

УДК 532.61

ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ВІЛЬЯМСА ЗА НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ

О. В. ЛИЧАК, І. С. ГОЛИНСЬКИЙ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Змодельовано та проаналізовано вплив похибок визначення поля напружень на точність обчислення коефіцієнтів розкладу Вільямса та похибку відтворення поля напружень за нормального відриву.

Ключові слова: *коефіцієнт інтенсивності напружень, коефіцієнти вищих порядків, похибки, поле напружень.*

Визначення коефіцієнтів розкладу напружень у степеневий ряд Вільямса має суттєве значення для дослідження квазікрихкого руйнування матеріалів. Важливим є коректне визначення як першого члена цього ряду, що задає коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), так і членів вищих порядків [1–5]. Недавні дослідження показали, що коректне обчислення членів вищих порядків не лише суттєво впливає на точність відтворення поля напружень досліджуваного зразка [3, 6, 7] та визначення КІН [4, 5, 8], але й деякі з них (зокрема 2-й та 3-й коефіцієнти) мають самостійне важливе значення для встановлення характеру руйнування, розмірів пластичної зони тріщини, густини енергії деформації тощо [2–4, 6, 9–11]. Важливо враховувати коефіцієнти розкладу вищих порядків під час оцінювання тріщиностійкості зразків зі змішаними типами навантажень, неоднорідностями матеріалу зразка та косою тріщиною [4, 5, 12, 13]. Мета роботи – оцінити вплив похибок визначення напружень за умов плоскої деформації зразка на точність розрахунку коефіцієнтів ряду Вільямса, що дасть можливість гарантувати достатню точність отримуваних результатів.

Розвинуті сучасні методи цифрового моделювання поведінки матеріалів під час розтріскування, зокрема методи кінцевих та граничних елементів, дають змогу з достатньою точністю симулювати розподіл переміщень поверхні навантаженого зразка з тріщиною [2] та розраховувати необхідні розподіли напружень. Слід зауважити, що результати, отримані засобами числового моделювання, дані фізичних експериментів та відомі результати точного розв'язку для певних задач не завжди точно збігаються [14–16], що свідчить про певні недоліки сучасних методів числового моделювання та необхідність перевірки цих даних методами фізичного експерименту з підвищеною точністю.

Методика дослідження. Сучасні способи визначення напружень зразків біля вершини тріщини під час випробувань матеріалів уже розглянуті [17], тому зупинимося лише на параметрах точності. Перш за все слід відзначити, що існують різноманітні методи визначення напружень [13, 18], серед яких можна виокремити ті, що визначають деформацію або переміщення поверхні зразка за механічних навантажень [9, 13, 17] з подальшим використанням цих даних для визначення полів напружень.

На основі отриманих розподілів напружень у зразках розраховують необхідну кількість коефіцієнтів розкладу Вільямса (як правило, за допомогою ітерацій-

них процедур методом найменших квадратів чи Ньютона–Рафсона) [19]. Оскільки обчислювальний експеримент суттєвих обмежень за інструментальною складовою похибки не має, то випадкові похибки деформації під час моделювання задають величинами порядку мікрострейнів [9], а кількість коефіцієнтів розкладу Вільямса задають вище 20 порядку [1, 3, 20]. Більшість дослідників відзначають, що обмеження ряду Вільямса першими 5–7 членами дає змогу достатньо точно відтворити розподіл напружень у зразку біля вершини тріщини та отримати задовільну точність визначення коефіцієнтів. Під час фізичного експерименту важливий вплив на результати, окрім методичних, мають також інструментальні похибки вимірювальних систем, похибки виготовлення та фізичних параметрів пружності матеріалів зразків [21] тощо. Дослідники подають різні значення похибок, використаних ними стандартних чи власних вимірювальних систем [17]. З огляду на чинні стандарти та практику можна виділити три основні групи вимірювальних систем за похибками вимірювань – 1, 2 та 5% від максимальної величини визначеного напруження. Розподіл інструментальних похибок вимірювальних систем, як правило, нормальний, а характер похибок – адитивний.

Методика дослідження така: до заданого точного розподілу напружень зразка з відомими точними значеннями коефіцієнтів Вільямса та координатами вершини тріщини додавали випадковий шум, що відповідав інструментальній похибці вимірювальної системи. Згодом визначали коефіцієнти Вільямса та координати вершини тріщини для зашумлених даних та відтворювали розподіли напружень на основі визначених коефіцієнтів. Далі розраховували похибки визначення коефіцієнтів Вільямса і похибки відтворення розподілу напружень на основі цих коефіцієнтів.

