

УДК 539.3

НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ДЛЯ БІМАТЕРІАЛУ З ТРІЩИНОЮ ТА ПРОШАРКОМ

І. Я. ЖБАДИНСЬКИЙ¹, В. З. СТАНКЕВИЧ²

¹ *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів;*

² *Львівська філія Дніпропетровського національного університету залізничного
транспорту ім. В. Лазаряна*

Розглянуто динамічну задачу взаємодії плоскої кругової тріщини з тонким пружним прошарком, що з'єднує два однакові пружні півпростори. Тріщина розташована в одному з півпросторів перпендикулярно до прошарку, а її поверхні зазнають дії розривних імпульсних зусиль. Тонкий прошарок моделюють умовами неідеального контакту півпросторів. У перетвореннях Фур'є за часом задача зведена до граничного інтегрального рівняння типу потенціалу Гельмгольца відносно функції динамічного розкриття тріщини. Шляхом його числового розв'язування та визначення оригіналів отримані часові залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень розриву в околі тріщини від виду динамічних навантажень, співвідношень між пружними параметрами півпросторів і прошарку та відстані від тріщини до прошарку.

Ключові слова: *тривимірний біматеріал, тонкий прошарок, плоска кругова тріщина, імпульсні зусилля, динамічний коефіцієнт інтенсивності напружень, метод граничних інтегральних рівнянь.*

Дослідження нестационарних процесів у шаруватих композитах типу біматеріалу з тріщинами показало суттєві відмінності у поведінці динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) [1–5] в околі тріщини як від статичних аналогів, так і динамічних для однорідних тіл з тріщинами типу безмежного тіла і півпростору. Ці відмінності зумовлені інерційними ефектами від взаємодії дефектів з міжфазною поверхнею, що необхідно враховувати, оцінюючи міцнісні характеристики композитних структур. Результати відповідних задач отримані для ідеального [6–9] та неідеального [10] з проковзуванням спряження пружних компонент тіла. Нижче згадані ефекти досліджено за неідеального з'єднання однакових пружних півпросторів, яке створює тонкий (відносно довжини збурювальної хвилі) податливий (з малим відносно матричного матеріалу модулем зсуву) прошарок. Пошкодження ідеальних зв'язків у тривимірному тілі можливе в результаті адгезії, протікання міжфазних хімічних реакцій чи зміни механічних властивостей компонент у зоні контакту внаслідок втоми від змінних у часі навантажень. Для розв'язування задачі використано метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР), узагальнений на випадок ускладнених умов контакту на поверхні спряження кусково-однорідного тіла з тріщиною.

Постава задачі. Розглянемо тривимірне кусково-однорідне тіло, яке складається з двох пружних півпросторів A і B з однаковими пружними характеристиками матеріалів – густиною ρ , модулем зсуву G і Пуассоновим коефіцієнтом ν . Півпростори з'єднані тонким пружним податливим прошарком товщиною h і параметрами ρ^0, G^0, ν^0 . Півпростір A містить плоску тріщину, яка займає кругову область S радіуса a , розташовану перпендикулярно до серединної поверхні S^0 про-

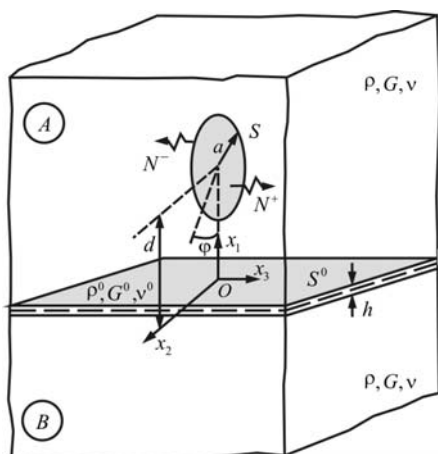


Рис. 1. Схема задачі.

Fig. 1. Scheme of the problem.

