

УДК 539.3

ОСЕСИМЕТРИЧНИЙ КОНТАКТ ДВОХ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА ТЕРТЯ ТА ЗЧЕПЛЕННЯ

В. І. ОСТРИК, А. Ф. УЛІТКО

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Розглянуто осесиметричну задачу про фрикційний контакт двох пружних тіл параболоїдної форми за умови, що область контакту поділяється на кругову зону зчеплення та кільцеву зону проковзування. Завдяки малості області контакту тіла замінені пружними півпросторами. Здійснено перехід від крайової задачі для двох пружних півпросторів до задачі для одного півпростору. Узагальненим методом Вінера–Гопфа отримано аналітичний розв’язок задачі. Визначено радіуси області контакту та зони зчеплення, розподіл контактних напружень, зближення тіл.

Ключові слова: осесиметричний контакт, пружний півпростір, тертя, зчеплення, метод Вінера–Гопфа.

У класичній теорії Герца контактної взаємодії пружних тіл [1, 2] не враховуються сили тертя, що виникають в області контактного тиску. Самі ж тіла для розрахунку напружень замінюються пружними півпросторами. Тертя суттєво ускладнює як формулювання контактної задачі, так і її розв’язання. Під впливом тертя область контакту поділяється на зону зчеплення всередині та зону проковзування поверхонь тіл на межі області контакту [2].

Вперше контакт зі зчепленням і проковзуванням розглянуто Л. А. Галінім [3] у задачі про вдавлювання штампа з прямолінійною основою в пружну півплощину. Якщо контакт тіл починається в точці, а зі зростанням навантаження область контакту збільшується, то в зоні зчеплення накопичується так звана “зашемлена деформація” [2], закон розподілу якої є лінійним [4]. У такому формулюванні плоску задачу про вдавлювання параболічного штампа в пружну півплощину розв’язано в праці [5], а про контактну взаємодію двох пружних тіл – у праці [6]. Осесиметричні контактні задачі зі зчепленням і проковзуванням раніше не вивчалися.

Нижче розглянуто осесиметричну задачу про фрикційний контакт двох пружних тіл параболоїдної форми за умови, що область контакту поділяється на зони зчеплення та проковзування. Узагальненим методом Вінера–Гопфа [7–9] знаходять аналітичний розв’язок задачі.

Постава задачі. Нехай два пружних тіла, модулі зсуву яких G_1 і G_2 , а числа Пуассона $m^{(1)}$ і $m^{(2)}$, обмежені в околі точки O початкового співдотику опуклими поверхнями обертання $z_j = r^2 / (2R_0^{(j)})$ ($0 \leq \vartheta < 2\pi$), де введені циліндричні системи координат z_j, r, ϑ пов’язані з кожним із тіл так, що осі Oz_j перпендикулярні до спільної площини дотику тіл і направлені всередину них, а $R_0^{(j)}$ – радіуси кривизни поверхонь тіл у точці дотику ($j = 1, 2$).

Під час стискання тіл силами P на їх межах утворюється кругова область контакту $r \leq R$, яка поділяється на кругову зону зчеплення $r \leq R_1$ і кільцеву зону

проковзування $R_1 < r \leq R$ ($0 \leq \vartheta < 2\pi$). Приймаючи друге тіло жорсткішим, вважаємо, що в зоні проковзування точки поверхні першого тіла рухаються вздовж поверхні другого в напрямку до середини області контакту. При цьому нормальні та дотичні напруження підпорядковані закону тертя Амонтона. Вважаємо також, що в зоні зчеплення, згідно з працею [4], різниця повздовжніх радіальних деформацій тіл розподілена за лінійним законом. Як і в теорії Герца, завдяки малості області контакту ($R \ll R_0^{(j)}$), кожне тіло замінюємо пружним півпростором $z_j \geq 0$ ($j=1,2$).

