

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ МОДУЛІВ ПРУЖНОСТІ ШАРУВАТИХ БАЛОК НА ОСНОВІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА РОЗРАХУНКОВИХ МОДЕЛЕЙ

Б. М. ДІВЕСВ¹, І. С. КОГУТ², І. Б. БУТИТЕР², Г. Т. ЧЕРЧИК³

¹ Національний університет "Львівська політехніка";

² Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, Львів;

³ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

На основі теорії вищого порядку для шаруватих анізотропних пластин та експериментально визначених прогинів за триточкового згину шаруватих балок запропонована методика ідентифікації їх модулів пружності. Теоретична модель враховує зсувні і нормальні деформації та напруження. Модулі знайдено на основі мінімізації відхилень експериментальних значень прогинів від розрахункових.

Ключові слова: шаруваті балки, модулі пружності, триточковий згин, ідентифікація модулів пружності, теорії вищого порядку

Шаруваті композитні тонкостінні елементи широко застосовують у сучасних конструкціях. Для визначення їх пружних, вібраційних, звукозахисних та міцнісних властивостей необхідні модулі пружності шарів тонкостінного елемента, які невідомі, тому актуально розробити методи їх ідентифікації.

Сьогодні детальніше опрацьовані методи визначення механічних характеристик волокнистих композиційних матеріалів за заданими механічними та геометричними параметрами [1, 2]. Задача визначення механічних характеристик на основі експериментальних результатів є обернена задача механіки. Цей клас задач менше досліджений, особливо для складних композитних структур. Відомий [3] метод статичного експерименту, за яким можна визначити окремо модуль Юнга за розтягу під певним кутом ортотропної балки. У загальнішому підході [4] запропоновано специфічний вибір поля деформацій, який анулює внески всіх компонент тензора деформацій, окрім одного для певного модуля. Так вдається теоретично визначити окремо кожний з модулів. Але необхідно реалізувати ці поля деформації в схемах експерименту. Іноді для дослідження модулів пружності застосовують зразки спеціальної форми та спеціальне навантаження [5], щоб виокремлювати складники енергії деформації пластини, пов'язані з окремими модулями пружності. Однак ця методика не знайшла достатнього експериментального підтвердження.

Для адекватного відтворення механічних властивостей шаруватих тонкостінних елементів слід застосувати уточнені розрахункові схеми [6, 7]. Зокрема, запропоновані [8] "уніфіковані" схеми, в яких порядок рівнянь, отриманих на основі змішаного варіаційного принципу Рейснера, не обмежений (розглядають довільну кількість апроксимацій за товщиною пластини). Проте необхідно вивчити збіжність таких апроксимацій.

Запропоновано [9, 10] адаптивний алгоритм на основі узагальнених кінематичних апроксимацій і класичного методу Гальоркіна для еліптичної системи рівнянь лінійної теорії пружності, в якому гарантують існування і єдиність розв'язку задачі про напружено-деформований стан у шаруватих елементах за циліндричного згину.

Контактна особа: Б. М. ДІВЕСВ, e-mail: divboglviv@yahoo.com

Нижче за схемою триточкового згину балки та уточненими розрахунковими схемами розроблена методика визначення модулів Юнга і зсуву однорідної балки, лицевого шару і заповнювача тришарової балки. Характеристики пружності знайдено на основі мінімізації відхилень розрахункових значень прогинів балки від експериментальних.

Основні математичні співвідношення. Розглянемо такі кінематичні апроксимації ($U = U_e \cup U_d$) для симетричної тришарової балки (сандвіча) завтовшки $2H_p$ і внутрішнім шаром $2H$ (рис. 1):

$$U_e - \begin{cases} u = \sum_{i,k} u_{ik}^e z^{2i-1} \varphi_k(x), \\ w = \sum_{i,k} w_{ik}^e z^{2i-2} \gamma_k(x), \end{cases} \quad U_d - \begin{cases} u = \sum_{i,k} u_{ik}^d (z-H)^i \varphi_k(x), \\ w = \sum_{i,k} w_{ik}^d (z-H)^i \gamma_k(x), \end{cases} \quad (1)$$

$$0 < z < H, \quad H < z < H_p, \\ 0 < x < L, \quad 0 < x < L,$$

де u , w – відповідно тангенціальні та нормальні переміщення шарів; u_{ik}^e , w_{ik}^e , u_{ik}^d , w_{ik}^d – невідомі величини; $\varphi_k(x) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{L/2}$, $\gamma_k(x) = \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L/2}$ – координатні функції, які залежать від крайових умов на краях балки.

