

УДК 517.9;537.8;538.566

ДИФРАКЦІЯ ПРУЖНОЇ SH-ХВИЛІ НА МІЖФАЗНІЙ ТРІЩИНІ У ЖОРСТКОМУ З'ЄДНАННІ ШАРУ З ІНТЕРФЕЙСОМ

З. Т. НАЗАРЧУК, Д. Б. КУРИЛЯК, М. В. ВОЙТКО, Я. П. КУЛИНИЧ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розв'язано задачу дифракції нормальної хвилі, яка поширюється у пружному шарі, з'єднаному жорстко з інтерфейсом, на міжфазній тріщині за антиплоского динамічного навантаження. Методом Вінера–Хопфа задачу зведено до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь. Досліджено власні значення оператора задачі, які відповідають резонансним коливанням динамічної системи на основній моді. Наведено приклади резонансних частот структур з міжфазними дефектами.

Ключові слова: *метод Вінера–Хопфа, міжфазна тріщина, пружний шар, дифракція, резонанс.*

Для розвитку сучасних технологій візуалізації динамічних полів зміщень необхідно вивчати особливості їх розподілу на поверхні зразка та вибрати оптимальні частоти зондування. Такі дослідження потрібні, щоб розробити методики діагностування дефектів матеріалів та конструкцій. Нижче методом Вінера–Хопфа розв'язано задачу дифракції пружної SH-хвилі на міжфазній тріщині, яка утворилася на межі жорсткого з'єднання шару з інтерфейсом.

Задачі дифракції пружних хвиль на дефектах у шарах та міжфазних тріщинах у з'єднаннях досліджували раніше [1–3]. Методом Вінера–Хопфа розв'язано [4] задачу дифракції SH-хвилі на міжфазній тріщині, яка виникає на межі ідеального з'єднання пластини з півпростором. Його застосовували також для розв'язання задачі дифракції пружної SH-хвилі на міжфазній тріщині у з'єднанні двох півпросторів [5, 6] та задачі дифракції хвилеводної моди в пластині на межі зміни крайових умов [7, 8]. Вивчали [9] спектральні властивості динамічних систем у вигляді пластин з внутрішніми тріщинами.

Розглянемо міжфазну тріщину на плоскій межі жорсткого з'єднання шару $P: \{x \in (-\infty, \infty), y \in (-d, 0), z \in (-\infty, \infty)\}$ з плоским інтерфейсом $S: \{x \in (-\infty, \infty), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$, де $Oxyz$ – декартова система координат. Нехай тріщина на межі з'єднання шару з інтерфейсом займає область $\Gamma: \{x \in (-L, 0), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ (рис. 1). Таку структуру опромінює одна з незгасальних нормальних SH-хвиль, що можуть поширюватись у шарі, з'єднаному з інтерфейсом за відсутності дефекту. Залежність поля зміщень SH-хвилі від часу t беремо у вигляді $e^{-i\omega t}$ (цей множник надалі опускаємо). Дифракційні процеси у такій системі опишемо за допомогою однієї скалярної функції $u = u(x, y)$, яка визначає поле зміщень ($\mathbf{u} \equiv \bar{e}_z u(x, y)$). Тоді відповідну крайову задачу дифракції формуємо так:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{zy} = \mu \frac{\partial(u + u^{inc})}{\partial y} = 0, \quad y = -d; \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

$$\tau_{zy} = \mu \frac{\partial(u + u^{inc})}{\partial y} = 0, \quad y = 0; \quad x \in (-L, 0), \quad (3)$$

$$u^t = u + u^{inc} = 0, \quad y = 0; \quad x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty). \quad (4)$$

Тут $u^{inc}(x, y) = e^{\gamma_j x} \sin(\beta_j y)$ – збуджувальна хвиля, яка поширюється у від’ємному напрямі осі x ; $\beta_j = \pi(2j-1)/2d$, $j=1, 2, 3, \dots$; $\gamma_j = \sqrt{\beta_j^2 - k^2}$, $\text{Re} \gamma_j > 0$; $k = k' + ik''$ – хвильове число ($k', k'' > 0$, $k' \gg k''$).

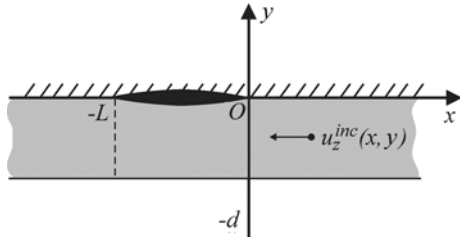


Рис. 1. Міжфазна тріщина на межі з’єднання пружного шару з інтерфейсом.

