

УДК 539.3

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МЕТОДАМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАДАЧ АНТИПЛОСКОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТІЛ ІЗ ТОНКИМИ СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ.

### II. Аналіз концентрації та інтенсивності напружень

Я. М. ПАСТЕРНАК<sup>1</sup>, Г. Т. СУЛИМ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Луцький національний технічний університет;

<sup>2</sup> Львівський національний університет ім. Івана Франка

З суто фізичних міркувань отримано зв'язок напружень у вершині дефекту із коефіцієнтами при кореневій особливості поля напружень – узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН). Побудовано апроксимаційні формули для обчислення узагальнених КІН. Порівнянням результатів розрахунків конкретних задач запропонованим та прямим підходами підтверджено ефективність використання розробленого методу.

**Ключові слова:** тонке стрічкове включення, узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень, концентрація напружень.

Торцеві сталі  $\sigma_{\tau 3}^0$ ,  $\sigma_{\tau 3}^n$  для моделі включення у вигляді лінії [1, 2] не завжди вдається зіставити із зусиллями, розподіленими на торцях включення реальної геометричної форми, через те, що поняття прикладеного до торця навантаження можна застосувати лише до включень з прямокутним чи трапецевидним профілями торця. Внаслідок заміщення включення із замкнутою до того ж гладкою, зокрема й на торці, поверхнею (кривою) деякою наділеною певними властивостями розімкнутою поверхнею (лінією), у відповідному розв'язку задачі поблизу країв цієї поверхні (лінії) виникає відома [2] коренева особливість поля напружень та крайових функцій  $\Sigma t_j$ . У цьому випадку для обчислення концентрації напружень необхідно використовувати зв'язки між напруженнями та узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН), що враховують скінченну кривину торця дефекту. Такі результати отримані, зокрема у праці [3], методами рядів для включень із заокругленими вершинами, близькими за формою до гострокінцевих. Використаємо для отримання подібних співвідношень розроблену модель тонкого включення.

**Визначення концентрації напружень на торцях включення.** Дослідимо рівновагу прилеглої до торця частини включення за припущення, що торець включення заокруглений (рис. 1).

Рівняння статичної рівноваги уявно відсіченої частини включення з урахуванням принципу спряження та умов  $\Sigma t = -\Sigma t_i$  ідеального механічного контакту включення з середовищем має вигляд

$$\int_{-h(r)}^{h(r)} \sigma_{13}(r, x_2) dx_2 = - \int_0^r \Sigma t(r) dr . \quad (1)$$

Контактна особа: Я. М. ПАСТЕРНАК, e-mail: pasternak@ukrpost.ua

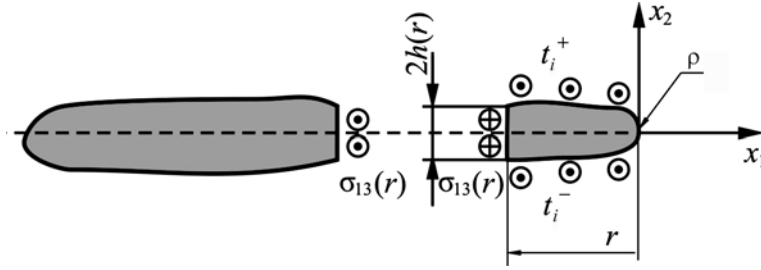


Рис. 1. Схема задачі про визначення концентрації напружень.

Fig. 1. The scheme of the problem for determination of stress concentration.

При  $r \rightarrow 0$  півтовщина  $h(r) = \sqrt{r\sqrt{2\rho - r}} + O(r^2)$ , де  $\rho$  – радіус заокруглення вершини включення, тому ліву частину (1) можна подати у вигляді

$$\int_{-h(r)}^{h(r)} \sigma_{13}(r, x_2) dx_2 \approx 2h(r)\sigma_{13}(r). \quad (2)$$

З урахуванням (2) напруження  $\sigma_{13} = \sigma_{13}(r)|_{r=0}$  на торці включення, відповідно до рівняння (1) дорівнюють

$$\sigma_{13} = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r \Sigma t(r) dr}{2h(r)} = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r \Sigma t(r) dr}{2\sqrt{r}\sqrt{2\rho - r}} = -\frac{1}{\sqrt{2\rho}} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \Sigma t(r). \quad (3)$$

Для знаходження границі (3) використано правило Лопіталя.

