

УДК 539.3

ДИСТАНЦІЙНЕ ВИЗНАЧЕННЯ МЕХАНІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ТОНКИХ ПЛОСКИХ ВКЛЮЧЕНЬ НИЗЬКОЇ КОНТРАСТНОСТІ

Я. І. КУНЕЦЬ¹, В. В. МАТУС¹, М. Д. ГРИЛИЦЬКИЙ²

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

² Львівська філія Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна

Запропоновано алгоритм дистанційного визначення фізико-механічних параметрів тонких плоских просторових пружних включень змінної товщини. Встановлено також орієнтацію включень у пружній матриці. Механічні властивості неоднорідності та матриці незначно відрізняються між собою порівняно з малою товщиною включення. Дефект зондовано пружними поздовжніми хвилями, а шукані параметри визначено за амплітудами розсіяння цих хвиль у зону Фраунгофера.

Ключові слова: *обернена задача розсіяння, тонкостінні пружні неоднорідності, включення низької контрастності.*

Обернені задачі динамічної теорії пружності – знаходження механічних та геометричних параметрів тонкостінних пружних включень за даними розсіяння хвиль у дальню зону – досліджувались раніше, в основному, у двовимірних формулюваннях. При цьому розглядалися неоднорідності великої або малої жорсткості за умов їх ідеального механічного контакту з матрицею [1, 2]. Алгоритми розв'язання споріднених обернених задач дистанційного визначення геометричних параметрів тріщин та напружено-деформованого стану поблизу них запропоновано в працях [1, 3–5]. Необхідною складовою підходів до розв'язання обернених задач розсіяння є аналіз відповідних прямих задач. У зв'язку з цим слід згадати праці [6–11], в яких подані методи дослідження задач розсіяння пружних хвиль тріщинами та тонкими пружними включеннями різної жорсткості.

Важливими у технічних застосуваннях, зокрема під час розробки новітніх засобів ультразвукової діагностики та неруйнівного контролю, є тонкі неоднорідності низької контрастності, коли пружні властивості включення та матриці незначно відрізняються між собою порівняно з малим параметром, що характеризує відносну товщину дефекту. Поява таких дефектів у пружному матеріалі може свідчити про його передруйнівний стан. Нижче запропоновано алгоритм ідентифікації матеріалу тонкостінної пружної мало-контрастної плоскої просторової неоднорідності змінної товщини, що знаходиться в пружній матриці в умовах ідеального механічного контакту, за амплітудами розсіяння поздовжніх хвиль у зону Фраунгофера. За подібного припущення і поздовжнього зсуву пружної системи обернена задача розсіяння розглянута в праці [12].

Формулювання задачі. Нехай в однорідному пружному необмеженому середовищі з модулями Ламе λ , μ та густиною ρ в умовах ідеального механічного контакту знаходиться тонкостінне плоске пружне включення з параметрами λ_0 , μ_0 , ρ_0 , що займає область $W_\varepsilon = \{x : (x_1, x_2) \in W_0, 2|x_3| \leq h(x_1, x_2)\}$. Тут $x = (x_1, x_2, x_3)$ – декартові координати; W_0 – серединна поверхня включення, що є обмеженою

опуклою областю; $h(x_1, x_2)$ – товщина включення. Нижче розглянемо неоднорідність низької контрастності, коли на механічні та геометричні параметри пружної системи накладено обмеження (a – характерний розмір W_0)

$$\varepsilon \leq \max(\lambda, \mu) / \max(\lambda_0, \mu_0) \leq 1/\varepsilon, \quad \varepsilon = a^{-1} \max_{\mathbf{x} \in W_0} h(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де ε – малий безрозмірний параметр, що характеризує відносну товщину тонкої неоднорідності. Як бачимо, співвідношення (1) забезпечує широкий діапазон зміни пружних параметрів розглядуваного композита.