решення Фур'є за часом з урахуванням умов причинності та нульових початкових умов мають вигляд [11]

$$\omega_1^{-2} \nabla \cdot (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^D) - \omega_2^{-2} \nabla \times (\nabla \times \hat{\mathbf{u}}^D) + \hat{\mathbf{u}}^D = 0, \quad D = A, B. \quad (1)$$

Тут і надалі знак “тильда” означає Фур'є-трансформанту відповідної величини; ∇ – тривимірний Гамільтонів оператор; $\omega_n = \omega/c_n$, $n=1,2$; ω – параметр перетворення Фур'є; c_1, c_2 – швидкості поширення у тілі поздовжньої і поперечної пружних хвиль.

Виходячи з тонкості ($\omega_2 h < 1$) і механічних властивостей прошарку ($G^0 \ll G$), скористаємось крайовими умовами стрибків переміщень \hat{u}_j^D ($D=A, B, j=\overline{1,3}$) за дотримання неперервності відповідних напружень $\hat{\sigma}_{j1}^D$ на серединній поверхні S^0 для запису крайових умов у вигляді [12]

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^A(\mathbf{x}) &= \hat{\sigma}_{11}^B(\mathbf{x}) = 2G^0 \left[(1-\nu^0)/(1-2\nu^0) \right] \left[\hat{u}_1^A(\mathbf{x}) - \hat{u}_1^B(\mathbf{x}) \right] / h, \\ \hat{\sigma}_{n1}^A(\mathbf{x}) &= \hat{\sigma}_{n1}^B(\mathbf{x}) = G^0 \left[\hat{u}_n^A(\mathbf{x}) - \hat{u}_n^B(\mathbf{x}) \right] / h, \quad n=2,3, \quad \mathbf{x}(x_2, x_3) \in S^0; \end{aligned} \quad (2)$$

крайові умови на поверхнях тріщини

$$\hat{\sigma}_{33}^A(\mathbf{x}) = -\hat{N}(\mathbf{x}, \omega), \quad \hat{\sigma}_{n3}^A(\mathbf{x}) = 0, \quad n=1,2, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (3)$$

де $\hat{u}_j^D, \hat{\sigma}_{ij}^D, \hat{N}$ ($D=A, B; i, j=\overline{1,3}$) – відповідно Фур'є-зображення компонент вектора переміщень, тензора напружень і вектора заданих зусиль на тріщині.

Розв'язування задачі. Диференційне рівняння (1) та крайові умови (2), (3) відповідають також задачі про усталене у часі навантаження тріщини у кусково-однорідному тілі з прошарком, якщо трансформанти функцій замінити амплітудами відповідних величин, а параметр перетворення ототожнити з циклічною частотою коливань.

Суперпозиційну природу хвильового поля у розглянутому тілі подамо векторами переміщень

$$\hat{\mathbf{u}}^A = \nabla \hat{\phi}^A + \nabla \times \hat{\psi}^A + \hat{\mathbf{u}}^{A(1)}, \quad \hat{\mathbf{u}}^B = \nabla \hat{\phi}^B + \nabla \times \hat{\psi}^B, \quad (4)$$

шарку. Протилежні поверхні S^\pm тріщини зазнають дії самозрівноважених розривних змінних у часі t зусиль $\mathbf{N}^+(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{N}^-(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}, t)$. Вважаємо, що під час навантаження контур дефекту залишається нерухомим. Декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ вибрано так, щоб поверхня S^0 прошарку містилась у площині x_2Ox_3 , а тріщина – в площині $x_3 = 0$ (рис. 1). Задача дослідження напружено-деформованого стану тіла зводиться до розв'язування диференційних рівнянь руху Ламе відносно компонент вектора переміщень $\mathbf{u}^D (u_1^D, u_2^D, u_3^D)$, які у перетвореннях Фур'є за часом з урахуванням умов причинності та нульових початкових умов мають вигляд [11]

$$\omega_1^{-2} \nabla \cdot (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^D) - \omega_2^{-2} \nabla \times (\nabla \times \hat{\mathbf{u}}^D) + \hat{\mathbf{u}}^D = 0, \quad D = A, B. \quad (1)$$

Тут і надалі знак “тильда” означає Фур'є-трансформанту відповідної величини; ∇ – тривимірний Гамільтонів оператор; $\omega_n = \omega/c_n$, $n=1,2$; ω – параметр перетворення Фур'є; c_1, c_2 – швидкості поширення у тілі поздовжньої і поперечної пружних хвиль.

