УДК 532.61

ВПЛИВ ПОХИБОК ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ НА ТОЧНІСТЬ ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РЯДУ ВІЛЬЯМСА ЗА ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

І. С. ГОЛИНСЬКИЙ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Змодельовано та проаналізовано вплив похибок визначення поля напружень на точність обчислення коефіцієнтів розкладу Вільямса і відтворення поля напружень за поперечного зсуву.

Ключові слова: *коефіцієнт інтенсивності напружень, коефіцієнти вищих порядків, похибка, поле напружень, II тип навантаження.*

Визначення характеристик квазікрихкого руйнування матеріалів має ключове значення для механіки крихкого тіла. Під час дослідження квазікрихкого руйнування важливим є встановлення коефіцієнтів розкладу поля напружень, які можна подати степеневим рядом Вільямса. При цьому, окрім перших членів розкладу, які визначають коефіцієнти інтенсивностей напружень (КІН), вагому роль відіграють також і коефіцієнти вищих порядків [1–4]. Відомо [2, 4–6], що їх достовірне встановлення впливає на точність визначення КІН. Деякі з коефіцієнтів вищих порядків також використовують для якісного та кількісного аналізу таких характеристик квазікрихкого руйнування, як розміри та форма пластичної зони, прогнозування напряму поширення та часу зародження тріщини, а також під час розрахунку густини енергії деформації [1, 3, 4, 7–9]. Мета роботи – оцінити вплив похибок визначення напружень зразка під час другого типу навантаження на точність обчислення перших чотирьох ненульових коефіцієнтів ряду Вільямса.

У механіці квазікрихкого руйнування симулювання (чи цифрове моделювання) поля напружень можливе різноманітними методами [10–12], які, однак, не завжди забезпечують достатню збіжність та точність під час визначення коефіцієнтів розкладу Вільямса, а отже, потребують якісного та кількісного підтвердження фізичними та експериментальними засобами.

Методика дослідження. Для моделювання вибрали зразок типу SECS [1] (a/W = 0,25, II тип навантаження). Методика дослідження: до заданого точного (симульованого) розподілу напружень зразка із заданими точними значеннями коефіцієнтів Вільямса та координатами вершини тріщини додавали випадковий шум, що відповідав різним інструментальним похибкам вимірювальної системи. Пізніше з поля напружень, що містило шум, визначали коефіцієнти Вільямса та координати вершини тріщини і вже згодом відтворювали розподіл напружень на основі встановлених коефіцієнтів. Це дало змогу розрахувати похибки визначення коефіцієнтів Вільямса (та положення модельної вершини тріщини) і відтворення розподілу напружень.

Розподіл напружень обчислювали на основі точних значень відповідних коефіцієнтів Вільямса (b_1 = –0,4804; b_3 = 0,0871; b_4 = –0,0414; b_5 = –0,0156) для модельної крайової тріщини (σ = 1, E = 1, H = 1, ν = 0,25, a/W = 0,25) [1].

Контактна особа: І. С. ГОЛИНСЬКИЙ, e-mail: todo_o_nada_fp@yahoo.pl

Використовуючи метод Ньютона–Рафсона [13], з розподілу напружень біля вершини тріщини обчислюють задане число коефіцієнтів розкладу Вільямса. Відомо [13], що обмеження ряду Вільямса першими 5–7 членами дає змогу відтворити заданий розподіл напружень з точністю, задовільною для практичних випробувань. Для визначення напружень використовують стандартизовані чи власні вимірювальні системи [11] з різними похибками (залежно від використаної методики, комплекту апаратури, параметрів зразків та властивостей матеріалів). Беручи це та діючі стандарти до уваги, можна виокремити три основні групи вимірювальних систем за похибками вимірювань, а саме, 1, 2 і 5% від максимального виміряного напруження. Розподіл інструментальних похибок таких вимірювальних систем є, як правило, нормальний, а їх характер адитивний.

