

УДК 539.3

**КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ СКІНЧЕННОГО ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА
ЗІ ЗОВНІШНЬОЮ КІЛЬЦЕВОЮ ТРІЩИНОЮ**

В. Г. ПОПОВ

Одеська національна морська академія

Визначено напружений стан скінченного циліндра зі зовнішньою кільцевою тріщиною під час крутильних коливань. Коливання відбуваються від дії гармонічного крутильного моменту на жорстку накладку, що зчеплена з одним із торців циліндра. Задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно невідомих напружень у площині розташування тріщини.

Ключові слова: *крутильні коливання, скінченний циліндр, зовнішня кільцева тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень.*

Елементи деталей машин та будівельних конструкцій часто мають вигляд циліндрів. Тріщини у них суттєво знижують експлуатаційні характеристики і можуть призвести до руйнування, особливо в умовах динамічного навантаження. Поширеним видом тріщин, що виникають під час експлуатації таких деталей, є зовнішні кільцеві тріщини. Тому встановленню напруженого стану в циліндричних тілах з подібними дефектами приділяють особливу увагу у сучасних дослідженнях. Теоретичне визначення напруженого стану циліндрів з тріщинами полягає у розв'язуванні граничних задач для відповідних рівнянь у частинних похідних, точний розв'язок яких на сьогодні не знайдений. Тому один з підходів до таких задач – застосування прямих числових методів (скінченних різниць та елементів) [1, 2]. Поширеним є метод, який ґрунтується на зведенні вихідних крайових задач до інтегральних рівнянь, як правило сингулярних. Його реалізовано у працях [3–6].

Переважно вивчали рівновагу нескінченних і скінченних циліндрів з кільцевими тріщинами, а теоретичних досліджень напруженого стану циліндрів з кільцевими тріщинами в умовах динамічного навантаження було значно менше. Зазвичай розглядали циліндри необмеженої довжини [7–11]. Останнім часом для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у циліндричних тілах зі зовнішніми кільцевими тріщинами запропоновано використовувати змішані числово-експериментальні методи. Так, розглянуто [12] динамічний розтяг, а у праці [13] динамічний закрут циліндричних зразків з такими тріщинами. Але ці методи, як і всі експериментальні, мають недоліки, оскільки для кожного конкретного зразка необхідно проводити експерименти, які потребують складної реєстраційної апаратури. Це ускладнює дослідження впливу на значення КІН геометричних розмірів циліндра і тріщини. Тому задача теоретичного визначення КІН у циліндрах з тріщинами в умовах динамічного навантаження і сьогодні залишається актуальною. Нижче запропоновано розв'язання задачі визначення напруженого стану у циліндрі зі зовнішньою кільцевою тріщиною в умовах крутильних коливань.

Формулювання задачі. Розглянемо пружний скінченний круговий циліндр ($0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq z \leq a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) (рис. 1). Нижній торець циліндра ($z = 0$) вважаємо

жорстко закріпленим, а верхній – зчепленим з жорсткою накладкою товщини h і такого ж радіуса. На накладку діє гармонічний в часі момент крутіння $Me^{-i\omega t}$. На висоті $z = c$ у циліндрі паралельно його торцям міститься кільцева тріщина з центром на осі циліндра і займає область $z = c$, $b \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Бокову поверхню циліндра і поверхню тріщини вважають вільними від напружень.