Щоб визначити напруження  $\sigma_{23}$  в матриці у вершині тонкого пружного включення, обчислимо деформації останнього при  $r \rightarrow 0$ . Оскільки

$$\varepsilon_{23}(r) \approx \Delta w(r)/[2h(r)],$$

то

$$\varepsilon_{23} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta w(r)}{2h(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta w(r)}{2\sqrt{r}\sqrt{2\rho - r}} = \frac{1}{\sqrt{8\rho}} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta w(r)}{\sqrt{r}}. \quad (4)$$

Відповідно до закону Гука для ізотропного тіла  $\sigma_{23} = G\varepsilon_{23}$ , тому, враховуючи залежності (3) та (4), для напружень  $\sigma_{23}$  в матриці у вершині тонкого включення матимемо вираз

$$\sigma_{23} = \frac{G}{\sqrt{8\rho}} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta w(r)}{\sqrt{r}}. \quad (5)$$

Границі у виразах (3) та (5) означені [2] через узагальнені КІН  $K_{31}$  та  $K_{32}$  так:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \Sigma t(r) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} K_{32}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta w(r)}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi G}} K_{31}, \quad (6)$$

а тому із (3) та (5) отримаємо:

$$\sigma_{13} = K_{32}/\sqrt{\pi\rho}, \quad \sigma_{23} = K_{31}/\sqrt{\pi\rho}. \quad (7)$$

Вирази (7) повністю узгоджуються із відповідними залежностями, отриманими [3] для включень із тонкими заокругленими вершинами.

Відповідно до формул (6) поле напружень біля вершини дефекту має кореневу особливість, однак внаслідок використання лагранжевих базових функцій у розробленій числовій схемі цю особливість не враховано. Проте, наприклад, для дослідження тріщин методом граничних елементів (МГЕ) [4] часто також не використовують спеціальних базових функцій, що моделюють особливість поля напружень у вершині дефекту, а КІН визначають методами екстраполяції чи  $J$ -інтеграла.

Щоб визначити узагальнені КІН біля вершини включення також не використовуватимемо спеціальних базових функцій, а застосовуватимемо підходи на основі  $J$ -інтеграла [5] чи апроксимації поля напружень асимптотичним розв'язком [6]. Метод лінійчатого моделювання тонкої неоднорідності дає можливість запропонувати ще один спосіб обчислення узагальнених КІН на підставі екстраполяції вузлових значень розриву переміщень та напружень на кінцевому граничному елементі. Тоді, відповідно до виразу (6), крайові функції біля вершини дефекту можна подати у вигляді

$$\Delta w = \frac{\sqrt{8r}}{\sqrt{\pi G}} K_{31}, \quad \Sigma t = -\sqrt{\frac{2}{\pi r}} K_{32}. \quad (8)$$

Щоб обчислити узагальнені КІН, використаємо значення функцій  $\Delta w$  та  $\Sigma t$  у вузлах 3–3' та 2–2' (рис. 2). Апроксимуючи функціями (8) вузлові значення розривів переміщень  $\Delta w$  та напружень  $\Sigma t$ , обчислені на основі розробленого числового підходу, за допомогою методу найменших квадратів отримаємо прості розрахункові формули

$$K_{31} = \frac{\sqrt{\pi G} (3\Delta w^{2-2'} + \sqrt{15}\Delta w^{3-3'})}{16\sqrt{2J}}, \quad K_{32} = -\frac{\sqrt{2\pi J} (5\Sigma t^{2-2'} + \sqrt{15}\Sigma t^{3-3'})}{16}. \quad (9)$$

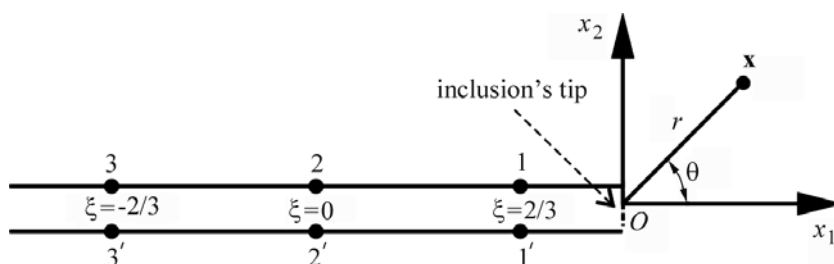


Рис. 2. Система вузлів на кінцевому граничному елементі.

Fig. 2. System of nodes at the end of the boundary element.

