершинах прямокутного отвору. Безрозмірні КІН наведено на рис. 5 для трьох видів зовнішнього навантаження. У разі квадратного отвору ( $a = b$ ) і всебічного розтягу ( $p = q$ ) обчислені результати добре узгоджуються з раніше опублікованими [16, 17].

Маючи КІН у гострих вершинах отвору, за формулами (7) і (3) для отвору із закругленими вершинами малого відносного радіуса  $\varepsilon = \rho/b$  легко знайти кут  $\theta_{\max}$ , за якого напруження  $\sigma_s(\xi)$  досягає максимального значення  $\sigma_{\max}$ . За од-

новісного розтягу ( $q = 0$ ) для трьох значень відношення сторін прямокутника  $a/b$  у проміжку  $0,001 \leq \varepsilon \leq 1$  обчислено кути  $\theta_{\max}$  та відносні максимальні напруження  $\sigma_{\max}/p$  (рис. 6, суцільні лінії) і порівняно їх з асимптотичними значеннями, знайденими за формулами (7) і (3) (штрихові лінії). У діапазоні  $0 < \varepsilon \leq 0,1$  обчислені та асимптотичні результати практично збігаються. Їх відносна різниця не перевищує 0,3%.

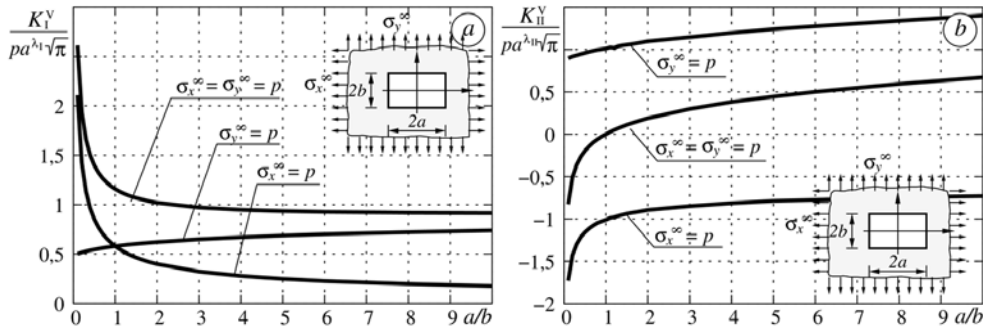


Рис. 5. Залежності безрозмірних КІН у вершинах прямокутного отвору від відношення його сторін  $a/b$ .

Fig. 5. Dependences of dimensionless stress intensity factors at vertexes of a rectangular hole on its sides ratio  $a/b$ .

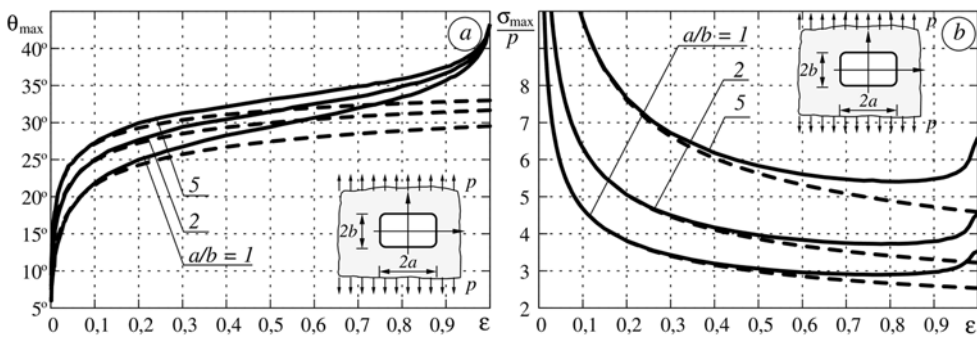


Рис. 6. Порівняння обчислених (суцільні криві) і асимптотичних (штрихові) значень кута  $\theta_{\max}$  (а) та відносних максимальних напружень  $\sigma_{\max}/p$  (б) на контурі прямокутного отвору із закругленими вершинами.

Fig. 6. Comparison of calculated (solid curves) and asymptotic (dashed-line curves) values of angle  $\theta_{\max}$  (a) and relative maximal stresses,  $\sigma_{\max}/p$ , (b) on the contour of a rectangular hole with rounded vertices.