Виходячи з тонкості ($\omega_2 h < 1$) і механічних властивостей прошарку ($G^0 \ll G$), скористаємось крайовими умовами стрибків переміщень \hat{u}_j^D ($D=A, B, j=\overline{1,3}$) за дотримання неперервності відповідних напружень $\hat{\sigma}_{j1}^D$ на серединній поверхні S^0 для запису крайових умов у вигляді [12]

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^A(\mathbf{x}) &= \hat{\sigma}_{11}^B(\mathbf{x}) = 2G^0 \left[(1-\nu^0)/(1-2\nu^0) \right] \left[\hat{u}_1^A(\mathbf{x}) - \hat{u}_1^B(\mathbf{x}) \right] / h, \\ \hat{\sigma}_{n1}^A(\mathbf{x}) &= \hat{\sigma}_{n1}^B(\mathbf{x}) = G^0 \left[\hat{u}_n^A(\mathbf{x}) - \hat{u}_n^B(\mathbf{x}) \right] / h, \quad n=2,3, \quad \mathbf{x}(x_2, x_3) \in S^0; \end{aligned} \quad (2)$$

крайові умови на поверхнях тріщини

$$\hat{\sigma}_{33}^A(\mathbf{x}) = -\hat{N}(\mathbf{x}, \omega), \quad \hat{\sigma}_{n3}^A(\mathbf{x}) = 0, \quad n=1,2, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (3)$$

де $\hat{u}_j^D, \hat{\sigma}_{ij}^D, \hat{N}$ ($D=A, B; i, j=\overline{1,3}$) – відповідно Фур'є-зображення компонент вектора переміщень, тензора напружень і вектора заданих зусиль на тріщині.

Розв'язування задачі. Диференційне рівняння (1) та крайові умови (2), (3) відповідають також задачі про усталене у часі навантаження тріщини у кусково-однорідному тілі з прошарком, якщо трансформанти функцій замінити амплітудами відповідних величин, а параметр перетворення ототожнити з циклічною частотою коливань.

Суперпозиційну природу хвильового поля у розглянутому тілі подамо векторами переміщень

$$\hat{\mathbf{u}}^A = \nabla \hat{\phi}^A + \nabla \times \hat{\psi}^A + \hat{\mathbf{u}}^{A(1)}, \quad \hat{\mathbf{u}}^B = \nabla \hat{\phi}^B + \nabla \times \hat{\psi}^B, \quad (4)$$

де $\hat{\mathbf{u}}^{A(1)}$ описує хвильове поле, зумовлене динамічним розкриттям тріщини. Скалярні потенціали $\hat{\phi}^D$ ($D=A, B$) поздовжніх і векторні $\hat{\psi}^D$ ($\hat{\psi}_1^D, \hat{\psi}_2^D, \hat{\psi}_3^D$) поперечних хвиль задовольняють рівняння Гельмгольца і відповідають за внесок у загальне поле відбитих ($\hat{\phi}^A, \hat{\psi}^A$) та заломлених ($\hat{\phi}^B, \hat{\psi}^B$) на прошарку хвиль.

Інтегральні подання компонент $\hat{u}_j^{A(1)}(\mathbf{x}, \omega)$, $j=\overline{1,3}$ вибрані у вигляді [12]

$$\hat{u}_j^{A(1)}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} \mathbf{P}_{jn}^x \iint_S \Delta \hat{u}^A(\xi, \omega) \frac{\exp(i\omega_n |\mathbf{x}-\xi|)}{|\mathbf{x}-\xi|} dS_\xi, \quad j=1,3, \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_{j1}^x = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{2}{\omega_2^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right), \quad \mathbf{P}_{j2}^x = \mathbf{P}_{j1}^x + 2 \left(\delta_{j1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta_{j2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j},$$

де $|\mathbf{x}-\xi|$ – відстань між актуальною точкою \mathbf{x} півпростору A і точкою інтегрування ξ ; $\Delta \hat{u}^A(\mathbf{x}, \omega) = [\hat{u}_3^{A-}(\mathbf{x}, \omega) - \hat{u}_3^{A+}(\mathbf{x}, \omega)] / 4\pi$ ($\mathbf{x} \in S$, $\hat{u}_3^{A\pm}(\mathbf{x}, \omega) = \lim_{x_3 \rightarrow \pm 0} \hat{u}_3^A(\mathbf{x}, \omega)$) –

функція динамічного розкриття тріщини у напрямку осі Ox_3 ; δ_{ij} – Кронекерів символ.