Вектори переміщень у матриці та включенні задовольняють рівняння Ламе

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x}) + \mu \Delta \mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x}) + \omega^2 \rho \mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus W_\varepsilon, \\ (\lambda_0 + \mu_0) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \mu_0 \Delta \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \omega^2 \rho_0 \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in W_\varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

та граничні умови ідеального контакту на поверхні розділу матеріалів

$$\mathbf{u}^{sc} + \mathbf{u}^{in} = \mathbf{u}^0, \quad \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij}^{sc} + \sigma_{ij}^{in} - \sigma_{ij}^0) n_j = 0, \quad l=1,2,3, \quad \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon. \quad (3)$$

У співвідношеннях (2), (3) $\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x})$ та $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ – переміщення у дифрагованому неоднорідністю полі та включенні, відповідно; пружна система збурюється заданою зондувальною хвилею $\mathbf{u}^{in}(\mathbf{x})$; σ_{ij}^{sc} , σ_{ij}^{in} , σ_{ij}^0 – компоненти тензорів напружень, що відповідають переміщенням \mathbf{u}^{sc} , \mathbf{u}^{in} та \mathbf{u}^0 ; $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ – зовнішня нормаль до поверхні ∂W_ε ; ω – кругова частота.

Переміщення $\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x})$ задовольняють умову випромінювання на безмежності [13]

$$\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi r} \sum_{\alpha=1,2} e^{ik_\alpha r} \mathbf{f}^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{v}) + O(r^{-2}), \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (4)$$

де $\mathbf{f}^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{v})$ – комплексні амплітуди розсіяння поздовжніх ($\alpha=1$) та поперечних ($\alpha=2$) хвиль; \mathbf{l} та $\mathbf{v} = \mathbf{x}/r = (v_1, v_2, v_3)$ – напрямки падіння зондувальної хвилі та спостереження; k_1 та k_2 – хвильові числа поздовжніх та поперечних хвиль у матриці.

Нижче, на основі дослідження прямої задачі розсіяння, запропоновано алгоритм дистанційного визначення механічних параметрів пружних плоских включень та їх орієнтації у просторі за значеннями $\mathbf{f}^1(\mathbf{l}, \mathbf{v})$ амплітуд розсіяння поздовжніх хвиль.

Пряма задача розсіяння. За допомогою методів теорії сингулярних збурень за обмежень (1) у праці [14] отримано модель пружно-динамічної взаємодії матриці з включенням низької контрастності. При цьому розв'язок задачі (2)–(4) асимптотично наближено визначають через стрибки зміщень та напружень на серединній поверхні неоднорідності W_0

$$\begin{aligned} u_m^{sc}(x_3 = +0) - u_m^{sc}(x_3 = -0) &= \Phi_m(\mathbf{x}), \\ \sigma_{m3}^{sc}(x_3 = +0) - \sigma_{m3}^{sc}(x_3 = -0) &= \Psi_m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in W_0, \quad m = \overline{1,3}; \\ \Phi_j(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}) (\kappa_j^0 - \kappa_j) \sigma_{j3}^{in}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2; \\ \Phi_3(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}) (\lambda \kappa_3 - \lambda_0 \kappa_3^0) \sum_{m=1}^2 \frac{\partial u_m^{in}(\mathbf{x})}{\partial x_m} + h(\mathbf{x}) (\kappa_3^0 - \kappa_3) \sigma_{33}^{in}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Psi_j(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_m} \left\{ h(\mathbf{x}) \left[\sigma_{jm}^{in}(\mathbf{x}) - \sigma_{jm}^0(\mathbf{x}) \right] \right\} + \omega^2 h(\mathbf{x}) (\rho - \rho_0) u_j^{in}(\mathbf{x}), \quad j=1,2;$$

$$\Psi_3(\mathbf{x}) = \omega^2 h(\mathbf{x}) (\rho - \rho_0) u_3^{in}(\mathbf{x});$$

$$\sigma_{ii}^0(\mathbf{x}) = \lambda_0 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial u_m^{in}}{\partial x_m} + 2\mu_0 \frac{\partial u_i^{in}}{\partial x_i}, \quad \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}) = \mu_0 \left(\frac{\partial u_i^{in}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{in}}{\partial x_i} \right), \quad i, j=1,2; \quad i \neq j;$$

$$\kappa_i = \frac{1}{\mu}, \quad \kappa_3 = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa_i^0 = \frac{1}{\mu_0}, \quad \kappa_3^0 = \frac{1}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad i=1,2.$$

Поздовжню хвилю, що зондує дефект, подамо у вигляді

$$\mathbf{u}^{in}(\mathbf{x}) = A_0 \mathbf{l} \exp[ik_1(\mathbf{l}, \mathbf{x})], \quad \mathbf{l} = (l_1, 0, l_3), \quad (6)$$

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi,$$

де A_0 – амплітуда хвилі; (r, θ, φ) – сферичні координати.