Розглянуто систему непрямих вимірювань поля напружень, котра передбачає визначення щонайменше трьох компонент напружень σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy}. Поле напружень задали розмірами 400×400 точок, координати вершини тріщини – точно по його центру [14]. Напруження σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy} розраховувались на основі відомих співвідношень [13]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_{\mathrm{II}_n}\, r^{(n-2)/2} \begin{Bmatrix} \left\{2-(-1)^n+\dfrac{n}{2}\right\}\sin(\dfrac{n}{2}-1)\theta-\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\sin\left(\dfrac{n}{2}-3\right)\theta \\ \left\{2+(-1)^n-\dfrac{n}{2}\right\}\sin(\dfrac{n}{2}-1)\theta+\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\sin\left(\dfrac{n}{2}-3\right)\theta \\ -\left\{(-1)^n-\dfrac{n}{2}\right\}\cos(\dfrac{n}{2}-1)\theta-\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\cos\left(\dfrac{n}{2}-3\right)\theta \end{Bmatrix},$$

де $A_{\mathrm{II}n}$ – коефіцієнт Вільямса n-го порядку; r – довжина радіус-вектора, проведеного від вершини тріщини до точки, в якій обраховується відповідне напруження; θ – кут між цим радіус-вектором та напрямком поширення тріщини.

Напруження у вершині тріщини (у точці сингулярності поля напружень) прийняли рівним середньому значенню напруження у трьох сусідніх розрахованих точках.

Область навколо вершини тріщини (круг радіусом 0,1 від заданої довжини тріщини) виключили з розгляду для коректної імітації реальної процедури визначення коефіцієнтів Вільямса, позаяк у цій області не виконуються умови пружної деформації [6, 14].

Для імітації впливу інструментальних похибок визначення напружень використали три різні незалежні послідовності випадкових чисел з плаваючою комою подвійної точності – центровані з нормальним розподілом, середньоквадратичним відхиленням рівним 1, розмірністю 400×400 точок. Ці послідовності використовувалися для імітації впливу похибок на визначення нормальних компонент напруження вздовж осей X та Y і тангенціальної XY. Максимальне абсолютне значення напружень для заданого точного розподілу без центральної області склало 4,20. Розрахувавши середньоквадратичне відхилення похибки напруження, отримали: $\sigma_{1\%} = 0{,}047$; $\sigma_{2\%} = 0{,}093$; $\sigma_{5\%} = 0{,}233$ і використали як множники для нормування випадкових послідовностей до заданого значення похибки. Для імітації впливу похибок відомих фізичних констант матеріалу під час непрямих вимірювань задали систематичну складову похибки шляхом зміщення відповідної випадкової похибки на значення еквівалентне 1% від максимального. Таким чином, отримали такі набори випадкових величин для імітації впливу можливих похибок визначення напружень (окремо для кожної з компонент модельного поля напружень по координаті X та Y):

$$(\delta_{1xx}\ \delta_{2xx}\ \delta_{5xx}\ \delta_{1+1xx}\ \delta_{2+1xx}\ \delta_{5+1xx}),\ (\delta_{1yy}\ \delta_{2yy}\ \delta_{5yy}\ \delta_{1+1yy}\ \delta_{2+1yy}\ \delta_{5+1yy}),$$
$$(\delta_{1xy}\ \delta_{2xy}\ \delta_{5xy}\ \delta_{1+1xy}\ \delta_{2+1xy}\ \delta_{5+1xy}).$$

Для визначення коефіцієнтів Вільямса з отриманого поля напружень із внесеними похибками вибрано набір точок з рівномірним розміщенням у вузлах квадратної ґратки з кроком 20 точок, аналогічно до праці [6]. Випадкові похибки поточково додавалися до точних симульованих значень розподілу напружень.

Під час визначення коефіцієнтів Вільямса та координат вершини тріщини методом Ньютона–Рафсона [13] задовільною умовою зупинки циклічних розрахунків було знаходження абсолютних значень приростів обох координат вершини тріщини (X_0 та Y_0) у межах 0,1 pxl, що є мінімальним елементом розділення впродовж десяти послідовних циклів обчислень.

Числові результати. Абсолютні значення визначених коефіцієнтів розкладу полів напружень у ряд Вільямса для всіх вибраних похибок визначення напружень наведено у табл. 1. У табл. 2 подані відносні похибки δ обчислених коефіцієнтів Вільямса, а у табл. 3 – середні значення (M) та середньоквадратичні відхилення (RMS) відносних похибок відтворення розподілу напружень для всіх заданих похибок визначення напружень. У табл. 4 наведено похибки визначення координат (X_0, Y_0) положення вершини тріщини (обидві точні координати становлять 0,200). В усіх таблицях у першій колонці перше число відповідає середньому значенню випадкової складової похибки вхідних даних, друге – постійному зміщенню похибки.