Функції $\hat{\phi}^D, \hat{\psi}^D$ ($D=A, B$) співвідношень (4) вибрали у вигляді потенціалів Гельмгольца

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^{\left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\}}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \iint_{S^0} \alpha^{\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \right\}}(\xi) \frac{\exp(i\omega_1 |\mathbf{x}-\xi|)}{|\mathbf{x}-\xi|} dS_\xi, \\ \hat{\psi}_n^{\left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\}}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \iint_{S^0} \alpha^{\left\{ \begin{matrix} 1+n \\ 4+n \end{matrix} \right\}}(\xi) \frac{\exp(i\omega_2 |\mathbf{x}-\xi|)}{|\mathbf{x}-\xi|} dS_\xi, \\ n=1,2, \quad \hat{\psi}_3^{\left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\}}(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Задовольнивши крайові умови (2) за допомогою співвідношень (4)–(6), отримали систему інтегральних рівнянь другого роду відносно невідомих густин потенціалів α_j ($j=\overline{1,6}$)

$$\sum_{n=1}^6 \left\{ \Lambda_{jn}^x [\alpha_n(\mathbf{x})] + \sum_{m=1}^2 \Phi_{jnm}^x \left[\iint_{S^0} \alpha_n(\eta) \frac{\exp(i\omega_m |\mathbf{x}-\eta|)}{|\mathbf{x}-\eta|} dS_\eta \right] \right\} = p_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S^0, \quad (7)$$

де

$$p_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \hat{u}_j^A(\mathbf{x}) & \text{для } j=\overline{1,3}, \\ \frac{1}{2G} \hat{\sigma}_{(j-3)1}^A(\mathbf{x}) & \text{для } j=\overline{4,6}; \end{cases}$$

$\Lambda_{jn}^x, \Phi_{jnm}^x$ – диференціальні оператори, наведені в праці [12].

Густини α_j визначають з рівнянь (7), застосовуючи до останніх двовимірне інтегральне перетворення Фур'є за координатами x_2, x_3 , з подальшим використанням під час обернення теореми про згортку

$$\alpha_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^6 \iint_{S^0} p_n(\eta) \int_0^\infty \frac{\tau}{F_1(\tau)F_2(\tau)} \mathbf{U}_{jn}^\eta [J_0(\tau|\mathbf{x}-\eta|)] d\tau dS_\eta, \quad \mathbf{x} \in S^0, \quad j=\overline{1,6}. \quad (8)$$

У рівнянні (8) диференціальні оператори \mathbf{U}_{jn}^η за змінними η_1, η_2 , наведені у праці [12]; $J_n(z)$ – Бесселева функція першого роду n -го порядку дійсного аргументу z ; $F_1(\tau) = HR(\tau) - 4\omega_2^2 V_2(\tau)$, $F_2(\tau) = KR(\tau) - 4\omega_2^2 V_1(\tau)$ – модифіковані функції Релея; $R(\tau) = (2\tau^2 - \omega_2^2)^2 - 4\tau^2 V_1(\tau) V_2(\tau)$ – функція Релея; $K = hG^*(1 - 2\nu^0)/(1 - \nu^0)$, $H = 2hG^*$, $G^* = G/G^0$, $V_j(\tau) = \sqrt{\tau^2 - \omega_j^2}$, $j=1,2$. Параметр ω в структурі функцій $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$ свідчить про геометричну дисперсію згенерованих відбиттям та заломленням на прошарку хвиль.