На основі співвідношень (4)–(6), за допомогою формул Беті [1, 13], отримуємо такі вирази для визначення амплітуд розсіяння поздовжніх та поперечних хвиль у дальній хвильовій зоні (зоні Фраунгофера):

$$\mathbf{f}^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{v}) = A_0 a^3 k_1 k_\alpha \mathbf{f}_1^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{f}_1^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}_2^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{v}) L_\alpha, \quad \alpha=1,2; \quad (7)$$

$$\mathbf{f}_2^\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{v}) = \sum_{m=1}^3 \left(\mathbf{a}_m^\alpha \Phi_m^\alpha + \mu^{-1} \mathbf{b}_m^\alpha \Psi_m^\alpha \right),$$

$$\Phi_1^\alpha = 2(\kappa_1 - \kappa_1^0) \mu l_1 l_3; \quad \Phi_2^\alpha = 0, \quad \Phi_3^\alpha = \kappa_3^0 [(\lambda_0 - \lambda) + 2(\mu_0 - \mu) l_3^2],$$

$$\Psi_1^\alpha = v_1 [(\lambda_0 + 2\mu_0 - \lambda - 2\mu) + 2(\mu_0 - \mu) l_3^2] + (\lambda + 2\mu) \frac{k_1}{k_\alpha} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) l_1,$$

$$\Psi_2^\alpha = v_2 (\lambda_0 - \lambda) (l_1 + l_3), \quad \Psi_3^\alpha = (\lambda + 2\mu) \frac{k_1}{k_\alpha} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) l_3;$$

$$\mathbf{a}_m^1 = \mathbf{v} \left[(1 - 2\xi^2) \delta_{3m} + 2\xi^2 v_m v_3 \right], \quad \mathbf{a}_m^2 = \delta_m v_3 + \delta_3 v_m - 2\mathbf{v} v_m v_3, \quad \xi = k_1 / k_2,$$

$$\mathbf{b}_m^1 = \xi^2 v_m \mathbf{v}, \quad \mathbf{b}_m^2 = \delta_m - \mathbf{v} v_m, \quad \delta_m = (\delta_{1m}, \delta_{2m}, \delta_{3m});$$

$$L_\alpha = a^{-3} \int_{W_0} h(y_1, y_2) \exp(ik_1 l_1 y_1) \exp[-ik_\alpha (v_1 y_1 + v_2 y_2)] dy_1 dy_2;$$

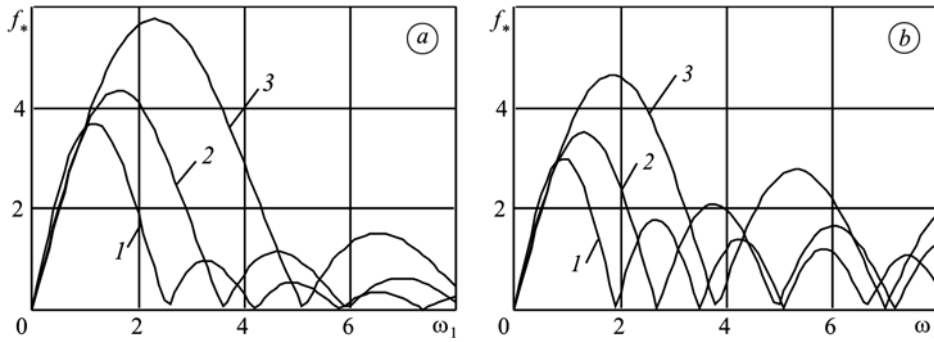
$$l_1 = -\sin \theta_{in}, \quad l_3 = -\cos \theta_{in}, \quad \varphi_{in} = 0,$$

$$v_1 = \sin \theta_{sc} \cos \varphi_{sc}, \quad v_2 = \sin \theta_{sc} \sin \varphi_{sc}, \quad v_3 = \cos \theta_{sc},$$

де $\theta_{in}, \varphi_{in}$ та $\theta_{sc}, \varphi_{sc}$ – кути падіння поздовжньої хвилі та спостереження розсіяних хвиль, відповідно; δ_{ij} – символ Кронекера.