Змішані крайові умови на межах півпросторів мають вигляд

$$\begin{aligned} u_z^{(1)} \Big|_{z_1=0} + u_z^{(2)} \Big|_{z_2=0} &= \delta - r^2 / (2R_0), \quad \sigma_z^{(1)} \Big|_{z_1=0} = \sigma_z^{(2)} \Big|_{z_2=0}, \quad 0 \leq r \leq R; \\ u_r^{(1)} \Big|_{z_1=0} - u_r^{(2)} \Big|_{z_2=0} &= C_0 r^2, \quad \tau_{rz}^{(1)} \Big|_{z_1=0} = -\tau_{rz}^{(2)} \Big|_{z_2=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1; \\ \tau_{rz}^{(j)} \Big|_{z_j=0} &= (-1)^{j+1} \mu_0 \sigma_z^{(j)} \Big|_{z_j=0}, \quad R_1 < r \leq R; \\ \sigma_z^{(j)} \Big|_{z_j=0} &= 0, \quad \tau_{rz}^{(j)} \Big|_{z_j=0} = 0, \quad R < r < \infty, \quad j=1,2, \end{aligned} \quad (1)$$

де δ – зближення тіл; R_0 – зведений радіус кривизни поверхонь тіл у точці початкового дотику ($1/R_0 = 1/R_0^{(1)} + 1/R_0^{(2)}$); C_0 – невідома стала “зашемленої деформації”; μ_0 – коефіцієнт тертя.

Відносні тангенціальні переміщення поверхонь півпросторів задовольняють умову

$$\Delta u_r = u_r^{(1)} \Big|_{z_1=0} - u_r^{(2)} \Big|_{z_2=0} < 0, \quad 0 < r < \infty. \quad (2)$$

Зі зростанням навантаження та розширенням області контакту крайові точки тіл із зони проковзування переходять у зону зчеплення, де різницю тангенціальних переміщень виражають третьою умовою (1). Тому в зоні проковзування маємо умову

$$\Delta u_r > C_0 r^2, \quad R_1 < r \leq R, \quad (3)$$

а у зоні зчеплення справджується умова

$$\left| \tau_{rz}^{(1)} \right| \Big|_{z_1=0} < \mu_0 \left| \sigma_z^{(1)} \right| \Big|_{z_1=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1. \quad (4)$$

Окрім того, потрібно задовольнити умови рівноваги півпросторів

$$2\pi \int_0^R \sigma_z^{(j)} \Big|_{z_j=0} r dr = -P, \quad j=1,2. \quad (5)$$

Коли одне з тіл є абсолютно жорстке ($G_2 = \infty$), приходимо до осесиметричної задачі про фрикційний контакт штампа параболічного профілю $\zeta < -r^2 / (2R_0)$ ($0 \leq \vartheta < 2\pi$) і пружного півпростору $\zeta \geq 0$ ($G_1 = G$, $m^{(1)} = m$, $R_0^{(1)} = \infty$, $R_0^{(2)} = R_0$, $z_1 = \zeta$) з такими крайовими умовами:

$$\begin{aligned} u_\zeta \Big|_{\zeta=0} &= \delta - r^2 / (2R_0), \quad 0 \leq r \leq R; \quad u_r \Big|_{\zeta=0} = C_0 r^2, \quad 0 \leq r \leq R_1; \\ \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0} &= \mu_0 \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0}, \quad R_1 < r \leq R; \quad \sigma_\zeta \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \tau_{r\zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad R < r < \infty, \end{aligned} \quad (6)$$

крайовими нерівностями

$$u_r|_{\zeta=0} > C_0 r^2, \quad R_1 < r \leq R; \quad \left| \tau_{r\zeta} \right|_{\zeta=0} < \mu_0 \left| \sigma_\zeta \right|_{\zeta=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad (7)$$

та умовою рівноваги

$$2\pi \int_0^R \sigma_\zeta|_{\zeta=0} r dr = -P. \quad (8)$$

Як показано в праці [10], достатньо побудувати розв'язок задачі (6)–(8) для одного пружного півпростору, за яким розв'язок задачі (1), (3)–(5) для двох півпросторів відтворюють формальною заміною

$$m = \frac{m^{(1)}[G_1(3m^{(2)} - 4) + G_2m^{(2)}]}{G_1m^{(1)}(2m^{(2)} - 3) + G_2m^{(2)}}. \quad (9)$$

При цьому всі силові чинники – напруження і силу P – слід віднести до зведеного модуля пружності E^* , який в обох задачах визначають співвідношеннями

$$\frac{1}{E^*} = \frac{m-1}{2Gm}, \quad \frac{1}{E^*} = \frac{m^{(1)}-1}{2G_1m^{(1)}} + \frac{m^{(2)}-1}{2G_2m^{(2)}}. \quad (10)$$

Переходимо до розв'язування контактної задачі (6)–(8) для одного півпростору.