Розподіл нормованих напружень зразка задавали шляхом розрахунку на основі точних значень нормованих коефіцієнтів Вільямса (п'ять перших членів розкладу) для модельної крайової тріщини ($\sigma = 1$; $E = 1$; $H = 1$; $\nu = 0,25$; $a/W = 0,25$, I тип навантаження) [1]. Розглядали систему непрямих вимірювань поля напружень, котра передбачає визначення трьох компонент напружень σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} плоскодеформованого твердого тіла. Поле нормованих напружень задано розмірами 400×400 точок, координати вершини тріщини – точно по центру поля напружень (200; 200) [13], а напруження в точці сингулярності поля – рівним середньому значенню напруження у трьох сусідніх розрахованих точках.

Компоненти напружень для плоскої деформації σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} розраховувались на основі відомих співвідношень [19]:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_n r^{(n-2)/2} \begin{cases} \left\{ 2 + (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ \left\{ 2 - (-1)^n - \frac{n}{2} \right\} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \cos\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \\ - \left\{ (-1)^n + \frac{n}{2} \right\} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta + \left(\frac{n}{2}-1\right) \sin\left(\frac{n}{2}-3\right)\theta \end{cases},$$

де A_n – коефіцієнт Вільямса n -го порядку; r – довжина радіус-вектора, проведеного від вершини тріщини до точки, в якій розраховували напруження; θ – кут між цим радіус-вектором та напрямком поширення тріщини.

Центральну область навколо вершини тріщини (круг радіусом 0,1 від довжини тріщини) виключили з розгляду для коректної імітації реальної процедури визначення коефіцієнтів Вільямса, оскільки у цій області не виконуються умови пружної деформації [8, 13].

Для імітації впливу похибок визначення компонент напружень генерували три різні незалежні набори випадкових чисел – центровані, з нормальним розподілом, середньоквадратичним відхиленням рівним 1, розмірністю 400×400 точок. Нормували амплітуду шуму, виходячи з умови рівності максимальної величини заданого поля напружень 0,9 діапазону чутливості системи вимірювань. Для імітації впливу похибок відомих фізичних констант матеріалу (модулів пружності та коефіцієнта Пуассона) задавали систематичну складову похибки шляхом додавання до випадкових величин числа, еквівалентного значенню 1% похибки. У результаті отримали такі набори випадкових величин (окремо для кожної з компонент моделювання нормованого поля напружень по координаті X та Y): $(\delta_{1xx} \delta_{2xx} \delta_{5xx} \delta_{1+1xx} \delta_{2+1xx} \delta_{5+1xx})$, $(\delta_{1yy} \delta_{2yy} \delta_{5yy} \delta_{1+1yy} \delta_{2+1yy} \delta_{5+1yy})$, $(\delta_{1xy} \delta_{2xy} \delta_{5xy} \delta_{1+1xy} \delta_{2+1xy} \delta_{5+1xy})$.

Ці набори поточно додавали до відповідних точних значень розподілів напружень, щоб отримати дані, котрі містять похибки вимірювань. Щоб визначити коефіцієнти Вільямса з отриманого поля напружень з внесеними похибками, вибирали набір точок з рівномірним розміщенням у вузлах квадратної ґратки з кроком 20 пікселів аналогічно до праці [8]. Визначали коефіцієнти Вільямса та координати вершини тріщини методом найменших квадратів [19]. Циклічні розрахунки припиняли, коли абсолютні значення приростів обох координат вершини тріщини (X_0 та Y_0) не перевищували 0,1 розміру мінімального елемента просторового розділення у десяти послідовних циклах.

Числові результати. Результати визначення (відтворення) коефіцієнтів розкладу напруження у ряд Вільямса для заданих похибок наведено у табл. 1. У табл. 2 подані відносні похибки δ обчислених коефіцієнтів Вільямса, а у табл. 3 – середні значення (M) та середньоквадратичні відхилення (RMS) відносних похибок відтворення розподілу напружень для заданих похибок визначення напружень. У табл. 4 наведено похибки визначення координат (X_0 , Y_0) положення вершини тріщини (обидві точні координати X_0 та Y_0 становлять 0,200). У всіх таблицях в першій колонці перше число відповідає середньому значенню випадкової складової похибки визначення напружень, друге – постійному зміщенню похибки.