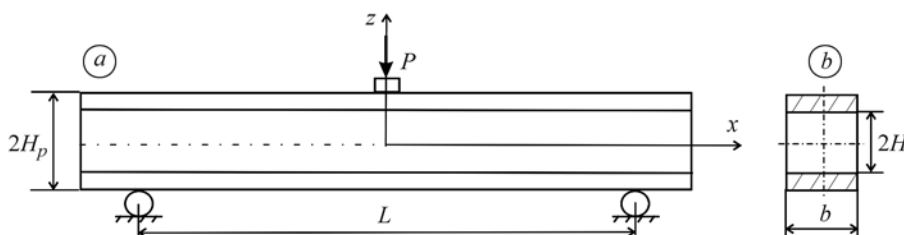


Рис. 1. Схема навантаження (а) і перетин балки (b).

Fig. 1. Loading modes of a beam (a) and beam cross-section (b) (schematically).

Узагальнений закон Гука для циліндричного згину шарів балки буде [1, 2]:

$$\sigma_{xx} = C_{xx}\varepsilon_{xx} + C_{xz}\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{zz} = C_{zx}\varepsilon_{xx} + C_{zz}\varepsilon_{zz}, \quad \tau_{xz} = G_{xz}\gamma_{xz}, \quad (2)$$

де для плоского згину коефіцієнти жорсткості можна виразити через технічні константи E_1 , E_2 , G , ν так:

$$C_{xx} = \frac{E_1}{1 - \nu^2 E_2 / E_1}, \quad C_{zz} = \frac{E_2}{1 - \nu^2 E_2 / E_1}, \quad C_{xz} = \frac{\nu E_1}{1 - \nu^2 E_2 / E_1}, \quad G_{xz} = G.$$

Підставивши співвідношення (1) і (2) у варіаційне рівняння Лагранжа

$$\int_V (\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta\varepsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz}) dV = \int_{S_p} P \delta U dS \quad (3)$$

і застосувавши метод Бубнова–Гальоркіна, отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення амплітуд переміщень [10]:

$$[A]\bar{U} = \begin{bmatrix} A_1 & A_d \\ A_d^T & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_e \\ \bar{U}_d \end{bmatrix} = \bar{p}, \quad (4)$$

де ε_{ii} – розтягальні деформації; γ_{ij} – деформації зсуву; σ_{ii} – нормальні напру-

ження; τ_{ij} – дотичні напруження; V – об’єм балки; S_p – поверхня з відомими зусиллями; $[A]$ – блочна матриця жорсткості, визначена подвійним інтегруванням за товщиною і довжиною балки; \bar{U} , \bar{p} – вектори амплітуд переміщень і зовнішніх зусиль; T – індекс транспонування.

Експериментальні випробування. Досліджували на згин (рис. 1) балки із пінопласту марок 3715 і 6718 компанії General Plastics (США) та тришарові з тримками шарами із вуглепластику і заповнювачем із пінопласту марки 3715. Шари завтовшки $0,5 \cdot 10^{-3}$ м із тканини полотняного плетіння, волокна орієнтовані вздовж і впоперек шару. Тришарова балка завдовжки 0,611 м прямокутного перетину, завширшки 0,028 і заввишки 0,0264 м. Навантажували ступінчасто мірними вантажами. Максимальний прогин (табл. 1 і 2) вимірювали індикатором годинникового типу з ціною поділки 0,01 мм. Радіуси циліндричних опор і ширина навантажувального індентора 5 мм.

Таблиця 1. Прогини балок з пінопласту ($b \times 2H = 6,4 \times 25,4$ mm²; $F = 2bH$) залежно від навантаження P і довжини прольоту L

P , N	4,41	14,22	24,03	38,84	43,65
L , m	$\delta \cdot 10^3$, m				
0,06	0,020 0,015	0,060 0,045	0,090 0,075	0,135 0,100	0,170 0,135
0,08	0,035 0,025	0,140 0,090	0,230 0,145	0,315 0,205	0,390 0,365
0,10	0,065 0,045	0,220 0,165	0,360 0,275	0,515 0,385	0,660 0,505
0,12	0,105 0,080	0,350 0,280	0,600 0,465	0,855 0,645	1,100 0,825
0,14	0,165 0,125	0,580 0,420	0,970 0,725	1,345 1,025	1,755 1,335

У верхньому рядку – прогини балки з пінопласту 3715, в нижньому – з пінопласту 6718.