Циліндр знаходиться у стані осесиметричної деформації закруту і відмінною від 0 буде тільки кутова складова вектора переміщень $W(r, z)$, яка має задовольняти рівняння

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \kappa_2^2 W = 0, \quad (1)$$

$$\kappa_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad c_2^2 = \frac{\rho}{G},$$

де ω – частота коливань; ρ, G – густина і модуль зсуву матеріалу циліндра. Тут і надалі множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, опущений. З умов на торцях циліндра отримуємо рівності

$$W(r, a) = \alpha \cdot r, \quad W(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (2)$$

де α – невідомий кут повороту накладки під дією прикладеного моменту M , який визначаємо з рівняння руху накладки:

$$-\omega^2 j_0 \alpha = M - M_R, \quad M_R = 2\pi \int_0^{r_0} r^2 \tau_{\varphi z}(r, a) dr, \quad (3)$$

де j_0 – момент інерції накладки; M_R – момент реакції з боку циліндра. Відповідно з умов на бічній поверхні і на поверхні тріщини отримуємо:

$$\tau_{\varphi r}(r_0, z) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{W}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad 0 \leq z \leq a; \quad (4)$$

$$\tau_{\varphi z}(r, c) = G \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=c} = 0, \quad r \in [b, r_0]. \quad (5)$$

Необхідно знайти переміщення і напруження у циліндрі, КІН для тріщини і кут повороту накладки.

Розв'язування задачі. Щоб розв'язати крайову задачу (1)–(5) вводять до розгляду невідомі дотичні напруження, які діють у площині тріщини

$$\tau_{\varphi z}(r, c) = G \frac{\partial W}{\partial z}(r, c) = \chi(r), \quad 0 \leq r \leq r_0 \quad (6)$$

причому з умови (5) випливає, що $\chi(r) \equiv 0$, $r \in (b, r_0]$. Далі розв'язок крайової задачі (1)–(5) подаємо у вигляді

$$W(r, z) = W_0(r, z) + W_1(r, z), \quad (7)$$

де

$$W_0(r, z) = \alpha r \frac{\sin(\kappa_2 z)}{\sin(\kappa_2 a)} \quad (8)$$

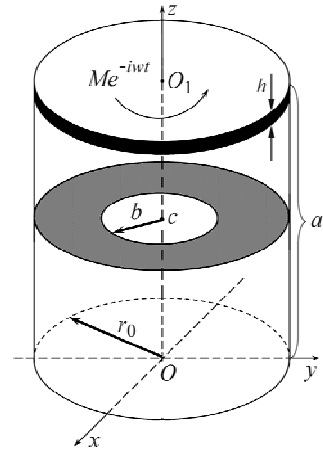


Рис. 1. Циліндр зі зовнішньою кільцевою тріщиною.

Fig. 1. A cylinder with an external circumferential crack.

– розв’язок крайової задачі (1)–(4) для відповідного циліндра за відсутності тріщини. Нова невідома функція $W_1(r, z)$ має задовольняти рівняння (1) і крайові умови (1)–(4). У площині тріщини для цієї функції мають виконуватися рівності:

$$\tau_{\varphi z}^1(r, c) = \chi(r) - \tau_{\varphi z}^0(r, c), \quad r \in [0, r_0], \quad \chi(r) \equiv 0, \quad r \in (b, r_0], \quad (9)$$

$$\tau_{\varphi z}^l(r, z) = G \frac{\partial W_l}{\partial z}(r, z), \quad l = 0, 1.$$

Функцію $W_1(r, z)$ знаходимо окремо для двох частин циліндра, розділених площиною тріщини

$$W_1(r, z) = \begin{cases} W^+(r, z), & z \in (c, a] \\ W^-(r, z), & z \in [0, c). \end{cases} \quad (10)$$

Щоб визначити $W^\pm(r, z)$ необхідно знайти розв’язки рівняння (1), які задовольняють такі крайові умови:

$$\tau_{\varphi z}^\pm(r, c) = G \frac{\partial W^\pm}{\partial z}(r, c) = \chi(r) - G\alpha r \kappa_2 \frac{\cos(\kappa_2 c)}{\sin(\kappa_2 a)}; \quad (11)$$

$$W^+(r, a) = 0, \quad W^-(r, 0) = 0; \quad (12)$$

$$\tau_{\varphi r}^-(r_0, z) = 0, \quad z \in [0, c], \quad \tau_{\varphi r}^+(r_0, z) = 0, \quad z \in [c, a]. \quad (13)$$