Система інтегральних рівнянь та її зведення до системи функціональних рівнянь Вінера–Гопфа. Введемо невідомі функції контактних напружень у зонах зчеплення та проковзування

$$p(r) = \frac{1}{2G} \sigma_\zeta|_{\zeta=0}, \quad q(r) = \frac{1}{2G} \tau_{r\zeta}|_{\zeta=0}, \quad 0 \leq r \leq R_1; \quad \sigma(r) = \frac{1}{2G} \sigma_\zeta|_{\zeta=0}, \quad R_1 < r < R \quad (11)$$

і розглянемо першу крайову задачу для пружного півпростору з умовами

$$\frac{1}{2G} \sigma_\zeta|_{\zeta=0} = g_1(r), \quad \frac{1}{2G} \tau_{r\zeta}|_{\zeta=0} = g_2(r), \quad (12)$$

де

$$g_1(r) = \begin{cases} p(r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ \sigma(r), & R_1 < r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad g_2(r) = \begin{cases} q(r), & 0 \leq r \leq R_1, \\ \mu_0 \sigma(r), & R_1 < r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (13)$$

Розв'язок крайової задачі (12) знайдемо за допомогою інтегрального перетворення Мелліна. Зокрема, переміщення на межі півпростору мають вигляд

$$u_\zeta|_{\zeta=0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s} \left(m_1 \frac{\Gamma(1+s/2)\Gamma(1/2-s/2)}{\Gamma(1/2+s/2)\Gamma(1-s/2)} a_1(s) - m_2 a_2(s) \right) r^{-s} ds, \\ u_r|_{\zeta=0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s-1} \left(m_2 a_1(s) - m_1 \frac{\Gamma(1/2+s/2)\Gamma(1-s/2)}{\Gamma(1+s/2)\Gamma(1/2-s/2)} a_2(s) \right) r^{-s} ds, \quad (14) \\ a_j(s) = \int_0^\infty g_j(y) y^s ds, \quad j=1,2; \quad m_1 = 2 \frac{m-1}{m}, \quad m_2 = \frac{m-2}{m}, \quad 0 < c < 1.$$

Розв'язок (14) підставимо у продиференційовані першу та помножену на r другу крайові умови (6). Виконавши заміни

$$s = -i\tau, \quad r = Re^{-\xi}, \quad y = Re^{-\eta}, \quad (15)$$

відносно нових невідомих функцій

$$\begin{aligned}\varphi(\eta) &= \sigma(Re^{-\eta})e^{-\eta}, \quad 0 \leq \eta < a; \quad a = \ln(R/R_1); \\ \psi_1(\eta) &= p(Re^{-\eta})e^{-\eta}, \quad \psi_2(\eta) = q(Re^{-\eta})e^{-\eta}, \quad a \leq \eta < \infty\end{aligned}\quad (16)$$

отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \mu_0\varphi(\xi), \quad \xi < a \\ \psi_2(\xi), \quad \xi \geq a \end{cases} - \frac{m_1}{m_2} L_1(\xi) = \frac{R}{m_2 R_0} e^{-2\xi}, \quad 0 < \xi < \infty;$$

$$\psi_1(\xi) - \frac{m_1}{m_2} L_2(\xi) = \frac{3}{m_2} C_0 R e^{-2\xi}, \quad a < \xi < \infty; \quad (17)$$

$$L_j(\xi) \equiv \mu_0^{j-1} \int_0^a k_j(\xi - \eta)\varphi(\eta)d\eta + \int_a^\infty k_j(\xi - \eta)\psi_j(\eta)d\eta,$$

різницею ядер якої мають вигляд

$$k_j(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K^{3-2j}(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad j = 1, 2; \quad K(\tau) = \frac{\Gamma(1 - i\tau/2)\Gamma(1/2 + i\tau/2)}{\Gamma(1/2 - i\tau/2)\Gamma(1 + i\tau/2)}.$$

Продовжимо інтегральні рівняння (17) на всю числову вісь і застосуємо до них інтегральне перетворення Фур'є. Відносно функцій комплексної змінної

$$\begin{aligned}\Phi^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 \varphi(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Psi_j^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \psi_j(\xi + a) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Psi_j^-(z) = \frac{m_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_j(\xi + (j-1)a) e^{iz\xi} d\xi, \quad j = 1, 2,\end{aligned}\quad (18)$$