Таблиця 1. Результати відтворення коефіцієнтів Вільямса для заданих похибок визначення напружень

a_n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0–0	1,0594*	-0,1505*	0,0795*	-0,0479*	0,0057*
1–0	1,0576	-0,1480	0,0789	-0,0596	0,0232
1–1	1,0719	-0,1417	0,1158	-0,0843	0,0443
2–0	1,0557	-0,1455	0,0784	-0,0714	0,0407
2–1	1,0701	-0,1392	0,1152	-0,0961	0,0617
5–0	1,0502	-0,1379	0,0763	-0,1067	0,0934
5–1	1,0646	-0,1315	0,1130	-0,1315	0,1141

* – точні значення коефіцієнтів [1], які використовували під час симулювання поля напружень.

На рисунку наведено розподіли нормованих напружень уздовж двох напрямків (з врахуванням коефіцієнтів Вільямса вищих порядків та лише першого коефіцієнта Вільямса (КІН)).

Таблиця 2. Відносні похибки відтворених коефіцієнтів Вільямса для заданих похибок визначення напружень

$\delta(a_n)$	$\delta(a_1)$	$\delta(a_2)$	$\delta(a_3)$	$\delta(a_4)$	$\delta(a_5)$
%					
0-0	$1,2 \cdot 10^{-15*}$	$6,6 \cdot 10^{-14*}$	$5,6 \cdot 10^{-15*}$	$9,3 \cdot 10^{-14*}$	$5,2 \cdot 10^{-14*}$
1-0	-0,17	-1,65	-0,69	24,51	306,67
1-1	1,18	-5,85	45,66	75,99	677,72
2-0	-0,35	-3,32	-1,42	49,04	613,86
2-1	1,01	-7,51	44,88	100,56	982,98
5-0	-0,87	-8,38	-3,99	122,78	1539,12
5-1	0,49	-12,60	42,16	174,51	1902,63

* – точні значення коефіцієнтів [1], які використовували під час симулювання поля напружень.

Таблиця 3. Середні значення (M) та середньоквадратичні відхилення (RMS) відносних похибок відтворення розподілу напружень (%) для заданих похибок визначення напружень

$\delta(\sigma)$, %	M($\delta(\sigma_{xx})$)	RMS($\delta(\sigma_{xx})$)	M($\delta(\sigma_{yy})$)	RMS($\delta(\sigma_{yy})$)	M($\delta(\tau_{xy})$)	RMS($\delta(\tau_{xy})$)
1-0	-0,05	2,99	-0,05	0,35	0,46	2,32
1-1	-9,07	15,72	-2,66	2,77	-0,07	4,66
2-0	-0,10	6,00	-0,10	0,72	0,92	4,64
2-1	-9,13	18,05	-2,71	2,90	0,39	6,88
5-0	-0,24	15,06	-0,25	1,85	2,30	11,62
5-1	-9,28	25,95	-2,88	3,54	1,76	13,80

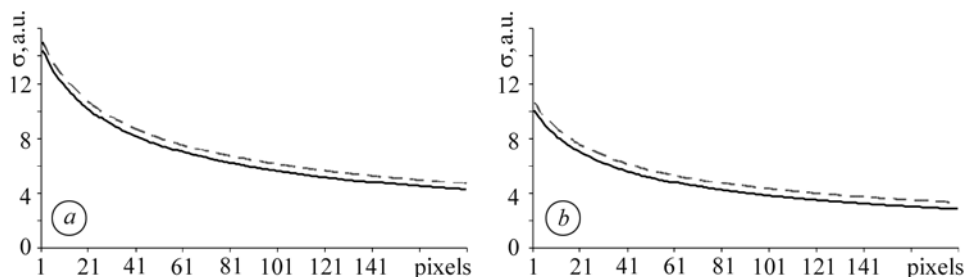
Таблиця 4. Похибки визначення координат (X_0, Y_0) положення вершини тріщини

$\delta(X, Y)$	ΔX_0 , pxl	ΔX_0 , %	ΔY_0 , pxl	ΔY_0 , %
1-0	-0,20	-0,10	-0,17	-0,09
1-1	-0,81	-0,41	0,02	0,01
2-0	-0,41	-0,21	-0,34	-0,17
2-1	-1,02	-0,51	-0,16	-0,08
5-0	-1,03	-0,52	-0,88	-0,44
5-1	-1,64	-0,82	-0,71	-0,35

Дискусія. Перш за все слід відмітити, що можливе достатньо точне відтворення положення модельної вершини тріщини (табл. 4) навіть за значних похибок визначених напружень. Похибка відтворення X_0 та Y_0 суттєво не перевищує розмір мінімального елемента просторового розділення заданого розподілу напружень.