Розв’язування крайової задачі для $W^-(r, z)$ ґрунтується на інтегральному перетворенні [14]

$$W_k^-(r) = \int_0^c W^-(r, z) \sin(\lambda_k z) dz, \quad W^-(r, z) = \frac{2}{c} \sum_{k=1}^{\infty} W_k^-(r) \sin(\lambda_k z), \quad \lambda_k = \frac{\pi(2k-1)}{2c}. \quad (14)$$

З огляду на умови (11), (12) знайдено

$$\int_0^c \frac{\partial^2 W^-}{\partial z^2} \sin \lambda_k z dz = \left(\frac{\chi(r)}{G} - \alpha r \kappa_2 \frac{\cos(\kappa_2 c)}{\sin(\kappa_2 a)} \right) \cdot \sin(\lambda_k c) - \lambda_k^2 W_k^-(r).$$

Враховуючи це співвідношення і застосовуючи інтегральне перетворення (14), з крайової задачі (1), (11)–(13) отримали таку одновимірну крайову задачу:

$$\frac{d^2 W_k^-}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dW_k^-}{dr} - \frac{W_k^-}{r^2} - \lambda_k^2 W_k^- = f_k^-(r), \quad r \in (0, r_0);$$

$$Gr \frac{d}{dr} \left(\frac{W_k^-}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad (15)$$

де

$$f_k^-(r) = - \left(\frac{\chi(r)}{G} - \alpha r \kappa_2 \frac{\cos(\kappa_2 c)}{\sin(\kappa_2 a)} \right) \sin(\lambda_k c).$$

Обмежений при $r \rightarrow 0$ розв’язок (15) має вигляд

$$W_k^-(r) = C_k^- I_1(q_k r) - \int_0^{r_0} f_k^-(\eta) g_k^-(\eta, r) d\eta,$$

де

$$g_k^-(\eta, r) = \int_0^\infty \frac{\beta I_1(\beta \eta) I_1(\beta r)}{\beta^2 + (q_k^-)^2} d\beta = \begin{cases} I_1(q_k^- \eta) K_1(q_k^- r), & \eta < r \\ K_1(q_k^- \eta) I_1(q_k^- r), & \eta > r \end{cases} \quad (16)$$

– фундаментальна функція диференціального рівняння (15), а C_k^- – довільна стала; $I_1(x), K_1(x)$ – модифіковані циліндричні функції. Після визначення сталої C_k^- з крайової умови (15) і застосування формул оберненого перетворення (14), отримаємо:

$$W^-(r, z) = \int_0^{r_0} \eta \frac{\chi(\eta)}{G} F^-(\eta, r, z) d\eta - \frac{\alpha r \sin(\kappa_2 z)}{\sin(\kappa_2 a)}, \quad (17)$$

$$F^-(\eta, r, z) = \frac{2}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \left[g_k^-(\eta, r) + \frac{K_2(q_k^- r_0)}{I_2(q_k^- r_0)} I_1(q_k^- \eta) I_1(q_k^- r) \right] \cdot \sin(\lambda_k c) \cdot \sin(\lambda_k z).$$

Щоб знайти $W^+(r, z)$ використовують інтегральне перетворення [14]:

$$W_k^+(r) = \int_c^a W^+(r, z) \cos \gamma_k(z - c) dz, \quad W^+(r, z) = \frac{2}{d} \sum_{k=1}^{\infty} W_k^+(z) \cos \gamma_k(z - c), \quad (18)$$

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k-1)}{2d}, \quad d = a - c.$$

В результаті отримано одновимірну крайову задачу

$$\frac{d^2 W_k^+}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_k^+}{dr} - \frac{W_k^+}{r^2} - (q_k^+)^2 W_k^+ = f^+(r), \quad r \in (0, r_0),$$

$$r \frac{d}{dr} \left(\frac{W_k^+}{r} \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad (19)$$

де $q_k^+ = \sqrt{\gamma_k^2 - \kappa_k^2}$, $f^+(r) = \frac{\chi(r)}{G} - \alpha r \kappa_2 \frac{\cos(\kappa_2 c)}{\sin(\kappa_2 a)}$.