Зображено (див. рисунок, графік *a*) частотні залежності модулів амплітуд розсіяння поздовжніх хвиль $f_* = (A_0 \varepsilon \omega_1)^{-1} |\mathbf{f}^1|$ для просторового кругового включення під час моностатичного зондування дефекту ($\theta_{in} = \theta_{sc}, \varphi_{in} = \varphi_{sc} = 0$; $\omega_1 = k_1 a$; a – радіус серединної поверхні включення). Матеріал матриці – дюралюміній, включення – сталь ($\lambda = 4,59 \cdot 10^4$ МПа; $\mu = 2,7 \cdot 10^4$ МПа; $\rho = 2700$ kg/m³; $\lambda_0 = 7,16 \cdot 10^4$ МПа; $\mu_0 = 8,1 \cdot 10^4$ МПа; $\rho_0 = 7800$ kg/m³). Товщина неоднорідності задавалась у вигляді

$$h(x_1, x_2) = \varepsilon a (1 - r^2 / a^2)^\delta, \quad \delta \geq 0.$$



Нормовані модулі амплітуд розсіяння поздовжніх хвиль для кругового включення змінної товщини ($\delta = 1$) (a) та еліптичного ($a/b = 2$) сталої товщини (b) за моностатичного зондування ($\varphi_{in} = \varphi_{sc} = 0$): 1 – $\theta_{in} = \theta_{sc} = 30^\circ$; 2 – 45° ; 3 – 90° .

The normalized scattering amplitude modules of longitudinal waves for a circular inclusion of variable thickness ($\delta = 1$) (a) and for the elliptic inclusion ($a/b = 2$) of constant thickness (b) under monostatic sounding ($\varphi_{in} = \varphi_{sc} = 0$): 1 – $\theta_{in} = \theta_{sc} = 30^\circ$; 2 – 45° ; 3 – 90° .

Бачимо, що за моностатичного режиму зондування дефекту період $\Delta\omega_1$ чергування максимумів та мінімумів модуля амплітуди розсіяння зменшується з відхиленням напрямку зондування від нормального ($\theta_{in} = \theta_{sc} = 0$) і визначається наближено за формулою

$$\Delta\omega_1 \approx \frac{\pi}{2|\sin\theta_{in}|}.$$

Показано (див. рисунок, графік b) частотну залежність f_* для сталюго включення сталої товщини $h = \varepsilon a$. Серединна поверхня неоднорідності W_0 – еліпс з півсями a та b . Бачимо, що період $\Delta\omega_1$ також залежить від кута θ_{in} і зменшується з відхиленням напрямку зондування від нормального.

Таким чином, із наведених числових результатів та асимптотичного аналізу [15] поведінки інтегралів L_α (при $\omega_1 \gg 1$) у (7) бачимо, що період $\Delta\omega_1$ чергування максимумів та мінімумів в спектрі розсіяних поздовжніх хвиль не суттєво залежить від фізико-механічних характеристик матеріалів композита та товщини включення. Під час моностатичного зондування дефекту він залежить від кута θ_{in} і може бути поданий у вигляді

$$\Delta\omega_1 = \text{const} |\sin\theta_{in}|^{-1}. \quad (8)$$

Причому значення константи у виразі (8) характеризується тільки геометричними параметрами серединної поверхні неоднорідності. Це співвідношення далі використано для визначення орієнтації плоского включення в матриці.

Обернена задача розсіяння. Встановлені вище закономірності дають змогу побудувати алгоритм розв'язку поставленої оберненої задачі так.

Зафіксуємо спочатку систему координат довільно. Зондуючи дефект у моностатичному режимі плоскою поздовжньою хвилею (б) за різних θ_{in} , визначимо кут, за якого нормований модуль амплітуди f_*/ω_1 розсіяних поздовжніх хвиль у дальній зоні стає постійним (тобто $\Delta\omega_1 \rightarrow \infty$) на скінченному інтервалі хвильових чисел зондування. Згідно із співвідношенням (8), цей кут відповідає напрямкові нормального падіння хвилі на дефект. Отже, знаючи орієнтацію включення в просторі, фіксуємо надалі систему координат так, щоб серединна поверхня неоднорідності знаходилась в площині $x_3 = 0$.