Скориставшись формулою (8), отримали подання для потенціалів (6) через функцію $\Delta \hat{u}^A$ розкриття тріщини. Підставивши ці вирази у співвідношення (4) та задовольнивши ними крайові умови (3) на поверхнях тріщини, отримали двовимірне ГІР типу потенціалу Гельмгольца по обмеженій області S тріщини відносно функції $\Delta \hat{u}^A$ у вигляді

$$\iint_S \Delta \hat{u}^A(\xi, \omega) \left[L(|\mathbf{x} - \xi|, \omega) - \bar{L}(|\bar{\mathbf{x}} - \xi|, \omega) \right] dS_\xi = \frac{\omega_2^2}{4G} \hat{N}(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (9)$$

Ядро L ГІР (9) таке ж, як для тріщини в однорідному тілі

$$L(r) = \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} M_n(r) \frac{\exp(i\omega_n r)}{r^5}, \quad (10)$$

$$M_n(r) = 9 - 9i\omega_n r + (\omega_2^2 - 5\omega_n^2)r^2 + i\omega_n(2\omega_n^2 - \omega_2^2)r^3 + \delta_{1n}(2\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 r^4,$$

а ядро \bar{L} описує взаємодію тріщини з прошарком і має таку структуру

$$\begin{aligned} \bar{L}(\bar{\mathbf{x}}, \xi) = & M_1(\bar{\mathbf{x}}, \xi) \frac{\exp(i\omega_1 |\bar{\mathbf{x}} - \xi|)}{|\bar{\mathbf{x}} - \xi|^5} + \\ & + 2 \int_0^\infty \tau \sum_{n,m=1}^2 \Omega_{nm}(|x_2 - \xi_2|, \tau) \exp[-x_1 V_m(\tau) - \xi_1 V_n(\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Тут точка $\bar{\mathbf{x}}(-x_1, x_2)$ – симетричне відображення точки $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ у півпростір B ;

$$\begin{aligned} \Omega_{11}(r, \tau) = & 2 \left[\frac{H\tau^2 V_2(\tau)}{F_1(\tau)} + \frac{K\tau^2 V_2(\tau) + \omega_2^2}{F_2(\tau)} \right] \times \\ & \times \left[\frac{\nu^2 \omega_2^4}{4(1-\nu)^2} J_0(\tau r) + \frac{\nu \omega_2^2}{(1-\nu)r} J_1(\tau r) + \frac{3\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{22}(r, \tau) = & \left\{ \frac{[HV_2(\tau)[2HV_1(\tau)V_2^2(\tau) + 2\omega_2^2 + 8V_2^2(\tau)]]}{F_1(\tau)} + \frac{2KV_1(\tau)V_2^2(\tau)[HV_2(\tau) + 4]}{F_2(\tau)} \right\} + \\ & + \frac{H}{4} \left\{ \frac{3\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) - \frac{H\omega_2^2}{2} \frac{\tau}{r} J_1(\tau r) \right\} / [HV_2(\tau) + 4], \end{aligned}$$

$$\Omega_{12}(r, \tau) = \Omega_{21}(r, \tau) = V_2(\tau)(2\tau^2 - \omega_2^2) \left[\frac{H}{F_1(\tau)} + \frac{K}{F_2(\tau)} \right] \left[\frac{\nu \omega_2^2}{2(1-\nu)r} J_1(\tau r) + \frac{3\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) \right].$$

Підінтегральний вираз ядра \bar{L} має усунві особливості в точках, які співпадають з дійсними коренями функцій $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$. Ці корені залежать від частоти ω і визначаються числово.

Рівняння (9) є гіперсингулярне, що впливає із асимптотичного розвою ядра (10) в околі полюса ξ

$$L(|\mathbf{x}-\xi|, \omega) = \frac{\omega_2^2}{4(1-\nu)} \left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|^3} + \frac{A\omega_2^2}{|\mathbf{x}-\xi|} \right] + O(1),$$

де $A = [7 - 12\nu + 8\nu^2] / 8(1-\nu)$.

Подальша методика регуляризації ГІР (9) описана в праці [12]. При цьому функція розкриття тріщини подана у виді

$$\Delta \hat{u}^A(\mathbf{x}, \omega) = \sqrt{a^2 - (x_1 - d)^2 - x_2^2} \hat{\alpha}(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (11)$$

де $\hat{\alpha}$ – невідома функція, яка підлягає визначенню. Подання (11) узгоджується з фізичним змістом функції $\Delta \hat{u}^A$ як стрибка нормальних переміщень на тріщині.