Таблиця 2. Прогини сандвіча залежно від навантаження P і довжини прольоту L

P , N	19,62	39,24	58,86	78,48	98,10	L , m
$\delta \cdot 10^3$, m	0,15	0,300	0,440	0,590	0,730	0,38
	0,09	0,185	0,275	0,360	0,445	0,30
	0,05	0,100	0,140	0,180	0,220	0,20

Алгоритм ідентифікації. Модулі пружності ідентифікували методом картування функції похибки

$$\Delta = \sum_i^{N_p} \frac{|w_i^{\text{exp}} - w_i|}{w_i^{\text{exp}}}, \quad (5)$$

яка є усереднена за всіма навантаженнями сума відносних різниць експериментальних w_i^{exp} і розрахованих за формулами (1)–(4) теоретичних w_i прогинів.

На рис. 2 подано карти параметрів E , G – ізолінії функції похибки (5) за варіації модулів E_1 , G однорідних балок та модулів E_f обкладинок і зсуву G_c ядра сандвіча.

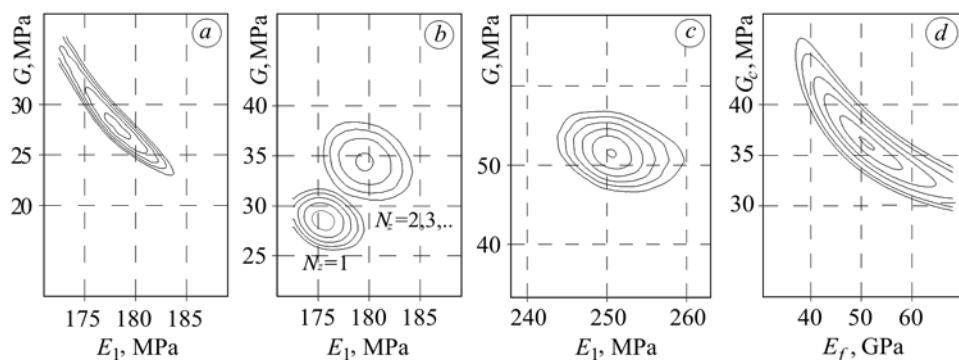


Рис. 2. Карти параметрів E_1, G (матеріал 3715) балки Тимошенка (а) і уточненої моделі за різних порядків апроксимацій (b), E_1, G (матеріал 6718) (c) і E_f, G_c (сандвіч) (d).

Fig. 2. Map of the parameters: E_1, G (material 3715) of Timoshenko beam (a) and a refined model for different approximations orders (b); E_1, G (material 6718) (c) and E_f, G_c (sandwich) (d).

Тут величини E_1, G змінюються у деяких наперед заданих інтервалах D_E, D_G з кроками, які залежать від кількості точок розбиття N_E, N_G :

$$E_1 = E_{10} + (p_E - 0,5)D_E, \quad G = G_0 + (p_G - 0,5)D_G, \quad (6)$$

$$p_E = \frac{i_E - 1}{N_E}, \quad p_G = \frac{i_G - 1}{N_G}, \quad i_E = 1, \dots, N_E + 1, \quad i_G = 1, \dots, N_G + 1.$$

Ідентифікованим параметрам відповідає точка в центрі області, яка обмежена лінією з найменшим значенням функції похибки (5).

Щоб отримати карту (рис. 2a), прогини розраховували за формулою

$$\delta = w(0) = P \left(\frac{L}{4GF} + \frac{L^3}{48EI} \right).$$

Модель балки Тимошенка (рис. 2a) дає дещо занижені значення модуля зсуву G , які близькі до отриманих за уточненою моделлю при $N_z = 1$. Для точної апроксимації на основі формул (1)–(4) достатньо двох членів розкладу по нормалі $N_z = 2$ (рис. 2b). Опуклі карти параметрів свідчать про однозначність та робастність розв'язку задачі ідентифікації.

Ідентифіковані модулі Юнга для матеріалів 3715 і 6718 збігаються з точністю до 1,5% з даними компанії General Plastics (США), а модуль зсуву G відрізняється на 11,5% (табл. 3). Водночас збіг з модулем зсуву, визначеним за згину тришарової балки, становить 5%.