Наступний крок розв'язання поставленої оберненої задачі полягає у визначенні коефіцієнтів Ламе та густини включення. Заміряємо амплітуди розсіяння

поздовжніх хвиль $\mathbf{f}_1^1 = f_1^1 \mathbf{v}$ у дальній зоні за таких кутів зондування та спостереження ($\varphi_{in} = 0$): $\theta_{in} = \theta_{sc} = \varphi_{sc} = 0$ ($f_1^1 = F_1$); $\theta_{in} = 0$, $\theta_{sc} = 180^\circ$, $\varphi_{sc} = 0$ ($f_1^1 = F_2$); $\theta_{in} = \theta_{sc} = 90^\circ$, $\varphi_{sc} = 180^\circ$ ($f_1^1 = F_3$); $\theta_{in} = 90^\circ$, $\theta_{sc} = \varphi_{sc} = 0$ ($f_1^1 = F_4$). Останній замір амплітуди F_4 робимо в низькочастотній області. Для амплітуд F_i ($i = \overline{1,4}$), згідно з формулою (7), матимемо співвідношення

$$F_1 = \left(\frac{\rho_0}{\rho} - \frac{\kappa_3^0}{\kappa_3} \right) C_1, \quad F_2 = \left(2 - \frac{\rho_0}{\rho} - \frac{\kappa_3^0}{\kappa_3} \right) C_1, \\ F_3 = \left[\lambda \kappa_3^0 \kappa_3 (\lambda_0 - \lambda) + \frac{\kappa_3}{\kappa_3^0} - \frac{\rho_0}{\rho} \right] C_1, \quad F_4 = \kappa_3^0 (\lambda_0 - \lambda) C_2; \quad (9)$$

$$C_1 = a^{-3} \int_{W_0} h(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad C_2 = a^{-3} \int_{W_0} h(y_1, y_2) \exp(ik_1 y_1) dy_1 dy_2.$$

Для коефіцієнта C_2 у виразі (9), враховуючи, що $\omega_1 = k_1 a \ll 1$, а отже, в області інтегрування $k_1 y_1 \ll 1$, отримуємо:

$$\text{Re} C_2 \approx a^{-3} \int_{W_0} h(y_1, y_2) \left(1 - \frac{(k_1 y_1)^2}{2} \right) dy_1 dy_2 = C_1 + O(\omega_1^2), \quad \omega_1 \ll 1. \quad (10)$$

Співвідношення (9) є системою нелінійних рівнянь відносно параметрів λ_0 , μ_0 , ρ_0 , яку за умови (10) можна розв'язати аналітично та визначити пружні сталі і густину матеріалу включення через експериментально заміряні амплітуди F_i ($i = \overline{1,4}$):

$$\lambda_0 = \lambda + 4 \text{Re}(F_4) F_5 (F_1 + F_2)^{-2}, \quad \lambda_0 + \mu_0 = \frac{2F_6}{F_1 + F_2}, \quad \rho_0 = \rho \left[1 + \frac{(F_1 - F_2) F_5}{(F_1 + F_2) F_6} \right]; \\ F_5 = (\lambda + 2\mu)(F_3 - F_2), \quad F_6 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(2F_3 + F_1 - F_2) - \lambda \text{Re}(F_4). \quad (11)$$

Зауважимо, що за інших кутів зондування та спостереження із співвідношень (7) для визначення механічних параметрів матеріалу включення отримуємо аналогічну до (9) систему нелінійних рівнянь, розв'язок якої слід шукати за допомогою числових методів.

ВИСНОВКИ

В результаті дослідження прямої задачі розсіяння поздовжніх хвиль тонкими просторовими плоскими пружними включеннями низької контрастності отримано аналітичні вирази для хвильових полів зміщень у пружному середовищі. На цій основі запропоновано ефективний алгоритм визначення механічних властивостей та просторової орієнтації таких включень за даними розсіяння поздовжніх хвиль у дальню зону.

Встановлено, що визначальні співвідношення запропонованого алгоритму є інваріантні відносно форми просторового плоского включення і справедливі у широкому діапазоні зміни пружних параметрів композита. Показано, що для ідентифікації матеріалу плоского включення достатньо здійснити чотири заміри амплітуд розсіяних хвиль у дальній зоні за певних кутів спостереження.

РЕЗЮМЕ. Предложен алгоритм дистанционного определения физико-механических параметров тонких плоских пространственных упругих включений переменной толщины. Установлено также ориентацию включений в упругой матрице. Механические свойства неоднородности и матрицы незначительно отличаются между собой по сравнению с ма-

лой толщины включения. Дефект зондируется упругими продольными волнами, а искомыми параметрами определены за амплитудами рассеяния этих волн в зону Фраунгофера.