Для того, щоб вивести рівняння (19), використали співвідношення

$$\int_c^a \frac{\partial^2 W^+}{\partial z^2} \cos \gamma_k(z - c) dz = -f^+(r) - \gamma_k^2 W_k^+(r).$$

Обмежений при $r \rightarrow 0$ розв'язок (19) шукаємо у вигляді

$$W_k^+(r) = C_k^+ I_1(p_k r) - \int_0^{r_0} f^+(\eta) g_k^+(\eta, r) d\eta. \quad (20)$$

У виразі (20) $g_k^+(\eta, r)$ – фундаментальна функція рівняння (19), яку можна отримати із формули (16) заміною q_k^- на q_k^+ . Після визначення сталих C_k^- з крайової умови (19) і застосування формули оберненого перетворення (18), отримаємо:

$$W^+(r, z) = \int_0^b \eta \frac{\chi(\eta)}{G} F^+(\eta, r, z) d\eta + \alpha r \frac{\cos(\kappa_2 c) \cdot \sin(\kappa_2(a - z))}{\sin(\kappa_2 a) \cdot \cos(\kappa_2 d)}; \quad (21)$$

$$F^+(\eta, r, z) = -\frac{2}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_k^+(\eta, r) + \frac{K_2(q_k^+ r_0)}{I_2(q_k^+ r_0)} I_1(q_k^+ \eta) \cdot I_1(q_k^+ r) \right) \cdot \cos \gamma(z - c).$$

Як бачимо, формули (7), (10), (17), (21) визначатимуть кутове переміщення у циліндрі за умови, що буде знайдено невідоме дотичне напруження (6) у площині тріщини, коли $r \in [0, b]$. Для цього слід скористатися умовою неперервності у цій площині кутового переміщення:

$$W_1^+(r, c) = W_1^-(r, c), \quad r \in [0, b], \quad (22)$$

з якої на основі виразів (21) і (17) отримаємо інтегральне рівняння:

$$\int_0^b \eta \frac{\chi(\eta)}{G} (F_0^-(\eta, r) - F_0^+(\eta, r)) d\eta = \frac{\alpha r}{\cos(\kappa_2 d)}, \quad r \in [0, b], \quad (23)$$

де
$$F_0^\pm(\eta, r) = F^\pm(\eta, r, c).$$

Щоб розв'язати це рівняння, його попередньо перетворюємо до рівняння Фредгольма другого роду за методикою [15]. Для цього вводим нову невідому функцію

$$\varphi(\tau) = \int \frac{\tau \chi(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - \tau^2}} d\eta, \quad \chi(r) = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_r^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}, \quad \varphi(\tau) \equiv 0, \quad \tau > b \quad (24)$$

і застосовуємо до рівняння (23) оператор $D_1[f](x) = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y f(r) dr$.

Отримаємо:

$$\frac{1}{\pi G} \int_{-b}^b \varphi(\tau) \left[\frac{2}{c} S^-(\tau - x) + \frac{2}{d} S^+(\tau - x) \right] d\tau = \frac{2\alpha x}{\cos(\kappa_2 d)}, \quad (25)$$

де

$$S^\pm(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{\beta \cos \beta(Y)}{\beta^2 + (q_k^\pm)^2} - \frac{K_2(q_k^\pm r_0)}{I_2(q_k^\pm r_0)} ch q_k^\pm Y \right). \quad (26)$$

Для виведення інтегрального рівняння (25) враховано співвідношення

$$\int_0^b \eta \chi(\eta) J_1(\beta \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^b \varphi(\tau) \sin \beta \tau d\tau, \quad \int_0^b \eta \chi(\eta) I_1(q \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^b \varphi(\tau) sh q \tau d\tau$$

$$D_1[J_1(\beta r)] = \sin \beta x, \quad D_1[I_1(qr)] = sh qx, \quad D_1[r] = 2x.$$

Окрім того, функція $\varphi(\tau)$ була непарно продовжена з $[0, b]$ на $[-b, b]$.