де індекс “+” вказує на аналітичність функцій у півплощині $\text{Im } z > c^+$ ($c^+ < 0$), а індекс “-” – у півплощині $\text{Im } z < c^-$ ($c^- > 0$), отримаємо систему функціональних рівнянь Вінера–Гопфа

$$\begin{aligned}[m_1 K(z) - \mu_0 m_2] \Phi^+(z) + e^{iza} [m_1 K(z) \Psi_1^+(z) - m_2 \Psi_2^+(z)] - \Psi_1^-(z) &= F_1^+(z), \\ -\frac{m_1 \mu_0}{K(z)} \Phi^+(z) e^{-iza} + m_2 \Psi_1^+(z) - \frac{m_1}{K(z)} \Psi_2^+(z) + \Psi_2^-(z) &= F_2^+(z), \\ \Phi^+(z) &= e^{iza} \Phi^-(z), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-, \end{aligned}\quad (19)$$

праві частини якої мають вигляд

$$F_1^+(z) = -\frac{R}{\sqrt{2\pi} R_0} \frac{1}{2 - iz}, \quad F_2^+(z) = \frac{3C_0 R}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-2a}}{2 - iz}.$$

Розв’язування системи функціональних рівнянь. Увівши функції

$$\begin{aligned}\Psi^+(z) &= \mu_0 \Psi_1^+(z) - \Psi_2^+(z), \quad \Phi_1^+(z) = \Phi^+(z) + e^{iza} \Psi_1^+(z), \\ \Psi^-(z) &= \Psi_2^-(z) - m_2 e^{-iza} \Phi^+(z),\end{aligned}$$

$$K_1(z) = m_1 K(z) - \mu_0 m_2 = \lambda_1(z) \Gamma(1 - iz/2) \Gamma(1/2 + iz/2), \quad K_2(z) = m_2 - \frac{\mu_0 m_1}{K(z)},$$

$$\lambda_1(z) = \frac{m_1}{\Gamma(1/2 - iz/2) \Gamma(1 + iz/2)} - \frac{\mu_0 m_2}{\Gamma(1 - iz/2) \Gamma(1/2 + iz/2)}, \quad m_3 = \frac{3m - 4}{m},$$

систему функціональних рівнянь (19) перетворимо до вигляду

$$\begin{aligned}
K_1(z)\Phi_1^+(z) + m_2 e^{iza}\Psi^+(z) - \Psi_1^-(z) &= F_1^+(z), \\
K_1(z)\Psi^-(z) + e^{-iza}K_2(z)\left[\Psi_1^-(z) + F_1^+(z)\right] + m_3\Psi^+(z) &= K_1(z)F_2^+(z), \\
c^+ &< \operatorname{Im} z < c^-.
\end{aligned} \tag{20}$$

Коефіцієнт $K_1(z)$ подамо як добуток, а другі доданки і праві частини рівнянь (20) – різницею аналітичних функцій у верхній ($\operatorname{Im} z > c^+$) і нижній ($\operatorname{Im} z < c^-$) півплощинах

$$\begin{aligned}
K_1(z) &= K_1(0)K_1^+(z)K_1^-(z), \quad m_2 e^{iza}\Psi^+(z)/K_1^-(z) = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z), \\
e^{-iza}K_2(z)[\Psi_1^-(z) + F_1^+(z)]/K_1^+(z) &= \chi^+(z) - \chi^-(z), \\
F_1^+(z)/K_1^-(z) &= f_1^+(z) - f_1^-(z), \quad K_1(0)K_1^-(z)F_2^+(z) = f^+(z) - f^-(z), \\
K_1^+(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta'_n}\right) \left(1 - \frac{iz}{2n}\right)^{-1}, \quad K_1^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{2n-1}\right)^{-1}, \\
\chi^+(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\alpha_k^-}{\zeta'_k + iz} \left(\Psi_1^-(i\zeta'_k) - \frac{R}{\sqrt{2\pi R_0}} \frac{1}{2 + \zeta'_k} \right) e^{\zeta'_k a} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{\alpha}_k^-}{2k-1-iz} \left(\Psi_1^-(-i(2k-1)) + \frac{R}{\sqrt{2\pi R_0}} \frac{1}{2k-3} \right) e^{-2ka} \right], \\
\chi_1^-(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^+}{\zeta_k + iz} \Psi^+(i\zeta_k) e^{-\zeta_k a}, \\
f_1^+(z) &= -\frac{R}{\sqrt{2\pi R_0} K_1^-(-2i)} \frac{1}{2-iz}, \quad f^+(z) = \frac{3C_0 R}{\sqrt{2\pi}} K_1(0) K_1^-(-2i) \frac{e^{-2a}}{2-iz}, \\
\alpha_k^+ &= -m_2 K_1(0) \lambda_2(i\zeta_k) K_1^+(i\zeta_k), \quad \alpha_k^- = -m_3 m_2^{-1} K_1(0) \lambda_2(i\zeta'_k) K_1^-(i\zeta'_k), \\
\bar{\alpha}_k^- &= \frac{m_1}{m_2} K_1(0) e^a \frac{[(2k-1)!!]^2 K_1^-(-i(2k-1))}{(2k-1)[(2k-2)!!]^2}, \quad k=1,2,\dots, \\
\lambda_2(z) &= i/[\lambda_1'(z)\Gamma(1-iz/2)\Gamma(1/2+iz/2)],
\end{aligned} \tag{21}$$