Треба зазначити, що задачу про концентрацію напружень біля прямокутного отвору вже раніше розглядали методом конформних відображень багато дослідників [18, 19]. Проте такий підхід не дає змоги [2] розв'язати задачу для малих радіусів закруглення вершин отворів та зробити граничний перехід до отвору з гострими вершинами. Для її розв'язання також застосовували [20] метод інтегральних рівнянь, однак у вершині отвору враховували лише одну особливість вищого порядку.

Для одновісного розтягу ( $\sigma_y^\infty = p, \sigma_x^\infty = 0$ ) розширимо діапазон зміни відношення сторін  $a/b$ , щоб отримати безрозмірні КІН  $F_I^V = K_I^V b^{1/2-\lambda_1} / (p\sqrt{\pi a})$ ,  $F_{II}^V = K_{II}^V b^{1/2-\lambda_{II}} / (p\sqrt{\pi a})$  (рис. 7) для видовженого прямокутного отвору. Зі збільшенням цього відношення прямокутний отвір наближається до фізичної щі-



лини зі скінченною шириною  $2b$ , а величини  $F_I^V$  і  $F_{II}^V$  асимптотично прямують до певних граничних значень. У результаті отримуємо розв'язок сингулярної крайової задачі для напівнескінченного прямокутного вирізу:

$$K_I^V = K_I F_{I1} b^{\lambda_I - 1/2}, \quad K_{II}^V = K_I F_{II} b^{\lambda_{II} - 1/2}, \quad F_{I1} = 0,73, \quad F_{II} = 0,39, \quad (12)$$

де  $K_I$  – КІН для відповідної тріщини ( $b = 0$ ).

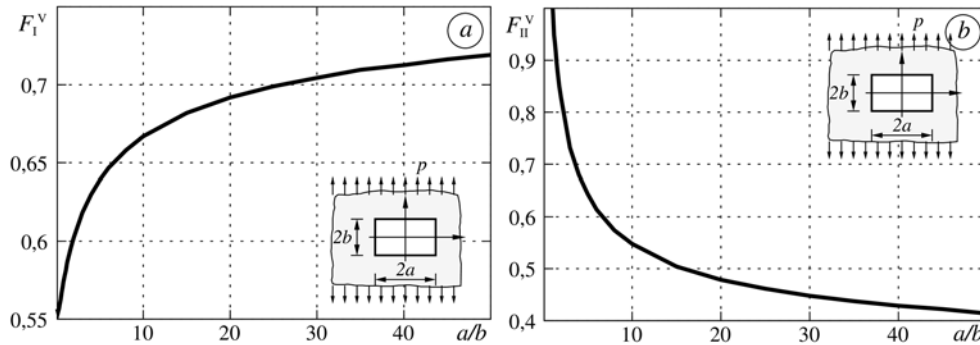


Рис. 7. Безрозмірні КІН  $F_I^V$  (a) і  $F_{II}^V$  (b) у вершинах вузького прямокутного отвору.

Fig. 7. Dimensionless stress intensity factors,  $F_I^V$ , (a) and,  $F_{II}^V$ , (b) at vertexes of a narrow rectangular hole.

Розв'язок (12) дає загальний зв'язок між КІН у вершинах вузького прямокутного вирізу (отвору) та КІН  $K_I$  для відповідної тріщини. Зазначимо, що спробу розв'язати цю задачу методом конформних відображень зроблено раніше [21], однак залежностей типу (12) не вдалося отримати.

### ВИСНОВКИ

Розроблено єдиний підхід до проблеми концентрації напружень біля гострих та закруглених кутових вирізів у пружних тілах за складного напруженого стану. Запропоновано залежності (у вигляді аналітичних апроксимувальних формул), які дають змогу оцінити розподіл напружень на контурі отвору, коли відомі КІН для симетричного та антисиметричного напружених станів. Ці залежності можна інтерпретувати як асимптотичні розв'язки для скінченних тіл з вирізами малого радіуса закруглення. Як ілюстрацію можливостей підходу наведено приклад обчислення КІН у вершинах прямокутного отвору в розтягненій пружній площині. У граничному випадку знайдено розв'язок сингулярної крайової задачі для напівнескінченного прямокутного вирізу.