Fig. 1. An interface crack at the elastic layer and interface junction.

Розв’язок крайової задачі (1)–(4) необхідно знайти у класі функцій, які забезпечують виконання умови граничного поглинання, коли $\rho \rightarrow \infty$, а також на вершинах тріщини:

$$u \sim \rho^{1/2}, \quad \partial u / \partial \rho \sim \rho^{-1/2}, \quad \text{коли } \rho = [x^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow 0 \text{ і } \rho = [(x+L)^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow 0. \quad (5)$$

Розглянемо трансформанту Фур’є дифрагованого поля $u(x, y)$:

$$U(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad (6)$$

де $\alpha = \text{Re} \alpha + i \text{Im} \alpha (\equiv \sigma + i\tau)$.

Застосовуючи перетворення Фур’є до рівняння (1), подамо трансформанту (6) у вигляді

$$U(\alpha, y) = B(\alpha) e^{\gamma y} + C(\alpha) e^{-\gamma y}. \quad (7)$$

Тут $B(\alpha), C(\alpha)$ – невідомі функції; $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, $\text{Re} \gamma > 0$; функція $U(\alpha, y)$ регулярна у смугі $\alpha \in \Pi: \{-\tau_0 < \tau < \tau_0\}$, де $\tau_0 \leq \min(\text{Im} k, \text{Re} \gamma_1)$, $\text{Re} \gamma_1 < \text{Re} \gamma_j$, коли $j > 1$.

Запишемо інтеграли Фур’є

$$U'^-(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-L} u'_y(x, 0) e^{i\alpha(x+L)} dx, \quad U'^+(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u'_y(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \quad (8)$$

$$\Phi'(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^0 u'_y(x, 0) e^{i\alpha x} dx. \quad (9)$$

Тут $U'^-(\alpha, 0)$, $U'^+(\alpha, 0)$ – регулярні функції параметра α відповідно у півплощинах $\tau < \tau_0$ і $\tau > -\tau_0$, які мають спільну смугу регулярності Π ; $\Phi'(\alpha, 0)$ – ціла функція.

Продиференціювавши вираз (7) за змінною y і застосувавши інтегральне перетворення Фур’є до крайової умови (2), знаходимо:

$$C(\alpha) = B(\alpha)e^{-2\gamma d}. \quad (10)$$

Для умови $y \rightarrow 0$, врахувавши позначення (6)–(10), отримаємо:

$$e^{-i\alpha L}U'^-(\alpha, 0) + \Phi'(\alpha, 0) + U'^+(\alpha, 0) = \gamma B(\alpha)[1 - e^{-2\gamma d}]. \quad (11)$$

Із крайової умови (3) знаходимо:

$$\Phi'(\alpha, 0) = \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi(\alpha - i\gamma_j)}} \left[1 - e^{-\gamma_j L} e^{-i\alpha L} \right]. \quad (12)$$

Беручи до уваги вирази (10), (11), рівняння (7) перепишемо так:

$$U(\alpha, y) = [e^{-i\alpha L}U'^-(\alpha, 0) + \Phi'(\alpha, 0) + U'^+(\alpha, 0)] \frac{\text{ch}\gamma(y+d)}{\gamma \text{sh}(\gamma d)}. \quad (13)$$

Використовуючи подання (13) і Фур'є перетворення крайової умови (4), приходимо до рівняння Вінера–Хопфа

$$[\Psi^{(+)}(\alpha) + e^{-i\alpha L}\Psi^-(\alpha)]M(\alpha) + J_1(\alpha) = 0, \quad \alpha \in \Pi. \quad (14)$$

Тут $\Psi^-(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$, $J_1(\alpha)$ – невідомі функції з відомими властивостями регулярності: $\Psi^-(\alpha)$ – регулярна у комплексній півплощині $\tau < \tau_0$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$ – у півплощині $\tau > -\tau_0$, за винятком точки $\alpha = i\gamma_j$ ($\text{Re}\gamma_j > \tau_0$), де вона має простий полюс, $J_1(\alpha)$ – ціла функція, виражена інтегралом у скінченних межах, а відома функція $M(\alpha)$ регулярна у смузі $\alpha \in \Pi$, а за її межами допускає прості нулі і полюси;

$$\Psi^-(\alpha) = U'^-(\alpha, 0) - \frac{i\beta_j e^{-\gamma_j L}}{\sqrt{2\pi(\alpha - i\gamma_j)}}, \quad (15)$$

$$\Psi^{(+)}(\alpha) = U'^+(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi(\alpha - i\gamma_j)}}, \quad (16)$$

$$J_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^0 U(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \quad (17)$$

$$M(\alpha) = \frac{\text{ch}(\gamma d)}{\gamma \text{sh}(\gamma d)}. \quad (18)$$