Під час розв'язування ГІР (9) проводили дискретизацію області тріщини в полярній системі координат шляхом розбиття чотирикутними граничними елементами, в межах кожного з яких значення $\hat{\alpha}$ приймали сталими. При цьому вибирали 11 точок розбиття за радіальною і 24 – за кутовою φ координатами. Півбезмежний інтервал інтеграла ядра \bar{L} розбивали на проміжки інтегрування $[0, \omega_1]$, $[\omega_1, \omega_2]$ і $[\omega_2, \infty]$ з відповідним умовам випромінювання вибором гілок радикалів $V_j(\tau)$. На перших двох інтервалах інтеграл обчислювали за допомогою квадратур Гауса, на третьому – квадратур Лагерра. Інтегральне рівняння задачі зводили до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь відносно дискретних значень $\hat{\alpha}$. Функцію навантаження вибирали у виді $N(\mathbf{x}, t) = N_0 T(t)$, $N_0 = \text{const}$.

За допомогою значень функції $\hat{\alpha}$ в точках контуру тріщини та спектрально-го синтезу визначали КІН відриву як функції кутової координати і часу

$$K_I(\varphi, t) = -\frac{4G\sqrt{\pi a}}{1-\nu} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \hat{\alpha}(\mathbf{x}, \omega) \Big|_{\substack{x_1 = d - a \cos \varphi \\ x_2 = a \sin \varphi}} \hat{T}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \right], \quad (12)$$

де функція $\hat{\alpha}$ – розв'язок рівняння (9) після підстановки в нього подання (11) та з правою частиною $\hat{N}(\mathbf{x}, \omega) = N_0$.

Числові результати. Коефіцієнти Пуассона компонент композита приймали однаковими $\nu = \nu^0 = 0,3$; товщина прошарку $h = 0,01a$.

За ударних зусиль на поверхнях тріщини у вигляді функції Гевісайда (рис. 2) нормовані КІН \bar{K}_I розриву стрімко зростають до своїх пікових значень, а потім з коливаннями в області великих часів прямують до статичних аналогів. Взаємодія тріщини з прошарком починається з моменту часу, необхідного поздовжній хвилі для пробігу подвоєної відстані між прошарком та найближчою до нього точкою контуру дефекту (до цього часу криві співпадають). Збільшення параметра G^* призводить до зростання значень \bar{K}_I . КІН для тріщини поблизу прошарку більші порівняно з тріщиною в однорідному тілі і менші, ніж у півпросторі з вільною поверхнею (рис. 2a).

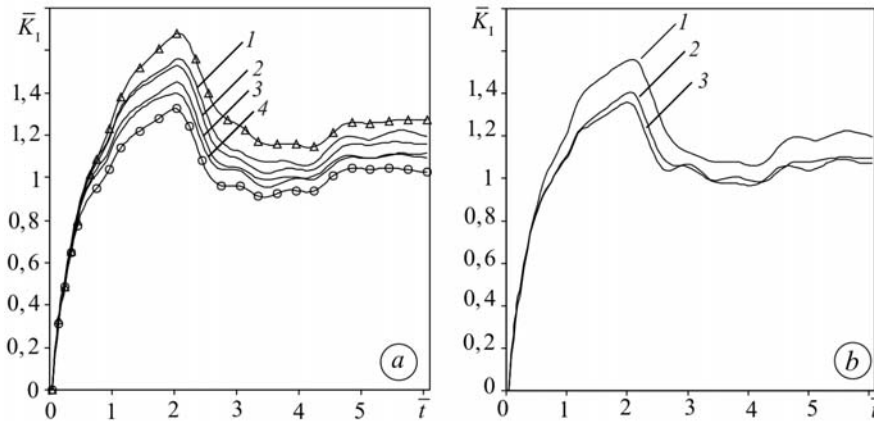


Рис. 2. Залежності відносного КІН розриву $\bar{K}_I = K_I / K^{st}$ від безрозмірного часу $\bar{t} = tc_2 / a$ в околі точок контуру кругової тріщини під нестационарним навантаженням $N(x, t) = N_0 H(t)$ ($N_0 = \text{const}$, $H(t)$ – функція Гевісайда, $K^{st} = 2 N_0 \sqrt{a/\pi}$ – статичний КІН розриву для тріщини в безмежному однорідному тілі під навантаженням N_0): $a - \varphi = 0^\circ$, $d = 1,1a$: 1 – $G^* = G/G^0 = 200$; 2 – $G^* = 100$; 3 – 50; 4 – 20; \circ – безмежне однорідне тіло; \triangle – півпростір; $b - G^* = 200$, $d = 1,1a$: 1 – $\varphi = 0^\circ$; 2 – 90° ; 3 – 180° .