SUMMARY. An algorithm of the remote determination of the physico-mechanical parameters of thin plane spatial elastic inclusions of varying thickness has been proposed. Besides, the inclusion orientation in an elastic matrix is determined. It is assumed that the mechanical properties of inhomogeneity and matrix differ insignificantly when compared with a small relative thickness of inclusion. Elastic longitudinal waves are sounded by elastic waves and the sought parameters are determined by the scattering amplitudes of these waves into the Fraunhofer zone.

Робота підтримана ДФФД України (проект Ф40.1/018).

1. *Смець В. Ф.* Моделювання та інтерпретація даних розсіяння ультразвуку локальними об'єктами. – Львів: Фенікс, 2001. – 254 с.
2. *Lee K.-M.* Inverse scattering problem for an impedance crack // *Wave Motion*. – 2008. – **45**. – P. 254–263.
3. *Андрейків О. Є., Скальський В. Р., Сулим Г. Т.* Теоретичні основи методу акустичної емісії в механіці руйнування. – Львів: Сполом, 2007. – 480 с.
4. *Куріляк Д. Б., Назарчук З. Т., Войтко М. В.* Про зв'язок коефіцієнтів інтенсивності напружень з дальнім полем SH-хвилі, дифрагованої на міжфазній тріщині // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2009. – **45**, № 3. – С. 5–12.
(*Kurylyak D. B., Nazarchuk Z. T., and Voitko M. V.* On the relationship between the stress intensity factors and the far field of SH-waves diffracted on interface cracks // *Materials Science*. – 2009. – **45**, № 3. – P. 329–339).
5. *Bonnet M. and Constantinescu A.* Inverse problems in elasticity // *Inverse Problems*. – 2005. – **21**. – P. 1–50.
6. *Михаськів В. В., Кунець Я. І., Міщенко В. О.* Напруження у тривимірному тілі з тонким податливим включенням за фронтом імпульсних хвиль // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2003. – **39**, № 3. – С. 63–68.
(*Mukhas'kiv V. V., Kunets' Ya. I., and Mishchenko V. O.* Stresses in a three-dimensional body with thin compliant inclusion behind the front of pulsed waves // *Materials Science*. – 2003. – **39**, № 3. – P. 377–384).
7. *Kit H. S., Kunets Ya. I., and Yemets V. F.* Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // *Int. J. of Engng Scie.* – 1999. – **37**, № 3. – P. 331–345.
8. *Kit G. S., Kunets Ya. I., and Mikhas'kiv V. V.* Interaction of a stationary wave with a thin low stiffness penny-shaped inclusion in an elastic body // *Mechanics of Solids*. – 2004. – **39**, № 5. – P. 64–70.
9. *Лутвин О. В., Попов В. Г.* Взаємодія плоских гармонічних хвиль з включенням у пружному просторі // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2007. – **43**, № 3. – С. 58–64.
(*Lutvin O. V. and Popov V. H.* Interaction of plane harmonic waves with inclusions in the elastic space // *Materials Science*. – 2007. – **43**, № 3. – P. 361–369).
10. *Moiseenok A. P. and Popov V. G.* Interaction of plane nonstationary waves with a thin elastic inclusion under smooth contact conditions // *Mechanics of Solids*. – 2009. – **44**, № 4. – P. 621–631.
11. *Mukhas'kiv V. V. and Khay O. M.* Interaction between rigid-disk inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2009. – **46**. – P. 602–616.
12. *Кунець Я. І., Матус В. В., Міщенко В. О.* Дистанційне визначення фізико-механічних параметрів тонкостінних дефектів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2000. – **36**, № 5. – С. 117–118.
(*Kunets' Ya. I., Matus V. V., and Mishchenko V. O.* Remote evaluation of physicomachanical parameters of thin-walled defects // *Materials Science*. – 2000. – **36**, № 5. – P. 776–779).
13. *Купрадзе В. А.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.
14. *Емец В. Ф., Кит Г. С., Кунець Я. І.* Асимптотическое поведение решения задачи рассеяния упругой волны тонкостенным инородным включением // *Изв. РАН. Мех. твердого тела*. – 1999. – № 3. – С. 55–64.
15. *Федорюк М. В.* Метод перевала. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

Одержано 27.11.2010