Суми рядів у виразі (26) дорівнюють [16]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^2 + (q_k^\pm)^2} = \frac{a^\pm}{2} \frac{th \left(a^\pm \sqrt{\beta^2 - \kappa_2^2} \right)}{\sqrt{\beta^2 - \kappa_2^2}}, \quad a^- = c, \quad a^+ = d.$$

Ця формула і усі попередні перетворення приводять рівняння (25) до вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g(y) [F(y - \varsigma) + Q(y - \varsigma)] dy = \frac{2\alpha \varsigma}{\cos(\kappa_0 \gamma d_0)}. \quad (27)$$

Підінтегральні функції у виразі (27) визначають за формулами

$$F(Y) = \kappa_0 b_0 \int_0^{\infty} B(u) \cos(\kappa_0 b_0 u (y - \varsigma)) du,$$

$$B(u) = \frac{ush(\kappa_0 \gamma q)}{qch(\kappa_0 \gamma c_0 q)ch(\kappa_0 \gamma d_0 q)}, \quad q = \sqrt{u^2 - 1}, \quad (28)$$

$$Q(Y) = Q_1(Y) + Q_2(Y),$$

$$Q_l(Y) = -\frac{4\beta_l b_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_l(\beta_l s_{kl})}{I_2(\beta_l s_{kl})} ch(b_0 \beta_l s_{kl} Y), \quad l=1,2,$$

де використано такі позначення:

$$\begin{aligned} \tau &= by, \quad x = b\zeta, \quad \varphi(by) = Gbg(y), \quad \beta = u\kappa_2, \\ \gamma &= \frac{a}{r_0}, \quad c_0 = \frac{c}{a}, \quad b_0 = \frac{b}{r_0}, \quad d_0 = 1 - c_0, \quad \kappa_0 = r_0 \kappa_2, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2\gamma c_0}, \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2\gamma d_0}, \quad s_{kl} = \sqrt{(2k-1)^2 - \frac{\kappa_2^0}{\beta_l^2}}.$$

Підінтегральна функція $B(u)$ в інтегралі (28), що визначає $F(Y)$, має асимптотику

$$B(u) = 2 + O(e^{-2c_0 \gamma \kappa_0 u} + e^{-2d_0 \gamma \kappa_0 u}), \quad u \rightarrow +\infty.$$

Таким чином, цей інтеграл розбіжний і його значення можна встановити згідно з теорією узагальнених функцій [17]

$$F(Y) = 2\pi\delta(Y) + D(Y), \quad (30)$$

де $\delta(Y)$ – дельта-функція Дірака, а $D(Y)$ визначають рівномірно збіжними інтегралами. Завдяки виразу (30) рівняння (27) набуде вигляду інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$g(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g(y) [D(y - \zeta) + Q(y - \zeta)] dy = \frac{\alpha \zeta \rho}{\cos(\kappa \gamma d_0)}. \quad (31)$$

Щоб визначити невідомий кут повороту накладки, необхідно до рівняння (31) додати ще рівняння (3). Тоді, після введення позначень (24), (29) і перетворень, рівняння (3) набуде вигляду

$$\alpha = -\frac{1}{q} \left(M_0 - 2b_0 \int_{-1}^1 g(y) [Z(y) + U(y)] dy \right), \quad (32)$$

де

$$Z(y) = b\kappa_0 \int_0^{\infty} \frac{J_2(\kappa_0 u) \sin(\kappa_0 b_0 y u)}{\cos(\kappa_0 \gamma d_0 \rho)} du,$$

$$U(y) = -\frac{4\beta_2 b_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)}{s_{k2}} K_2(\beta_2 s_{k2}) sh(b_0 \beta_2 s_{k2} y),$$

$$q = \frac{\pi}{2} (\kappa_0^2 m_* \gamma + \kappa_0 t g(\gamma \kappa_0 d_0)), \quad m_* = m_0 / m_1, \quad M_0 = \frac{M}{G r_0^3},$$

$m_0 = \pi r_0^2 h \rho_0$ – маса накладки; $m_1 = \pi r_0^2 a \rho$ – маса циліндра; h – товщина накладки; ρ_0 – густина накладки.