Fig. 2. Dependences of the relative mode-I stress intensity factor (SIF) $\bar{K}_I = K_I / K^{st}$ versus dimensionless time $\bar{t} = tc_2 / a$ in the vicinity of a penny-shaped crack front point under nonstationary loading $N(x, t) = N_0 H(t)$ ($N_0 = \text{const}$, $H(t)$ – Heaviside function, $K^{st} = 2 N_0 \sqrt{a/\pi}$ – static mode-I SIF for the crack in a homogeneous solid under loading N_0): $a - \varphi = 0^\circ$, $d = 1,1a$: 1 – $G^* = G/G^0 = 200$; 2 – $G^* = 100$; 3 – 50; 4 – 20; \circ – infinity homogeneous solid; \triangle – halfspace; $b - G^* = 200$, $d = 1,1a$: 1 – $\varphi = 0^\circ$; 2 – 90° ; 3 – 180° .

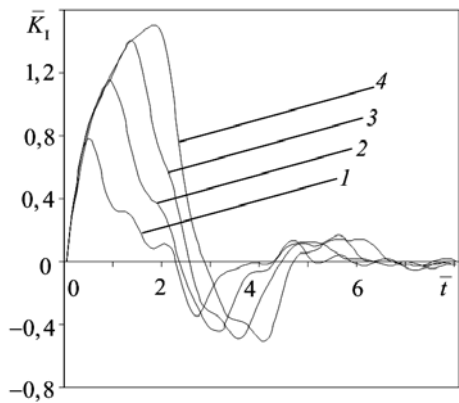


Рис. 3. Залежності відносного КІН розриву $\bar{K}_I = K_I / K^{st}$ від безрозмірного часу $\bar{t} = tc_2 / a$ в околі точки контуру кругової тріщини з кутовою координатою $\varphi = 0^\circ$ під нестационарним навантаженням $N(x, t) = N_0 T(t)$ ($N_0 = \text{const}$, $T(t)$ – часова функція сходинок профілю: $T(t) = 1$ для $0 < t \leq ka/c_2$; $T(t) = 0$ для всіх решта t); $G^* = 200$, $d = 1,1a$: 1 – $k = 0,5$; 2 – 1; 3 – 1,5; 4 – 2.

Fig. 3. Dependences of the relative mode-I SIF $\bar{K}_I = K_I / K^{st}$ versus dimensionless

$\bar{t} = tc_2 / a$ in the vicinity of a penny-shaped crack front point with angular coordinate $\varphi = 0^\circ$ under nonstationary loading $N(x, t) = N_0 T(t)$ ($N_0 = \text{const}$, $T(t)$ – time step function, $T(t) = 1$ for $0 < t \leq ka/c_2$; $T(t) = 0$ for the other t); $G^* = 200$, $d = 1,1a$: 1 – $k = 0,5$; 2 – 1,0; 3 – 1,5; 4 – 2,0.

У разі навантаження поверхонь тріщини імпульсними зусиллями сходинок профілю (рис. 3) значення \bar{K}_I зростають впродовж дії навантаження. Після розвантаження КІН спадають, приймають від'ємних значень (відбувається змикання поверхонь дефекту) і з часом виходять на нульові значення. Збільшення тривалості імпульсу призводить до зростання пікових значень \bar{K}_I .

РЕЗЮМЕ. Рассмотрено динамическую задачу взаимодействия плоской круговой трещины с тонкой упругой прослойкой, разделяющей два одинаковых упругих полупространства. Трещина расположена в одном из полупространств перпендикулярно к прослойке, а ее поверхности нагружены разрывными импульсными усилиями. Связующий тонкий элемент моделируется условиями неидеального контакта полупространств. В преобразованиях Фурье по времени задача сведена к граничному интегральному уравнению типа потенциала Гельмгольца относительно функции динамического раскрытия трещины. Посредством его численного решения и определения оригиналов получены временные зависимости коэффициентов интенсивности напряжений разрыва в окрестности трещины от видов динамических нагрузок, соотношений между упругими параметрами полупространств и прослойки, расстояния от трещины к прослойке.