**РЕЗЮМЕ.** Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано рішення плоскої задачі теорії еластості для площини з полубесконечним кутовим закругленим вирізом при складному напруженні. На цій основі знайдені залежності між коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН) у вершині острого кутового вирізу, максимальними напруженнями і їх градієнтом у вершині відповідного закругленого вирізу. Для обмежених тіл з кутовими вирізами отримані рішення є асимптотичними залежностями для малих радіусів закруглення їх вершин. Такі співвідношення можна використовувати в граничних переходах для визначення КІН у вершинах острих вирізів на основі рішень для відповідних закруглених концентраторів напружень. Ефективність методу проілюстровано на задачі об визначенні КІН у вершинах прямокутного отвору в упругій площині.

**SUMMARY.** The solution of the elastostatic problem for a plane with a semi-infinite rounded V-notch under mixed-mode loading was obtained by means of singular integral equation method. Based on this solution, the relationships between the stress intensity factor at the sharp V-notch vertex, maximum stresses and their gradients in the vertex of the corresponding rounded

ded notch were found. For finite bodies with V-notches the resulting solutions are asymptotic dependences for small rounded radii of the vertices. The presented relationships can be used for performing the limit transition to find the stress intensity factors at the vertices of sharp V-notches, based on the solutions for the corresponding rounded stress concentrators. The effectiveness of the method used was illustrated by the problem on determining the stress intensity factors at the vertices of a rectangular hole in the elastic plane.

1. *Саврук М. П., Казберук А.* Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих і закруглених кутових вирізів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 6. – С. 17–26.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches // *Mater. Sci.* – 2006. – **42**, № 6. – P. 725–738.)
2. *Саврук М. П., Казберук А.* Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 70–87.
3. *Саврук М. П., Казберук А.* Плоска періодична крайова задача теорії пружності для півплощини з криволінійним краєм // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 4. – С. 5–12.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Plane periodic boundary-value problem of elasticity theory for a half-plane with curvilinear edge // *Mater. Sci.* – 2008. – **44**, № 4. – P. 461–470.)
4. *Саврук М. П., Казберук А.* Напруження у пружній площині з періодичною системою близько розміщених отворів // Там же. – 2009. – **45**, № 6. – С. 70–81.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stresses in an elastic plane with periodic system of closely located holes // *Mater. Sci.* – 2009. – **45**, № 6. – P. 831–844.)
5. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Two-dimensional fracture mechanics problems for solids with sharp and rounded V-notches // *Int. J. Fract.* – 2010. – **161**, № 1. – P. 79–95.
6. *Kazberuk A.* Dwuwymiarowe zagadnienia mechaniki pękania ciał z korbami. – Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, 2010. – 242 s.
7. *Саврук М. П., Казберук А.* Антисиметричний розподіл напружень у пружному тілі з гострим та закругленим кутовим вирізом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 6. – С. 5–15.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Antisymmetric stress distribution in an elastic body with a sharp or a rounded V-shaped notch // *Mater. Sci.* – 2010. – **46**, № 6. – P. 711–722.)
8. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech.* – 1952. – **19**, № 4. – P. 526–530.
9. *Seweryn A. and Molski K.* Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions // *Eng. Fract. Mech.* – 1996. – **55**, № 4. – P. 529–556.
10. *Gross B. and Mendelson A.* Plane elastostatic analysis of V-notched plates // *Int. J. Fract. Mech.* – 1972. – **8**, № 3. – P. 267–276.
11. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
12. *Benthem J. P.* Stresses in the region of rounded corners // *Int. J. Solids Struct.* – 1987. – **23**, № 2. – P. 239–252.
13. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
14. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
15. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
16. *Noda N. A., Oda K., and Inoue T.* Analysis of newly-defined stress intensity factors for angular corners using singular integral equations of the body force method // *Int. J. Fract.* – 1996. – **76**. – P. 243–261.
17. *Кравець В. С.* Дослідження напруженого стану нескінченної пластини з квадратним отвором // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – Львів: Каменяр, 2002. – **5**. – С. 95–105.
18. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
19. *Pilkey W. D. and Pilkey D. F.* Peterson's Stress Concentration Factors. – New York: Wiley, 2008. – 569 p.
20. *Gecit M. R.* An integral equation approach for simultaneous solution of rectangular hole and rectangular block problems // *Int. J. Eng. Sci.* – 1983. – **21**, № 9. – P. 1041–1051.
21. *Кулиев В. Д.* Сингулярная задача теории упругости для полубесконечного прямоугольного выреза // Прикл. математика и механика. – 1980. – **44**, № 5. – С. 952–957.

Одержано 25.07.2011