Відносні похибки визначення коефіцієнтів Вільямса (крім першого) суттєво залежать від похибок визначення напружень (табл. 1, 2). Перший коефіцієнт a_1 демонструє порівняно слабку залежність від похибок вхідних даних і може бути визначений із задовільною точністю практично для усіх заданих похибок напружень. Коефіцієнти a_2 та a_3 можуть бути обчислені з достатньою точністю лише для малих похибок визначення напружень. Коефіцієнти a_4 та a_5 не можуть бути

достовірно визначені навіть за відносно малих похибок визначення напружень, а тому їх враховувати недоцільно. Водночас врахування a_4 та коефіцієнтів розкладу вищих порядків є доцільним для числового моделювання процесу розтріскування матеріалів, коли похибка визначення напружень може бути суттєво менша за 1%.



Розподіл сумарного напруження ($\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$) в області пружних деформацій вздовж (a) та впоперек (b) поширення тріщини. Штрихова лінія – розподіл з врахуванням тільки КІН. Середнє відхилення величини напруження становить 7,9% (a) та 11,7% (b).

Distribution of total stress ($\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$) in the zone of elastic deformation along (a) and perpendicular to the crack propagation lines (b). Dashed line – distribution of total stress, calculated by using only SIF.

The average deviation between stress values is 7.9% (a) and 11.7% (b).

Як видно з табл. 3, за умови використання вхідних даних з похибкою 5%, відтворення поля напружень компоненти σ_{xx} можливе з середньою випадковою похибкою $\sim 26\%$. Тобто, на основі отриманих параметрів можливе лише якісне відтворення реальних напружень, а отже, достовірність кількісних оцінок квазі-крихкого розтріскування матеріалу є низькою. З однієї сторони, це означає, що дані вимірювання напружень з похибками більшими за 2% не можуть бути використані для визначення коефіцієнтів Вільямса вищих порядків, а з іншої – коефіцієнт a_1 навіть для похибки 5% відтворюється з достатньою точністю. Це свідчить про те, що використання лише КІН не може бути достатнім для достовірної характеристики крихкого розтріскування, і слід використовувати принаймні два наступні члени розкладу Вільямса. Також слід зауважити, що компоненти напружень σ_{xx} та τ_{xy} демонструють суттєво вищу чутливість до вхідних похибок вимірювань, ніж σ_{yy} . Використані розміри вибірки (382 точки) з поля напружень для визначення коефіцієнтів Вільямса та розмір поля напружень (400×400 точок) забезпечують достатню достовірність отриманих результатів.

ВИСНОВКИ

Встановлено, що для коректного обчислення коефіцієнтів розкладу Вільямса до третього порядку за нормального відриву необхідна система визначення напружень з випадковою похибкою менше 1%. Встановлено, що дані, отримані зі систем зі зміщеними вхідними похибками, призводять до суттєвого погіршення точності визначення коефіцієнтів Вільямса. Зіставлення відтвореного розподілу напружень на основі коефіцієнтів, отриманих з використанням зашумлених даних та точного розподілу напружень показало, що дані з похибками більшими 2% призводять до критично великої похибки відтворення поля напружень. Визначення членів розкладу вище третього порядку шляхом фізичного експерименту можливе, очевидно, лише за умови застосування високоточних систем визначення напружень.

РЕЗЮМЕ. Смоделировано и проанализировано влияние погрешностей определения поля напряжений на точность вычисления коэффициентов разложения в ряд Вильямса и погрешность восстановления поля напряжений при нормальном отрыве.

SUMMARY. The modelling and analysis of the influence of errors of the stress field determination during mode I loading on the accuracy of computation of the Williams expansion coefficients and the accuracy of reconstruction of the stress field are performed.