Функція (18) допускає факторизацію методом нескінченних добутків і її можна подати у вигляді

$$M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha). \quad (19)$$

Тут $M_-(\alpha) = M_+(-\alpha)$,

$$M_+(\alpha) = \frac{\sqrt{\cos(kd)} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\alpha}{i\gamma_{nc}} \right] e^{i\alpha \frac{d}{n\pi}}}{i\sqrt{k \sin(kd)} \left(1 + \frac{\alpha}{i\gamma_{0s}} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\alpha}{i\gamma_{ns}} \right] e^{i\alpha \frac{d}{n\pi}}}, \quad (20)$$

де $\gamma_{nc} = \sqrt{\pi^2(2n-1)^2/(4d^2) - k^2}$, $\gamma_{ns} = \sqrt{(\pi n/d)^2 - k^2}$, $\gamma_{0s} = -ik$.

У формулах (19), (20) функції $M_{\pm}(\alpha)$ регулярні і не мають нулів відповідно у півплощинах $\tau > -\tau_0$, $\tau < \tau_0$, а якщо $|\alpha| \rightarrow \infty$, в областях регулярності справедлива асимптотична оцінка $M_{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$. За межами області регулярності ці функції мають прості нулі і полюси у точках $\alpha = \mp i\gamma_{nc}$ і $\alpha = \mp i\gamma_{ns}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), а також простий полюс, коли $\alpha = \mp k$.

Асимптотична поведінка функцій (15), (16) в областях регулярності, коли $|\alpha| \rightarrow \infty$, така: $\Psi^{(+)}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, $\Psi^{-}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$. Ціла функція (17) в області $\tau < \tau_0$ для $|\alpha| \rightarrow \infty$ спадає до нуля, $J_1(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$, а в області $\tau > -\tau_0$ для $|\alpha| \rightarrow \infty$ спадає до нуля добуток $e^{i\alpha L} J_1(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$.

Далі функціональне рівняння (14) переписуємо у вигляді

$$M_{+}(\alpha)\Psi^{(+)}(\alpha) + e^{-i\alpha L}M_{+}(\alpha)\Psi^{-}(\alpha) + \frac{J_1(\alpha)}{M_{-}(\alpha)} = 0, \quad \alpha \in \Pi, \quad (21)$$

$$M_{-}(\alpha)e^{i\alpha L}\Psi^{(+)}(\alpha) + M_{-}(\alpha)\Psi^{-}(\alpha) + \frac{e^{i\alpha L}J_1(\alpha)}{M_{+}(\alpha)} = 0, \quad \alpha \in \Pi. \quad (22)$$

Факторизуючи рівняння (21), (22), приходимо до системи інтегральних рівнянь другого роду, які після заміни інтегралів рядами лишків зводимо до таких співвідношень:

$$M_{+}(\alpha)\Psi^{(+)}(\alpha) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n d^{-1} e^{-\gamma_{ns} L} \Psi^{-}(-i\gamma_{ns})}{i\gamma_{ns} M_{+}(i\gamma_{ns})(i\gamma_{ns} + \alpha)} = \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_{+}(i\gamma_j)}{\alpha - i\gamma_j}, \quad (23)$$

$$M_{-}(\alpha)\Psi^{-}(\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{e^{-\gamma_{ns} L} \Psi^{(+)}(i\gamma_{ns})}{i\gamma_{ns} d M_{+}(i\gamma_{ns})(\alpha - i\gamma_{ns})} = 0, \quad (24)$$

де $\varepsilon_n = 1/2$, коли $n = 0$, і $\varepsilon_n = 1$, коли $n > 0$.