Таблиця 3. Порівняння пружних характеристик матеріалів

Пінопласт		E_1 , GPa	G , МПа
3715	1	0,1792	34...35,4
	2	0,1765	34,5
6718	1	0,2517	57,5...58,0
	2	0,2510	52,1
Сандвіч		E_f , GPa	G_c , МПа
3715	1	52,6	34,4
	2	51,8	36,15

Примітка: 1 – дані компанії General Plastics; 2 – результати ідентифікації.

Константи E_2 , ν менше впливають на прогини однорідної балки. Якщо визначити функцію похибки за цими параметрами в модельній задачі, де у виразі (5) замість експериментальних прогинів w_i^{exp} використаємо прогини $w_i^{(0)}$, обчислені за середніх значень модулів E_{10} , G_0 (6), то отримаємо замість опуклих областей (рис. 2) смуги (рис. 3а–д). Це свідчить, що в такій схемі ідентифікації константи E_2 , ν недоступні. Їх можна визначити, використовуючи дуже короткі зразки з довжиною, сумірною з товщиною. Однак тоді неможливо точно знайти прогини балки через суттєвий вплив локальних прогинів на опорах та під індентором.

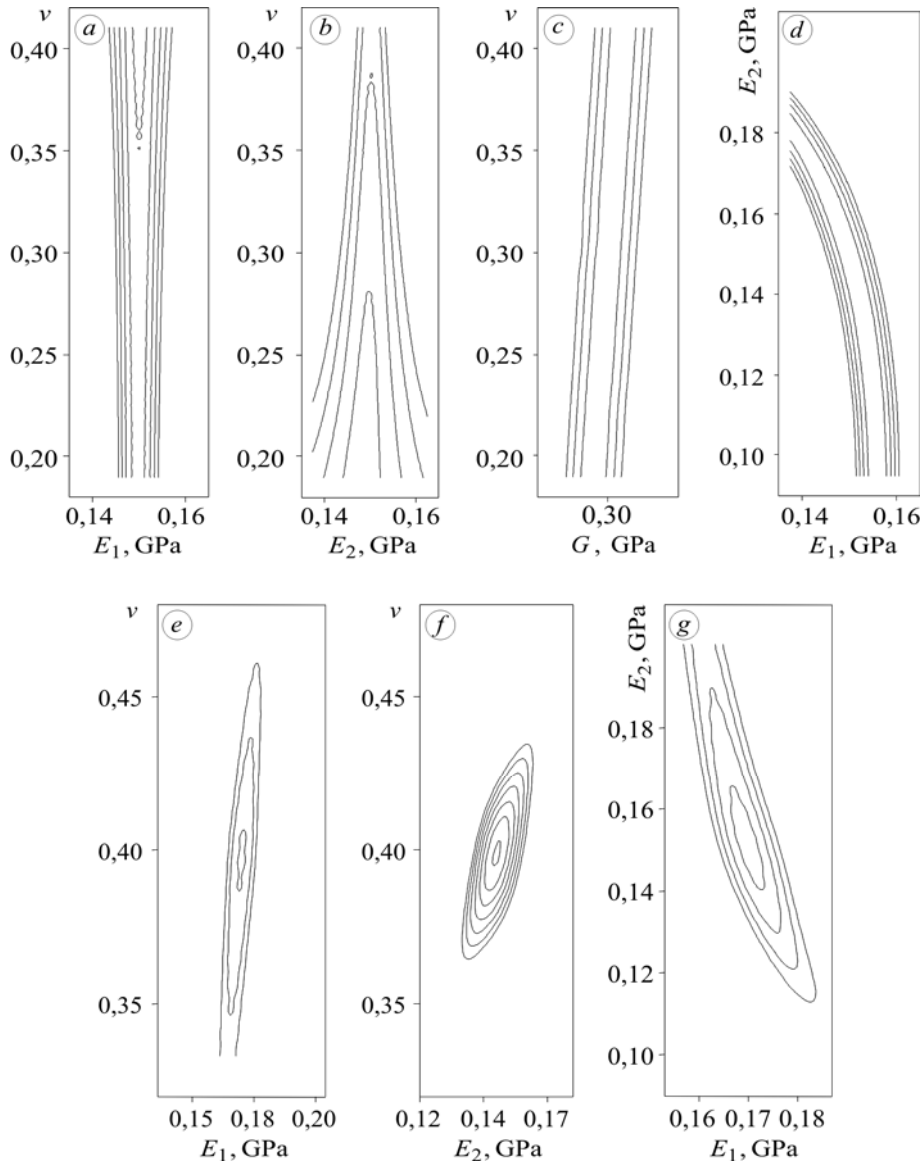


Рис. 3. Карти параметрів: а–д – за критерієм (5); е–г – за критерієм (7).