Таблиця 1. Результати відтворення коефіцієнтів розкладу напруження навколо тріщини у ряд Вільямса для всіх заданих похибок визначення напружень

b_n	b_1	b_3	b_4	b_5
0–0	–0,4804*	0,0871*	–0,0414*	–0,0156*
1–0	–0,4786	0,0907	–0,0418	–0,0184
1–1	–0,4726	0,1008	–0,0396	–0,0320
2–0	–0,4768	0,0944	–0,0422	–0,0211
2–1	–0,4708	0,1043	–0,0398	–0,0348
5–0	–0,4712	0,1054	–0,0436	–0,0290
5–1	–0,4652	0,1151	–0,0404	–0,0428

Таблиця 2. Відносні похибки відтворених коефіцієнтів Вільямса для всіх заданих похибок визначення напружень

$\delta(b_n)$, %	$\delta(b_1)$, %	$\delta(b_3)$, %	$\delta(b_4)$, %	$\delta(b_5)$, %
0–0	0	0	0	0
1–0	–0,37	4,13	0,97	17,95
1–1	–1,62	15,73	–4,38	105,13
2–0	–0,75	8,38	1,93	35,26
2–1	–2,00	19,75	–3,86	123,08
5–0	–1,91	21,06	5,21	86,09
5–1	–3,16	32,16	–2,29	174,53

* – точні значення коефіцієнтів [1], які використовували під час симулювання поля напружень.

Дискусія. Результати моделювання показали, що за вибраних похибок можливе достатньо точне відтворення координат модельної вершини тріщини (табл. 4). Максимальна похибка відтворення координат X_0 та Y_0 під час розрахунків не перевищувала 2%, а переважно є ~1%. Відносні похибки визначення коефіцієнтів Вільямса демонструють високу чутливість коефіцієнтів (крім першого) до похибок визначення напружень (табл. 1, 2). КІН можна встановити з похибкою менше 0,5% практично для всіх заданих вхідних похибок напружень. Достовірне визначення коефіцієнта b_3 вимагає використання систем визначення напружень з незміщеною похибкою меншою 1%. Коефіцієнт b_4 можна встановити з достатньою точністю лише для малих (до 1%) похибок визначення напруження, а b_5 не може бути достовірно встановлений навіть за використання систем вимірювання напружень з незміщеною похибкою меншою 1%.

Таблиця 3. Середні значення (M) та середньоквадратичні відхилення (RMS) відносних похибок відтворення розподілу напружень (%) для всіх заданих похибок визначення напружень

$\delta(\sigma)$, %	$M(\delta(\sigma_{xx}))$	$RMS(\delta(\sigma_{xx}))$	$M(\delta(\sigma_{yy}))$	$RMS(\delta(\sigma_{yy}))$	$M(\delta(\tau_{xy}))$	$RMS(\delta(\tau_{xy}))$
1–0	–0,11	0,49	0,37	1,49	0,33	1,47
1–1	0,36	6,60	1,74	3,50	1,71	3,31
2–0	–0,23	1,00	0,73	2,92	0,65	2,89
2–1	0,25	6,54	2,11	4,70	2,05	4,44
5–0	–0,54	2,68	1,84	7,03	1,68	6,96
5–1	–0,27	1,58	3,23	8,49	3,12	8,10

Похибки відтворення розподілу просторових напружень на основі отриманих параметрів моделі тріщини – координат вершини та коефіцієнтів розкладу Вільямса – є дуже важливими для оцінки ефективності та точності використаних методів. Як видно з табл. 3, для всіх трьох компонент напружень середньоквадратична похибка відтворення напружень досить суттєво залежить від постійної складової похибки визначених напружень. Максимальне значення середньоквадратичної похибки відтворення полів напружень не перевищує 8,5%. Це означає, що на основі отриманих параметрів розкладу Вільямса достовірне кількісне відтворення реальних напружень можливе лише для малих (до 2%) похибок визначення розподілу напружень. У зв’язку з цим використання лише КІН під час оцінки тих чи інших характеристик квазікрихкого руйнування може бути недостатньо і слід застосовувати принаймні три наступні ненульові члени розкладу Вільямса.

Таблиця 4. Похибки визначення координат (X_0, Y_0) положення вершини тріщини

$\delta(X, Y)$	ΔX_0, pxl	ΔX_0, %	ΔY_0, pxl	ΔY_0, %
1–0	0,60	0,30	–0,13	–0,07
1–1	1,20	0,60	0,45	0,23
2–0	1,19	0,60	–0,26	–0,13
2–1	1,78	0,89	0,32	0,16
5–0	2,84	1,42	0,71	0,36
5–1	3,42	1,71	–0,11	–0,06

Використані розміри вибірки (391 значення) з поля напружень для визначення параметрів розкладу та самого поля (400×400 точок вимірів напружень) є достатньо репрезентативні для отримання достовірних результатів.