SUMMARY. A dynamic problem on the interaction between a penny-shaped crack and a thin elastic interlayer, which divides two similar elastic half-spaces, is considered. A crack is embedded in one of the half-spaces perpendicular to the interlayer, tensile normal impact loadings are applied to the crack faces. Effective “spring-like” boundary conditions are applied to substitute the thin interlayer into mathematical model. In the Fourier time transform domain the problem is reduced to the Helmholtz potential type boundary integral equation relative to the crack opening function. By the numerical solution of equations and determination of originals the temporal dependencies of mode-I stress intensity factor in the vicinity of the penny-shaped crack, are obtained for the different types of normal dynamic loading, surrounding-interlayer material combinations and crack-interlayer distances.

Робота виконана за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект Ф40.1/018).

1. *Sih G. C. and Chen E. P.* Normal and shear impact of layered composite with a crack: dynamic stress intensification // *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* – 1980. – **47**. – P. 351–358.
2. *Sih G. C. and Chen E. P.* Axisymmetric elastodynamic response from normal and radial impact of layered composites with embedded penny-shaped crack // *Int. J. Solids and Structures.* – 1980. – **16**. – P. 1093–1107.
3. *Lei J., Wang Y. S., and Gross D.* Dynamic interaction between a sub-interface crack and the interface in a bi-material time-domain BEM analysis // *Arch. Appl. Mech.* – 2003. – **73**. – P. 225–240.
4. *Kuo C. H. and Keer L. M.* Three-dimensional analysis of cracking in a multi layered composite // *J. Appl. Mech.* – 1995. – **62**. – P. 273–281.
5. *Noda N. A., Kouyama T., and Kinoshita Y.* Stress intensity factors of an inclined elliptical crack near a bimaterial interface // *Engng. Fract. Mech.* – 2006. – **73**. – P. 1292–1320.
6. *Stress intensity factors for penny-shaped cracks perpendicular to graded interfacial zone of bonded bi-materials / H. T. Xiao, Z. Q. Yue, L. G. Tham, and Y. R. Chen // Ibid.* – 2005. – **72**. – P. 121–143.
7. *Variation of the stress intensity factors for a planar crack parallel to a bimaterial interface / C. Xu, T. Qin, L. Yuan, and N. A. Noda // Struct. Engng. Mech.* – 2008. – **30**. – P. 317–330.
8. *Михаськів В. В., Жбядинський І. Я.* Розв’язування нестационарних задач для складеного тіла з тріщиною методом інтегральних рівнянь // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2007. – **43**, № 1. – С. 33–42.
(*Mykhas'kiv V. V. and Zhabdys'kyi I. Ya.* Solution of Nonstationary Problems for Composite Bodies with Cracks by the Method of Integral Equations // *Materials Science.* – 2007. – **43**, № 1. – P. 27–37.)
9. *Станкевич В. З.* Інтенсивність напружень біля тріщини в композиції півпростору і шару під гармонічним навантаженням // *Там же.* – 2008. – **51**, № 2. – С. 27–32.
(*Stankevych V. Z.* Stress Intensity near a Crack in the Composition of a Half Space and a Layer under Harmonic Loading // *Ibid.* – 2008. – **51**, № 2. – P. 175–182.)
10. *Динамічні напруження у складеному тілі з круговою тріщиною за ковзного контакту його компонент / В. В. Михаськів, В. З. Станкевич, С. В. Глушков, Н. В. Глушкова // Мат. методи і фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 1. – С. 80–87.
11. *Pujol J.* Elastic wave propagation and generation in seismology. – New York: Cambridge University Press, 2003. – 444 p.
12. *3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces / V. Mykhas'kiv, V. Stankevych, I. Zhabdyskyi, and Ch. Zhang // Int. J. of Fracture.* – 2009. – **159**, № 2. – P. 137–149.

Одержано 27.11.2010