де ζ_n, ζ'_n ($n=1,2,\dots$) – додатні та від'ємні корені рівняння $\lambda_1(is) = 0$.

Зі співвідношень (20), (21) знаходимо [7, 9]

$$\begin{aligned}
\Phi_1^+(z) &= \frac{f_1^+(z) - \chi_1^+(z)}{K_1(0)K_1^+(z)}, \quad \Psi_1^-(z) = K_1^-(z)[f_1^-(z) - \chi_1^-(z)], \\
\Psi^+(z) &= \frac{1}{m_3} K_1^+(z)[f^+(z) - \chi^+(z)], \quad \Psi^-(z) = -\frac{f^-(z) - \chi^-(z)}{K_1(0)K_1^-(z)}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Розв'язок (22) системи функціональних рівнянь (20) містить невідомі значення $\Psi^+(i\zeta_k), \Psi_1^-(i\zeta'_k), \Psi_1^-(-i(2k-1))$ ($k=1,2,\dots$). Для їх визначення візьмемо у третій рівності (22) $z = i\zeta_n$, а у другій – $z = i\zeta'_n$ і $z = -i(2n-1)$ ($n=1,2,\dots$). Увівши малий параметр $\lambda = e^{-2a} = (R_1/R)^2$ ($0 < \lambda < 1$) і прийнявши позначення

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_k^+ &= \alpha_k^+ e^{(2k-\zeta_k)a}, \quad \tilde{\alpha}_k^- = \alpha_k^- e^{(2k+\zeta_k')a}, \quad \beta_n^+ = m_3^{-1} K_1^+(i\zeta_n), \quad \beta_n^- = K_1^-(i\zeta_n'), \\ \hat{\beta}_n^- &= K_1^-(-i(2n-1)), \quad g_n^+ = \frac{3C_0 R}{\sqrt{2\pi}} K_1(0) K_1^-(-2i) \frac{\beta_n^+ e^{-2a}}{2+\zeta_n}, \\ g_n^- &= -\frac{R}{\sqrt{2\pi R_0}} \frac{\beta_n^-}{K_1^-(-2i)(2+\zeta_n')}, \quad \hat{g}_n^- = \frac{R}{\sqrt{2\pi R_0}} \frac{\hat{\beta}_n^-}{K_1^-(-2i)(2n-3)}, \quad k, n=1, 2, \dots\end{aligned}\quad (23)$$

відносно невідомих

$$\begin{aligned}z_k^+ &= \Psi^+(i\zeta_k), \quad z_k^- = \Psi_1^-(i\zeta_k') - \frac{R}{\sqrt{2\pi R_0}} \frac{1}{2+\zeta_k'}, \\ \hat{z}_k^- &= \Psi_1^-(-i(2k-1)) + \frac{R}{\sqrt{2\pi R_0}} \frac{1}{2k-3}\end{aligned}\quad (24)$$

отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}z_n^+ + \beta_n^+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\alpha}_k^-}{\zeta_k' - \zeta_n} z_k^- + \frac{\hat{\alpha}_k^-}{2k-1+\zeta_n} \hat{z}_k^- \right) \lambda^k &= g_n^+, \\ z_n^- + \beta_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k - \zeta_n'} z_k^+ \lambda^k &= g_n^-, \quad \hat{z}_n^- + \hat{\beta}_n^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k + 2n-1} z_k^+ \lambda^k = \hat{g}_n^-, \quad n=1, 2, \dots\end{aligned}\quad (25)$$

Система рівнянь (25) має експоненціально спадальні за індексом k коефіцієнти. Її розв'язок знаходимо у рядах за степенями параметра λ [8, 9].