ВИСНОВКИ

Встановлено необхідні значення похибок систем непрямого визначення напружень для коректного обчислення коефіцієнтів ряду Вільямса під час II типу навантаження. Виявлено, що дані, отримані для систем зі зміщеними вхідними похибками, призводять до значного погіршення як систематичних, так і випадкових складових похибок результату. Для достовірного аналізу характеристик квазікрихкого руйнування необхідно використати хоча б чотири перші члени ряду Вільямса. Визначення членів розкладу вище четвертого порядку шляхом фізичного експерименту можливе, очевидно, лише за використання високоточних систем непрямого вимірювання напружень.

РЕЗЮМЕ. Смоделировано и проанализировано влияние погрешностей определения поля напряжений на точность вычисления коэффициентов разложения Вильямса и восстановления поля напряжений при поперечном сдвиге.

SUMMARY. The modeling and analysis of the influence of errors of stress field determination under mode II loading on the accuracy of computation of the William's expansion coefficients and reconstruction of the stress field were performed.

1. *Su K. L. and Feng W.* Accurate determination of mode I and mode II leading coefficients of the Williams expansion by finite element analysis // Finite Elements in Analysis and Design. – 2005. – **41**, № 11–12. – P. 1175–1186.
2. *Papadgpoulos G. A. and Poniridis P. I.* Crack initiation under biaxial loading with higher-order approximation // Engng Fract. Mech. – 1989. – **32**, № 3. – P. 351–360.
3. *Shrestha S. and Ohga M.* Scaled Boundary Finite Element Method for Various Crack Problems // Steel Struct. – 2007. – **7**. – P. 277–287.
4. *Hui C. Y., Ruina A., and Why K.* High order singularities and small scale yielding // Int. J. of Fract. – 1995. – **72**. – P. 97–120.
5. *Liu S. and Chao Y. J.* Variation of fracture toughness with constraint // Ibid. – 2003. – **124**. – P. 113–117.
6. *Direct* estimation of generalized stress intensity factors using a three-scale concurrent multi-grid X-FEM / J. C. Passieux, A. Gravouil, J. R'ethor'e, and M. C. Baietto // Int. J. for Numerical Methods in Engng. – 2011. – **85**, № 13. – P. 1648–1666.
7. *Influence* of non-singular higher order terms on the stress field of thin welded lap joints and small inclined cracks in plates / F. Berto, P. Lazzarin, C. J. Christopher, and M. N. James // Characterization of crack tip stress fields (Forni di Sopra (UD), Italy, March, 7–9, 2011). – P. 88–95.
8. *Ayatollahi M. R. and Nejati M.* Experimental evaluation of stress field around the sharp notches using photoelasticity // Mater. and Design. – 2011. – **32**. – P. 561–569.
9. *Jeong-Ho Kim, Glaucio H. Paulino.* T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: a unified approach using the interaction integral method // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2003. – **192**. – P. 1463–1494.
10. *Jarruwat Chareonsuk, Passakorn Vessakosol*. Numerical solutions for functionally graded solids under thermal and mechanical loads using a high-order control volume finite element method // Applied Thermal Engng. – 2011. – **31**. – P. 213–227.
11. *Withers P. J. and Bhadeshia H. K. D. H.* Residual stress. Part 1: Measurement techniques // Mater. Scie. and Technology. – 2001. – **17**. – P. 355–365.
12. *Prime M. B.* Measuring Residual Stress and the Resulting Stress Intensity Factor in Compact Tension Specimens // Fatigue & Fract. of Engng Mater. & Struct. – 1999. – **22**, № 3. – P. 195–204.
13. *Smith C. W. and Kobayashi A. S.* Experimental fracture mechanics // Handbook on Experimental Mechanics / Ed. A. S. Kobayashi. – New York: VCH, 1993. – 1074 p.
14. *The stress* intensity of mixed mode cracks determined by digital image correlation / P. Lopez-Crespo, A. Shterenlikht, E. A. Patterson et al. // J. Strain Analysis. – 2008. – **43**. – P. 769–780.

Одержано 12.09.2011