Наближений розв'язок рівнянь (31) і (32) зводимо до розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь [14], [18]

$$g_j + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n g_m A_m [D(y_m - y_j) + Q(y_m - y_j)] = \frac{\alpha \zeta_j}{\cos(\kappa_0 \gamma d_0)}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (33)$$

$$\alpha = -\frac{1}{q} \left(M_0 - 2b_0 \sum_{m=1}^n g_m [Z(y_m) + U(y_m)] \right),$$

де

$$g_m = g(y_m), \quad A_m = \frac{2}{(1 - y_m^2)[P'_n(y_m)]^2}, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

y_m – корені многочлена Лежандра n -го степеня $P_n(y)$. Після розв'язування системи (33) невідома функція наближається інтерполяційним многочленом

$$g(y) \approx g_n(y), \quad g_n(y) = \sum_{m=1}^n g_m \frac{P_n(y)}{(y - y_m)P'_n(y_m)}. \quad (34)$$

Для механіки руйнування найцікавішим є КІН, який тут визначають формулою

$$K = \lim_{r \rightarrow b+0} \sqrt{b - r} \chi(r).$$

Враховуючи подання (24) і позначення (29) та після здійснення граничного переходу, знайдемо формулу

$$K = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} G\sqrt{b} g(1).$$

Тепер, скориставшись наближенням (34), отримаємо наближене значення КІН:

$$K = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} G\sqrt{b} \sum_{m=1}^n \frac{g_m}{(1 - y_m)[P'_n(y_m)]}. \quad (35)$$

Результати числових розрахунків. Як приклад розглянемо циліндр з алюмінію висотою $a = 0,2$ м, на який діє сталева накладка завтовшки $h = 0,01$ м, навантажена моментом $M = 1000$ н·м. Досліджено залежності абсолютних безрозмірних значень КІН $|k| = |K| / G\sqrt{b}$ і кута повороту $|\alpha|$ від безрозмірної частоти $\kappa_0 = \kappa_2 \cdot r_0$ для різних співвідношень між розмірами циліндра і внутрішнім радіусом тріщини. Результати обчислень показано графічно (рис. 2). Для числового розв'язування інтегрального рівняння (31) у формулі (34) використали до 15 вузлів інтерполяції, що забезпечило в частотному інтервалі $\kappa_0 \in [0, 3]$ відносну похибку меншу 0,1%.

Аналіз графіків показує, що зовнішня тріщина змінює значення резонансних частот циліндра, які за її відсутності визначають рівністю $\kappa_0 \gamma = \pi l, l = 1, 2, \dots, \gamma = a/r_0$. Резонансні максимуми КІН (рис. 2а–с) узгоджуються з резонансними максимумами кута повороту накладки (рис. 2д–ф). Зі збільшенням відношення між висотою та радіусом циліндра γ ($r_0 = 0,2 \dots 0,05$ м) зменшується частота першого резонансу, а кількість резонансних частот у частотному інтервалі $\kappa_0 \in [0, 3]$ зростає. За тих самих розмірів циліндра зі зменшенням внутрішнього радіуса тріщини ($b/r_0 = 0,9 \dots 0,5$) значення КІН зростають у дорезонансній зоні, а також зменшується значення першої резонансної частоти.