Сталі C_0 і λ визначаємо із двох додаткових умов

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_k^- z_k^- - \hat{\alpha}_k^- \hat{z}_k^-) \lambda^k = -\frac{3C_0 R}{\sqrt{2\pi}} K_1(0) K_1^-(-2i) e^{-2a}, \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\zeta_k' \tilde{\alpha}_k^- z_k^- + (2k-1) \hat{\alpha}_k^- \hat{z}_k^- \right] \lambda^k = \frac{6C_0 R}{\sqrt{2\pi}} K_1(0) K_1^-(-2i) e^{-2a}, \quad (27)$$

перша з яких умова неперервності контактних напружень на лінії переходу із зони зчеплення в зону проковзування, а друга забезпечує виконання крайових нерівностей (7) [9].

Розв'язок системи рівнянь (25) подамо у вигляді $z_k^\pm = (R/R_0) z_{1k}^\pm + C_0 R z_{2k}^\pm$, $\hat{z}_k^- = (R/R_0) \hat{z}_{1k}^- + C_0 R \hat{z}_{2k}^-$. Тоді з умови (26) знаходимо

$$C_0 = \frac{\bar{C}_0}{R_0},$$

$$\bar{C}_0 = -\left(\frac{3}{\sqrt{2\pi}} K_1(0) K_1^-(-2i) e^{-2a} - \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_k^- z_{2k}^- - \hat{\alpha}_k^- \hat{z}_{2k}^-) \lambda^k \right)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_k^- z_{1k}^- - \hat{\alpha}_k^- \hat{z}_{1k}^-) \lambda^k,$$

а умова (27) служить трансцендентним рівнянням для визначення відносного розміру зони зчеплення $R_1/R = \sqrt{\lambda}$.

Визначення радіуса області контакту, контактних напружень та зближення тіл. Радіус R області контакту знайдемо із умови рівноваги (8). Перетворивши інтеграл із рівняння (8) і, врахувавши розв'язок (22) і заміни (9), (10), отримаємо:

$$R = \sqrt[3]{\frac{k_0 PR_0}{\pi m_1 E^*}}, \quad k_0 = \frac{K_1(0)K_1^+(i)}{1/(3K_1^-(-2i)) + \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_k^+ (\zeta_k - 1)^{-1} (z_{1k}^+ + \bar{C}_0 z_{2k}^+) \lambda^k}.$$

Напруження в області контакту знайдемо, застосовуючи заміни (12), (13), (16) і обертаючи інтеграли Фур'є із виразів (18). Перетворивши відповідні інтеграли до рядів за теорією лишків, на підставі (21), (22) отримаємо такі розподіли нормальних та дотичних контактних напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} \Big|_{z_1=0} &= -3 \frac{m_2}{m_3} \frac{\bar{C}_0 p_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{r}{R} + \frac{m_1}{m_3} p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(2k-1)!!]^2}{(2k-1)[(2k-2)!!]^2} (\bar{z}_{1k}^- + \bar{C}_0 \bar{z}_{2k}^-) \left(\frac{r}{R}\right)^{2k-2}, \\ \tau_{rz}^{(1)} \Big|_{z_1=0} &= 3 \frac{m_2}{m_3} \frac{\bar{C}_0 p_0}{\sqrt{2\pi}} \left[\mu_0 - \frac{m_1}{2m_2} \left(\ln \frac{r}{4R_1} + 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta_n + 2} - \frac{1}{2k-3} \right) \right) \right] \frac{r}{R} - \\ &\quad - \frac{m_1}{m_3} \frac{p_0}{K_1(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(2k-1)!!]^2}{(2k)!!(2k-2)!!K_1^-(-2ik)} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{2k-1} \times \\ &\quad \times \left[\tau_k + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\alpha}_n^-(z_{1n}^- + \bar{C}_0 z_{2n}^-)}{\zeta_n' + 2k} + \frac{\tilde{\alpha}_n^-(\bar{z}_{1n}^- + \bar{C}_0 \bar{z}_{2n}^-)}{2(n-k)-1} \right) \lambda^{n-1/2} \right], \quad 0 \leq r \leq R_1, \\ \tau_1 &= 0, \quad \tau_k = \frac{3\bar{C}_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{R_1}{R} K_1(0)K_1^-(-2i) \frac{1}{2(k-1)}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad p_0 = \frac{k_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{P}{R^2}, \\ \sigma_z^{(1)} \Big|_{z_1=0} &= p_0 \frac{R}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[m_2 \lambda_2(i\zeta_k)(z_{1k}^+ + \bar{C}_0 z_{2k}^+) \left(\frac{r}{R_1}\right)^{-\zeta_k} - \lambda_2(i\zeta_k')(z_{1k}^- + \bar{C}_0 z_{2k}^-) \left(\frac{r}{R}\right)^{-\zeta_k'} \right], \\ &\quad R_1 < r < R. \end{aligned}$$