1. *Su R. K. L. and Fok S. L.* Determination of coefficients of the crack tip asymptotic field by fractal hybrid finite elements // *Engng. Fract. Mechanics.* – 2007. – **74**. – P. 1649–1664.
2. *Shrestha S. and Ohga M.* Scaled Boundary Finite Element Method for Various Crack Problems // *Steel Struct.* – 2007. – **7**. – P. 277–287.
3. *Papadgpoulos G. A. and Poniridis P. I.* Crack initiation under biaxial loading with higher-order approximation // *Engng Fract. Mechanics.* – 1989. – **32**, № 3. – P. 351–360.
4. *Hui C. Y. and Andy R.* Why K? High order singularities and small scale yielding // *Int. J. of Fracture.* – 1995. – **72**. – P. 97–120.
5. *Becker Jr. T. L., Cannon R. M., and Ritchie R. O.* Statistical fracture modeling: crack path and fracture criteria with application to homogeneous and functionally graded materials // *Engng Fract. Mechanics.* – 2002. – **69**. – P. 1521–1555.
6. *Chao Y. J., Liu S., and Broviak B. J.* Brittle Fracture: Variation of Fracture Toughness with Constraint and Crack Curving under Mode I Condition // *Experimental Mechanics.* – 2001. – **41**, № 3. – P. 232–241.
7. *Liu S. and Chao Y. J.* Variation of fracture toughness with constraint // *Int. J. of Fracture.* – 2003. – **124**. – P. 113–117.
8. *Direct estimation of generalized stress intensity factors using a three-scale concurrent multigrid X-FEM / J. C. Passieux, A. Gravouil, J. R'ethor'e, and M. C. Baietto // Int. J. for Numerical Methods in Engng.* – 2011. – **85**, № 13. – P. 1648–1666.
9. *Influence of non-singular higher order terms on the stress field of thin welded lap joints and small inclined cracks in plates / F. Berto, P. Lazzarin, C. J. Christopher, and M. N. James // Characterization of crack tip stress fields.* – Italy: Forni di Sopra (UD), 2011. – P. 88–95.
10. *Jeong-Ho Kim and Glaucio H. Paulino* T-stress, mixed-mode stress intensity factors, and crack initiation angles in functionally graded materials: a unified approach using the interaction integral method // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* – 2003. – **192**. – P. 1463–1494.
11. *Ayatollahi M. R. and Nejati M.* Experimental evaluation of stress field around the sharp notches using photoelasticity // *Materials and Design.* – 2011. – **32**. – P. 561–569.
12. *Linhui Zhang, Jeong-Ho Kim.* Higher-Order Terms for the Mode-III Stationary Crack-Tip Fields in a Functionally Graded Material // *J. of Applied Mechanics.* – 2011. – **78**, № 1. – <http://dx.doi.org/10.1115/1.4002289>.
13. *The stress intensity of mixed mode cracks determined by digital image correlation / P. Lopez-Crespo, A. Shterenlikht, E. A. Patterson et al. // J. Strain Analysis.* – 2008. – **43**. – P. 769–780.
14. *Crack paths under mixed mode loading / J. R. Yates, M. Zanganeh, R. A. Tomlinson et al. // Engng. Fracture Mechanics.* – 2008 – **75**, № 3–4. – P. 319–330.
15. *Jarruwat Chareonsuk and Passakorn Vessakosol.* Numerical solutions for functionally graded solids under thermal and mechanical loads using a high-order control volume finite element method // *Applied Thermal Engng.* – 2011. – **31**. – P. 213–227.
16. *Prime M. B.* Measuring Residual Stress and the Resulting Stress Intensity Factor in Compact Tension Specimens // *Fatigue & Fracture of Engng. Materials & Structures.* – 1999. – **22**, № 3. – P. 195–204.
17. *Withers P. J. and Bhadeshia H. K. D. H.* Residual stress. Part 1: Measurement techniques // *Materials Science and Technology.* – 2001. – **17**. – P. 355–365.
18. *Stress Intensity Measurement via Infrared Focal Plane Array / J. R. Lesniak, D. J. Bazile, B. R. Boyce et al. // ASTM STP.* – 1996. – № 1318. – P. 208–220.
19. *Smith C. W. and Kobayashi A. S.* Experimental fracture mechanics / Ed.: A. S. Kobayashi // *Handbook on Experimental Mechanics*, 2nd ed. – New York: VCH, 1993. – 1074 p.
20. *Xiao Q. Z. and Karihaloo B. L.* Evaluation of the higher order weight functions by the finite element method // *ESIS publications ECF15.* – <http://www.structuralintegrity.eu/pdf/esis/Documents/Conference/ECF/15/Xiao%20Q%20amd%20Karihalloo%20B.pdf>
21. *Марочник* стали и сплавов. – <http://www.splav.kharkov.com>.

Одержано 23.06.2011