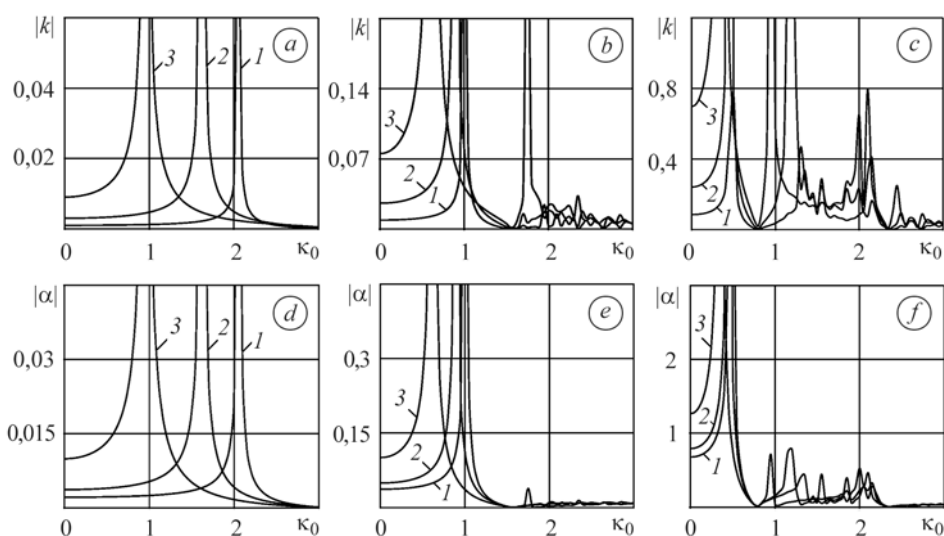


Рис. 2. Залежності КІН (а-с) та кута повороту накладки (d-f) від частоти для різних радіусів циліндра: а, d – $r_0 = 0,20$ м; b, e – $0,10$ м; c, f – $0,05$ м. (1 – $b_0 = 0,9$; 2 – $0,7$; 3 – $0,5$).

Fig. 2. The dependences of SIF (a-c) and the torsion angle of the rigid circular plate on the frequency for different cylinder radii: a, d – $r_0 = 0.20$ m; b, e – 0.10 m; c, f – 0.05 m. (1 – $b_0 = 0.9$; 2 – 0.7 ; 3 – 0.5).

ВИСНОВКИ

Запропоновано новий числово-аналітичний метод визначення напруженого стану у скінченному циліндрі зі зовнішньою кільцевою тріщиною під час крутильних коливань. В результаті аналізу числових результатів, отриманих цим методом, встановлено, що зовнішня тріщина змінює значення резонансних частот циліндра і вони є іншими, ніж у циліндра без тріщини; збільшення відношення між висотою та радіусом циліндра призводить до зменшення частоти першого резонансу; для незмінних розмірів циліндра та зі зменшенням внутрішнього радіуса тріщини збільшується значення КІН у дорезонансній зоні і знижується значення частоти першого резонансу.

РЕЗЮМЕ. Определено напряженное состояние конечного цилиндра с внешней кольцевой трещиной при крутильных колебаниях. Колебания происходят в результате действия гармонического крутильного момента на жесткую накладку, сцепленную с одним из торцов цилиндра. Задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно неизвестных напряжений в плоскости расположения трещины.

SUMMARY. The stress state of a finite elastic cylinder with an external circumferential crack under the torsion oscillations was determined. The oscillations are caused by the harmonic torsion moment influence on the rigid circular plate which is coupled with one of the cylinder ends. The problem is reduced to the Fredgholms integral equation of the second kind with regard to the unknown stress in the plane where a crack is situated.