Покладаючи у першому рівнянні $\alpha = i\gamma_{rs}$, а у другому $\alpha = -i\gamma_{rs}$, $r = 0, 1, 2, \dots$, із функціональних співвідношень (23), (24) отримуємо нескінченні системи лінійних алгебричних рівнянь (НСЛАР), які в решті-решт запишемо так:

$$[I + A]X = F. \quad (25)$$

Тут $X = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_n = M_{+}(i\gamma_{ns})\Psi^{(+)}(i\gamma_{ns})$, $x_n = O(n^{-1})$, коли $n \rightarrow \infty$; I – одинична матриця, $A = \{a_{rn}\}_{n,r=0}^{\infty}$, $F = \{f_r\}_{r=0}^{\infty}$;

$$a_{rn} = -\frac{\varepsilon_n d^{-2} e^{-\gamma_{ns} L}}{\gamma_{ns} [M_{+}(i\gamma_{ns})]^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m e^{-\gamma_{ms} L}}{[M_{+}(i\gamma_{ms})]^2 \gamma_{ms} (\gamma_{rs} + \gamma_{ms})(\gamma_{ms} + \gamma_{ns})}; \quad (26)$$

$$f_r = \frac{\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_{+}(i\gamma_j)}{\gamma_{rs} - \gamma_j}. \quad (27)$$

Для матричних елементів (26), якщо $n, r \rightarrow \infty$, виконується оцінка

$$|a_{rn}| \leq C \frac{e^{-\pi n L / d}}{rn}, \quad (28)$$

де C – відома стала.

Отже, $\|A\|_2 = \sum_{r,n} |a_{rn}|^2 < \infty$ і НСЛАР (25) має єдиний розв'язок, за винятком

дискретних значень хвильового параметра, для яких відповідне однорідне рівняння (25) допускає ненульовий розв'язок.

Якщо тепер формулу (13) переписати, використовуючи співвідношення (15), (16), а пізніше отримати обернене перетворення Фур'є від виразу (6), то поле зміщень

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\Psi^-(\alpha)e^{-i\alpha L} + \Psi^{(+)}(\alpha)] \frac{\text{ch}\gamma(y+d)}{\gamma \text{sh}(\gamma d)} e^{-i\alpha x} dx. \quad (29)$$

Тут функції $\Psi^-(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$ визначають формули (23), (24), де значення $\Psi^-(i\gamma_{ns})$ і $\Psi^{(+)}(i\gamma_{ns})$ відомі з розв'язку рівняння (25).

Інтеграл (29) можна замінити рядами лишків підінтегральної функції. Для цього замикаємо контур у верхню або нижню півплощини комплексної площини α залежно від області, де необхідно визначити поле зміщень. Наприклад, якщо в області $\{x, y: -L < x < 0, -d < y < 0\}$, то під час обчислення інтеграла від першого доданка контур інтегрування замикаємо у нижню півплощину, а від другого – у верхню. Остаточний вираз для поля зміщення у цій області подамо так:

$$u^{(t)}(x, y) = \sqrt{2\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon_q \frac{\cos \frac{\pi q}{d}(y+d)}{d \gamma_{qs} \cos \pi q} [\Psi^{(+)}(i\gamma_{qs})e^{\gamma_{qs}x} - \Psi^-(i\gamma_{qs})e^{-\gamma_{qs}(x+L)}]. \quad (30)$$

Розглянемо характеристичне рівняння для визначення спектра вихідної дифракційної задачі

$$\det[I + A(\Omega)] = 0. \quad (31)$$

Тут елементи матриці $A = A(\Omega)$, де $\Omega = kd$, нелінійно залежать від частоти і як функції цього параметра мають точки галуження. Тому, досліджуючи розв'язки рівняння (31), розглядаємо його на відповідній рімановій поверхні. Необхідні розрізи комплексної площини Ω вибираємо з умови, яка забезпечує формування на першому листі ріманової поверхні загасальних з часом власних коливань [10, 11].

Корені рівняння (31) є комплексні. Для їх знаходження дослідили функцію $f(\Omega) = |\det[I + A(\Omega)]|$ за дійсних значень хвильового числа (рис. 2). Криві тут досягають локальних мінімумів, якщо $p = L/d = 0, 1; 0, 5$ і $1, 0$, а $\text{Re}\Omega = 1, 57077; 1, 55566$ і $1, 42873$.