Fig. 3. Map of the parameters: а–d – by criterion (5); е–g – by criterion (7).

Константи E_2 , ν можна обчислити, одночасно використовуючи прогини w^c , w^s , відповідно, однорідної балки та сандвіча з внутрішнім шаром з того самого матеріалу. Тут функція похибки матиме вигляд

$$\Delta = \Delta_c + \Delta_s = \sum_i^{N_p} \frac{|w_i^{\text{exp},c} - w_i^c|}{w_i^{\text{exp},c}} + \sum_i^{N_p} \frac{|w_i^{\text{exp},s} - w_i^s|}{w_i^{\text{exp},s}}. \quad (7)$$

На рис. 3e–g подано карти параметрів внутрішнього шару сандвіча з матеріалу 3715. Як бачимо, карти параметрів – обмежені опуклі області, що є необхідною умовою для однозначного розв’язання задачі ідентифікації.

ВИСНОВКИ

За схемою триточкового згину балки та уточненими розрахунковими моделями розроблена методика визначення характеристик пружності однорідної балки, лицевого і внутрішнього шарів сандвіча на основі мінімізації відхилень експериментальних значень прогинів балки від розрахункових. Результати дослідження однорідної балки не дають достатньої інформації, щоб визначити всі технічні константи. Лише, коли розглядати сандвіч з використанням функції похибки (7), області карт для внутрішнього шару стають опуклими (рис. 3e–g). Опуклість карт рівнів відхилень (рис. 2 і 3e–g) свідчить про однозначність та робастність розв’язку задачі ідентифікації. Для адекватного визначення модулів на основі уточнених моделей достатньо апроксимацій другого порядку за товщиною прошарків балки.

РЕЗЮМЕ. На основе теории высшего порядка для слоистых анизотропных пластин и экспериментально определенных прогибов при трехточечном изгибе слоистых балок предложена методика идентификации их модулей упругости. Теоретическая модель учитывает сдвиговые и нормальные деформации и напряжения. Модули определены на основе минимизации отклонений экспериментальных значений прогибов от расчетных.

SUMMARY. On the basis of the theory of higher order for the layered anisotropic plates and experimentally determined deflections under three-point bending of the layered beams the method of identification of their elastic modulus is proposed. A theoretical model takes into account the shear and normal strains and stresses. The modules are determined on the basis of minimization of the deviations of the deflection experimental values from the calculated ones

1. Жигун И. Г., Поляков В. А. Свойства пространственно-армированных пластиков. – Рига: Зинанте, 1978. – 216 с.
2. Композиционные материалы: Справ. / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др.; Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1999. – 512 с.
3. Morozov E. V. and Vasiliev V. V. Determination of the shear modulus of orthotropic materials from off-axis tension tests // Composite Structures. – 2003. – **62**. – P. 379–382.
4. Greediac M., Toussaint E., and Pierron F. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1 – Principle and definition // Int. J. Solids and Structures. – 2002. – **39**, № 10. – P. 2691–2706.
5. Greediac M., Toussaint E., and Pierron F. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2 – Application to in-plane properties // Ibid. – 2002. – **39**, № 10. – P. 2707–2730.
6. Шереметьев М. П., Пелех Б. Л. К построению уточненной теории пластин // Инж. журн. – 1964. – **4**, Вып. 3. – С. 504–510.
7. Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites / Heng Hu, Salim Belouettar, Michel Potier-Ferry, and El Mostafa Daya // Composite Structures. – 2008. – **84**. – P. 282–292.
8. Demasi L. 13 Hierarchy plate theories for thick and thin composite plates // Ibid. – 2008. – **84**. – P. 256–270.
9. Diveyev B., Butyter I., and Shcherbyna N. High order theories for elastic modules identification of composite plates. Part 1. Theoretical approach // Mechanics of Composite Materials. – 2008. – **44**, № 1. – P. 25–36.
10. Diveyev B., Butyter I., and Shcherbyna N. Influence of clamp conditions and material anisotropy on frequency spectra of laminated beams // Ibid. – 2011. – **47**, № 2. – P. 149–160.

Одержано 10.01.2011