1. Chen Y. Z. Stress intensity factors a finite length cylinder with a circumferential crack // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. – July 2000. – 77, № 8. – P. 439–444.
2. Jones I. S. and Rothwell G. Reference stress intensity factors with application to weight functions for internal circumferential crush in cylinders // Engineering Fracture Mechanics. – March 2001. – 68, № 4. – P. 435–454.
3. Попов П. Задача про кручення скінченного циліндра з кільцевою тріщиною // Машинознавство. – 2005. – № 9. – С. 15–18.
4. Han Xue-Li and Wang Duo A circular or ring-shaped crack in a no homogeneous cylinder under torsion loading // Int. J. of Fracture. – 1994. – 68, № 3. – P. 79–83.

5. *Ahmet Birinci T. Sucru Ozsahin, and Ragip Erdol* Axisymmetric circumferential internal crack problem a thick-walled cylinder with inner and outer claddings // *European J. of Mechanics-A/Solids*. – 2006. – **25**, № 5. – P. 764–777.
6. *Atsumi A. and Shindo Y.* Torsional Impact Response in an infinite Cylinder With a circumferential Edge Crack // *J. Appl. Mech.* – 1982. – **49**, № 3. – P. 531–536.
7. *Shindo Y. and Li W.* Torsional Impact Response of a Thick-Walled Cylinder With a circumferential Edge crack // *J. Pressure Vessel Technol.* – 1990. – **112-4**, № 4. – P. 367–374.
8. *Vaziri A. and Nayeb-Hashemi* The effect of crack surface interaction on stress intensity factor in Mode III crack growth in round shafts // *Engng. Frac. Mechanics*. – 2005. – **72**, № 4. – P. 617–629.
9. *Scattering of guided waves by circumferential cracks in composite cylinders / H. Bai, A. H. Shah, N. Popplevel, and S. K. Datta* // *Int. J. of Sol. and Struct.* – 2002. – **39**, № 17. – P. 4583–4603.
10. *Bastero J. M. and Martinez-Eshaola* Singular character of axisymmetric Stresses around wedge-shaped notches in cylindrical bodies under torsion: unit step load // *Theoret. and Appl. Fract. Mech.* – 1993. – **18**, № 3. – P. 247–257.
11. *Dimarogonas A. and Massourors G.* Torsional vibration of a shaft with a circumferential crack // *Engng. Fract. Mech.* – 1981. – **15**, № 3–4. – P. 439–444.
12. *Динамічний розтяг циліндричного зразка з кільцевою тріщиною / О. Є. Андрейків, В. М. Бойко, С. Є. Ковчик, І. В. Ходань* // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2000. – **36**, № 3. – С. 59–66.
(*Andreikiv O. E., Boiko V. M., Kovchik S. E., and Khodun I. V.* Dynamic tension of a cylindrical specimen with circumferential crack // *Materials Science*. – 2000. – **36**, № 3. – P. 382–391.)
13. *Напружений стан циліндра з зовнішньою кільцевою тріщиною за динамічного закруту / Я. Л. Іваницький, В. М. Бойко, І. В. Ходань, С. Т. Штайюра* // *Там же*. – 2007. – **43**, № 2. – С. 55–67.
(*Ivanytskyi Ya. L., Boiko V. M., Khodun I. V., and Shtayura S. T.* Stress-strain state of a cylinder with an external circular crack under dynamic torsion // *Ibid.* – 2007. – **43**, № 2. – P. 203–214.)
14. *Попов Г. Я., Реут В. В., Вайсфельд Н. Д.* Рівняння математичної фізики. Метод інтегральних перетворень. – Одеса: Астропринт, 2005. – 184 с.
15. *Вахонина Л. В., Попов В. Г.* Концентрация напряжений вблизи кругового тонкого абсолютно жесткого отслоившегося включения при взаимодействии с волной кручения // *Механика твердого тела. Известия РАН*. – 2004. – № 4. – С. 70–76.
16. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 799 с.
17. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 520 с.
18. *Вахонина Л. В., Попов В. Г.* Взаимодействие упругих волн с тонким жестким круговым включением в случае гладкого контакта // *Теоретическая и прикладная механика*. – 2003. – № 38. – С. 158–166.

Одержано 10.05.2011