Локальні мінімуми функції $f(\Omega)$ вибирали за початкове наближення дійсної частини розв'язків рівняння (31), а далі уточнювали ці значення, забезпечуючи прямування до нуля дійсної і уявної частин визначника (31). Наприклад, локальний мінімум кривої 3 у точці $\Omega = 1, 428732$ (рис. 2) забезпечує виконання рівняння (31) з абсолютною похибкою $< 0, 013\%$, а уточнене значення цього кореня $\Omega = 1, 428732 - i0, 000015$ задовольняє це рівняння з точністю, вищою за $0, 002\%$. За параметра Ω , рівного значенням локальних мінімумів кривих 1 і 2, абсолютна похибка визначення коренів рівняння (31) не перевищувала $0, 015\%$.

(+)
Дослідили залежності $|\Psi^-(i\gamma_{qs})|$, де $q = 0, 1, 2, \dots$, від $\text{Re}(kL)$ за вказаних вище значень параметрів p і $\text{Re}(\Omega)$. Резонансні піки на цих залежностях спостерігали для $|\Psi^{(+)}(i\gamma_{0s})|$ і $|\Psi^-(i\gamma_{0s})|$, що вказує на збудження резонансних коливань на основних модах в області $(x, y): \{-L < x < 0; -d < y < 0\}$. Характер залежності $|\Psi^{(+)}(i\gamma_{0s})|$ від $\text{Re}(kL)$ ілюструє рис. 3, де зафіксовано резонансне зростання цієї моди для різних значень параметра $\text{Re}(kL)$.

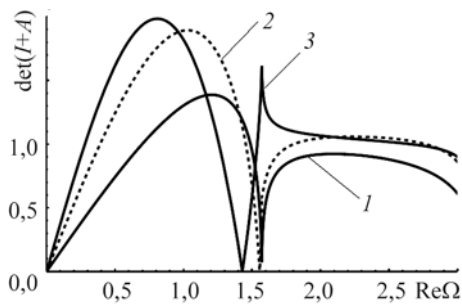


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Залежність модуля визначника (31) від параметра $\text{Re}\Omega$:
 $1 - p = 0,1$; $2 - 0,5$; $3 - 1,0$.

Fig. 2. Dependence of the determinant modulus (31) on the parameter $\text{Re}\Omega$:
 $1 - p = 0.1$; $2 - 0.5$; $3 - 1.0$.

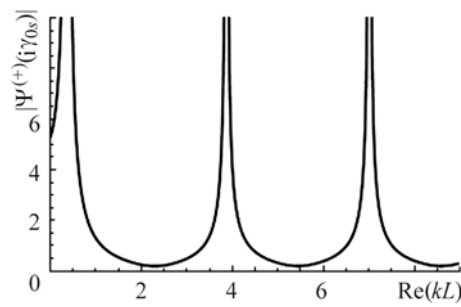


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Залежність модуля основної моди від величини $\text{Re}(kL)$ для $\text{Re}\Omega = 1,428732$ і $p = 1,0$.

Fig. 3. Dependence of the main mode modulus on $\text{Re}(kL)$ on $\text{Re}\Omega = 1.428732$ and $p = 1.0$.

Побудовано (рис. 4) залежності дійсної ($\text{Re}\Omega_{1(2)} > 0$) і уявної ($\text{Im}\Omega_{1(2)} < 0$) частин коренів цього рівняння від p (перші два корені). На відповідних комплексних частотах спостерігаємо резонанс основної моди ($u(x, y) \sim e^{\pm\gamma_{0s}x}$) у хвильовидній області $D_1 \{x, y : -L < x < 0, -d < y < 0\}$.

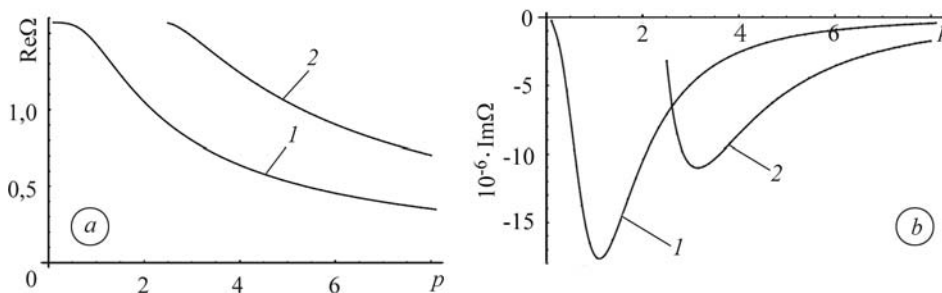


Рис. 4. Залежність дійсної (a) і уявної (b) частин комплексних коренів рівняння (31) від параметра p : 1, 2 – вітки коренів.