Зближення тіл δ визначаємо, виходячи із виразу (14) для нормальних переміщень $u_\zeta \Big|_{\zeta=0}$ при $r=0$. Отримуємо:

$$\delta = \frac{R^2}{R_0} \left(\frac{1}{2K_1^-(-2i)} + \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_k^+}{\zeta_k} (z_{1k}^+ + \bar{C}_0 z_{2k}^+) \lambda^k \right).$$

Результати обчислень. Наведено відносний радіус зони зчеплення R_1/R (табл. 1) та нормалізовані значення зближення тіл $\bar{\delta} = 2R_0(G/(PR_0))^{2/3} \delta$, радіуси області контакту $\bar{R} = (G/(PR_0))^{1/3} R$ і максимальні за модулем нормальні контактні напруження (у центрі області контакту) $\bar{\sigma}_0 = (R^2/P) \sigma_z^{(1)} \Big|_{z_1=0, r=0}$ (табл. 2), обчислені за різних відношень модулів зсуву G_2/G_1 і коефіцієнтів тертя μ_0 для чисел Пуассона $m^{(1)} = m^{(2)} = 10/3$. За гладкого контакту ($\mu_0 = 0$) вказані нормалізовані значення такі [2]:

$$\bar{\delta} = \frac{3}{2\sqrt[3]{3}} \left(\frac{m-1}{m} \right)^{2/3}, \quad \bar{R} = \frac{1}{2} \left(3 \frac{m-1}{m} \right)^{1/3}, \quad \bar{\sigma}_0 = -\frac{3}{2\pi}.$$

Відносний розмір зони зчеплення в осесиметричній задачі є значно більший, ніж у відповідній задачі для плоскої деформації, де він для $\mu_0 = 0,25$, $m^{(1)} = 10/3$, $G_2/G_1 = \infty$ становить 0,5432 [4].

Таблиця 1. Відносні радіуси зони зчеплення R_1/R ($m^{(1)}=m^{(2)}=10/3$)

G_2/G_1	μ_0							
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
1,5	0,8477	0,9827	0,9970	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,5184	0,9153	0,9810	0,9953	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0,1224	0,5921	0,8428	0,9380	0,9739	0,9884	0,9993	1,0000
10	0,0329	0,3412	0,6509	0,8234	0,9092	0,9519	0,9851	0,9956
∞	0,0105	0,1996	0,4869	0,6980	0,8239	0,8957	0,9608	0,9838

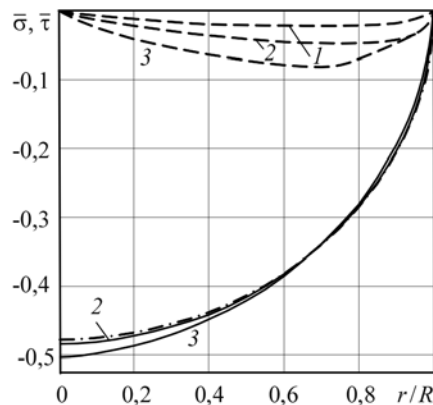
Таблиця 2. Нормалізовані значення зближення тіл $\bar{\delta}$, радіуси області контакту \bar{R} і максимальні нормальні контактні напруження $\bar{\sigma}_0$ ($m^{(1)}=m^{(2)}=10/3$)

μ_0	0			0,25			0,5		
	$\bar{\delta}$	\bar{R}	$\bar{\sigma}_0$	$\bar{\delta}$	\bar{R}	$\bar{\sigma}_0$	$\bar{\delta}$	\bar{R}	$\bar{\sigma}_0$
G_2/G_1									
1,5	0,6814	0,5837	-0,4775	0,6818	0,5853	-0,4819	0,6841	0,5913	-0,4931
2	0,7004	0,5918	-0,4775	0,6998	0,5913	-0,4809	0,7034	0,6005	-0,4977
4	0,7427	0,6094	-0,4775	0,7399	0,6059	-0,4850	0,7417	0,6106	-0,4934
10	0,7825	0,6255	-0,4775	0,7774	0,6194	-0,4931	0,7770	0,6188	-0,4919
∞	0,8199	0,6403	-0,4775	0,8126	0,6319	-0,5033	0,8113	0,6297	-0,4991