Fig. 4. Dependence of the real (a) and imaginary (b) part of complex roots of equation (31) on the parameter p : 1, 2 – branch of roots.

Отримані значення резонансних параметрів можна використати для вибору частот зондування міжфазних дефектів. Зокрема, якщо пружний шар виготовлений із заліза і з'єднаний з інтерфейсом, то для довжин 1; 5; 10 mm резонансні частоти основної моди набуватимуть значень $\text{Re}\omega = 507361$; 502480 ; 461480 rad/s.

ВИСНОВКИ

Показано можливість збудження резонансних поперечних коливань на основній моді в жорсткому з'єднанні шару з інтерфейсом за наявності міжфазної тріщини, що можна використати для вибору оптимальної частоти зондування, орієнтованої на виявлення дефектів фіксованих розмірів.

РЕЗЮМЕ. Решена задача дифракции на межфазной трещине нормальной волны, распространяющейся в упругом слое, соединенном жестко с интерфейсом, при антиплоском динамическом нагружении. Методом Винера–Хопфа задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Исследованы собственные значения оператора задачи, отвечающие резонансным колебаниям динамической системы на основной моде. Приведены примеры резонансных частот структур с межфазными дефектами.

SUMMARY. The problem of diffraction at the normal wave, which propagates in the elastic layer that is rigidly connected to the interface, by the interface crack under antiplane dynamic load, is solved. The problem is reduced to the solution of the infinite system of the linear algebraic equations by the Whiner-Hopf technique. The eigenvalues of the problem operator, which correspond to the resonance oscillations of the dynamic system on the main mode, are investigated. The examples of the resonance frequencies for the structures with interface defects are provided.

1. *Кирпичникова Н. Я., Свиркина Л. А., Филиппов В. Б.* Рассеяние плоских упругих волн от малой неоднородности, помещенной в упругий слой // Записки науч. семинаров ПОМИ. – 2001. – **275**. – С. 72–84.
2. *Кирпичникова Н. Я., Свиркина Л. А., Филиппов В. Б.* Дифракция плоских упругих волн вертикальной поляризации от малой неоднородности в слое // Там же. – 2002. – **285**. – С. 88–108.
3. *Wang Y. S. and Gross D.* Transfer matrix method of wave propagation in a layered medium with multiple interface cracks: anti-plane case // J. Appl. Mech. – 2001. – **68**. – P. 499–503.
4. *Kuryliak D. B. and Voytko M. V.* Wiener-Hopf analysis of the elastic wave diffraction by the finite crack located at the plane interface between the elastic isotropic slab and half-space medium, direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED). – Lviv–Tbilisi, October 11–14, 2004. – P. 22–25.
5. *Pal S. C. and Chosh M. L.* High frequency scattering of antiplane shear waves by interface crack // Indian J. Pure Appl. Math. – 1990. – **21**, № 12. – P. 1107–1124.
6. *Курьяк Д. Б., Назарчук З. Т., Войтко М. В.* Аналіз поля плоскої SH-хвилі, розсіяної скінченною тріщиною на межі поділу матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 6. – С. 5–16.
(*Kurylyak (Kuryliak) D. B., Nazarchuk Z. T., and Voitko (Voytko) M. V.* Analysis of the Field of a Plane SH-Wave Scattered by a Finite Crack on the Interface of Materials // Materials Science. – 2006. – **42**, № 6. – P. 711–724.)
7. *Zaman F. D.* Diffraction of SH-waves across a mixed boundary in a plate // Mech. Res. Communication. – 2001. – **28**, №2. – P. 171–178.
8. *Asghar S. and Zaman F. D.* Diffraction of SH-waves by a finite crack in a layer overlying a half space // Boll. Di Geofisica Teorica Ed Applicata. – 1987. – **19**, № 113. – P. 43–50.
9. *Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack / E. Glushkov, N. Glushkova, M. Golub, and A. Boström // J. Acoust. Soc. Am. – 2006. – **119**, № 6. – P. 3589–3598.*
10. *Шестопалов В. П.* Спектральная теория и возбуждение открытых структур. – К.: Наук. думка, 1987. – 288 с.
11. *Фундаментальные и прикладные задачи теории рассеяния электромагнитных волн / Ю. К. Сиренко, И. В. Сухаревский, О. И. Сухаревский, Н. П. Яшина – Харьков: Крок, 2000. – 346 с.*

Одержано 21.04.2011