Показано (див. рисунок) розподіли безрозмірних нормальних $\bar{\sigma} = (R^2/P)\sigma_z^{(1)}|_{z_1=0}$ і дотичних $\bar{\tau} = (R^2/P)\tau_{rz}^{(1)}|_{z_1=0}$ контактних напружень для $\mu_0 = 0,25$, $G_2/G_1 = 2, 4, \infty$ (криві 1-3), а також нормальних контактних напружень ($\bar{\sigma} = \frac{3}{2\pi}\sqrt{1-(r/R)^2}$, $\bar{\tau} \equiv 0$) за гладкого контакту пружних тіл ($\mu_0 = 0$ [2]).

Розподіли безрозмірних контактних напружень: нормальних $\bar{\sigma}$ (суцільні лінії, $\mu_0 = 0,25$; штрихпунктирні, $\mu_0 = 0$), дотичних $\bar{\tau}$ (штрихові, $\mu_0 = 0,25$):
1 - $G_2/G_1 = 2$; 2 - 4; 3 - ∞ .

Distributions of dimensionless contact stresses: normal $\bar{\sigma}$ (solid lines, $\mu_0 = 0,25$; dash-dotted, $\mu_0 = 0$), tangential $\bar{\tau}$ (dashed, $\mu_0 = 0,25$): 1 - $G_2/G_1 = 2$; 2 - 4; 3 - ∞ .



Третя впливає на розподіл нормальних контактних напружень несуттєво, зменшуючи їх за абсолютною величиною до 5% у центрі ділянки контактного

тиску, але викликає дотичні контактні напруження, які зростають зі збільшенням відношення модулів зсуву G_2/G_1 , яке характеризує ступінь різнорідності матеріалів контактуючих тіл. Вплив сил тертя на досліджувані характеристики контакту найбільший, якщо одне із тіл, які знаходяться в контакті, абсолютно жорстке.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена осесимметричная задача о трении в контакте двух упругих тел при условии, что область контакта разделяется на круговую зону сцепления и кольцевую зону проскальзывания. Ввиду малости области контакта тела заменены упругими полупространствами. Осуществлен переход от граничной задачи для двух упругих полупространств к задаче для одного полупространства. Обобщенным методом Винера–Хопфа получено аналитическое решение задачи. Определены радиусы области контакта и зоны сцепления, распределение контактных напряжений, сближение тел.

SUMMARY. The axis-symmetric problem on frictional contact of two elastic bodies under condition that contact domain is divided into a circular adhesion zone and also a circular slipping zone is solved. In view of the smallness of the contact region, the bodies are replaced by the elastic half-spaces. The passage from the boundary problem of two half-spaces to the problem of one half-space is realized. Using the Wiener–Hopf generalized method, the analytical solution of the problem is obtained. The radii of the contact domain and the adhesion zone, the distribution of contact stresses, the approach of bodies are found.

1. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // J. für die reine und angewandte Mathematik. – 1882. – 92. – S. 156–171.
2. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
3. *Галин Л. А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Прикл. математика и механика. – 1945. – 9, вып. 5. – С. 413–424.
4. *Spence D. A.* An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1973. – 73. – P. 249–268.
5. *Жупанська О. І.* Фрикційна взаємодія жорсткого циліндра з пружним півпростором // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – № 2. – С. 125–134.
6. *Улітко А. Ф., Острик В. І.* Фрикционный контакт упругих тел и взаимодействие межфазных трещин // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Механіка. – К.: Наук. думка, 2007. – С. 305–317.
7. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
8. *Антипов Ю. А.* Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1987. – № 7. – С. 29–33.
9. *Острик В. І.* Контакт пружного та жорсткого клинів з урахуванням тертя і зчеплення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 88–100.
10. *Острик В. І., Улітко А. Ф.* Про одну властивість розв'язків задач теорії пружності для двох півплощин або півпросторів // Там же. – 2009. – 52, № 2. – С. 72–80.

Одержано 27.05.2011