**Числовий аналіз задач. Прямолінійне включення.** Щоб проілюструвати ефективність застосування розробленого підходу, розглянемо задачу про тонке прямолінійне пружне включення скінченної довжини у безмежній матриці за її всебічного зсуву сталими напруженнями  $\tau$ . Відносну жорсткість включення характеризуватимемо параметром  $k = G^i / G^m$ , де  $G^m$  – модуль зсуву матеріалу матриці (схема задачі зображена на врізці до рис. 3b). Вважають, що товщина включення дорівнює 0,001 його довжини ( $h = 0,001a$ ), а торцьові напруження – нульові. Узагальнені КІН визначають методом (9). Дані, отримані розробленим підходом, зіставлено із результатами прямого розрахунку тонкого прямокутного включення відповідних розмірів за допомогою регуляризаційного МГЕ [7] із визначенням узагальнених КІН з використанням апроксимаційного підходу [6].

Результати числового аналізу задачі (нормовані значення узагальнених КІН  $K_{3i}^* = K_{3i} / (\tau\sqrt{\pi a})$  на правому торці включення та переміщення  $w_*^0 = w^0 G / (\tau a)$ )

лівого торця) за допомогою зазначених підходів зображено на рис. 3а, б. Суцільні лінії – запропонований метод на основі лінійчатої моделі тонкого включення, а штрихові – прямий розрахунок тонкого прямокутного включення за допомогою регуляризаційного МГЕ [7].

Для випадків, близьких до крайніх значень відносної жорсткості  $k$  включення (нуль, безмежність), відхилення узагальнених КІН, обчислені запропонованим підходом, що використовує лінійчату модель включення, від аналітичних розв'язків для тріщини [8] є менші за 2,3%, а для абсолютно жорсткого включення [2] – за 0,5%. Узагальнені КІН, отримані регуляризаційним МГЕ [7] для дуже податного та дуже жорсткого включення, відрізняються від аналітичних розв'язків [2, 8] для тріщини та жорсткого включення менше ніж на 0,5%. Похибка у 2,3% запропонованого методу, хоча і незначна, пояснюється використанням лагранжевих базових функцій для моделювання кінця лінійчатого включення.

Розбіжність у значеннях узагальнених КІН, отриманих регуляризаційним МГЕ і запропонованим підходом, для податних ( $k < 1$ ) включень незначна, а для жорстких включень ( $k > 1$ ) – практично непомітна. Отримані двома методами значення переміщень лівого торця включення фактично збігаються. Під час обчислення переміщень вважалося, що центр включення при  $k = 1$  не переміщується.

Перевагою використання запропонованого підходу на основі лінійчатої моделі включення є значне зменшення кількості граничних елементів (61 проти 311 за повного моделювання геометрії включення), використаних під час розв'язування задачі. Крім того, запропонованим методом можна досліджувати задачі для тіл із включеннями нульової (наприклад, тріщина) чи близької до нуля товщини без будь-яких застережень, тоді як прямий метод має обмежене застосування до дуже тонких включень навіть за процедур регуляризації.

**Включення уздовж дуги кола.** Дослідимо зсув безмежної матриці з тонким вигнутим уздовж дуги півкола стрічковим включенням прямим підходом та за допомогою розробленого методу (схема задачі зображена на врізці до рис. 3d). Пружні сталі та умови такі ж, як і в попередній задачі. Нормовані значення узагальнених КІН на правому торці  $A$  включення та переміщення лівого торця  $B$ , отримані за допомогою рівнянь запропонованого (суцільні криві) та прямого підходів [7] із використанням для визначення узагальнених КІН методу [6] (штрихові криві), зображено на рис. 3с, d. Під час визначення переміщень вважалося, що для точки  $O$  однорідної (без включення) матриці вони дорівнюють нулю.

Отримані обома методами результати для узагальнених КІН та переміщень торця включення практично збігаються і відмінності на графіках майже непомітні. Найбільше відхилення, отримане для дуже податних включень узагальнених КІН від відповідних величин для тріщини [8], менше за 3,4%. Для дуже жорсткого включення ця похибка значно менша і не перевищує 0,5%. Похибка визначення переміщень торця практично нульова. Внаслідок асиметрії відносно осі абсцис ці переміщення для абсолютно жорсткого стрічкового включення не дорівнюють нулю, а мають для кожної точки включення сталі значення. Тобто несиметричне жорстке включення зміщується відносно кожної точки матриці як єдине ціле.

Під час обчислень запропонованим підходом використано 193 граничні елементи, а для прямого регуляризаційного МГЕ [7] – 511. Зважаючи на те, що для формування системи рівнянь необхідно порядку  $O(N^2)$  операцій, а для її розв'язування –  $O(N^3)$  операцій, то перевага запропонованого підходу дослідження антиплоскої деформації тіл із використанням лінійчатої моделі тонкого стрічкового включення очевидна.

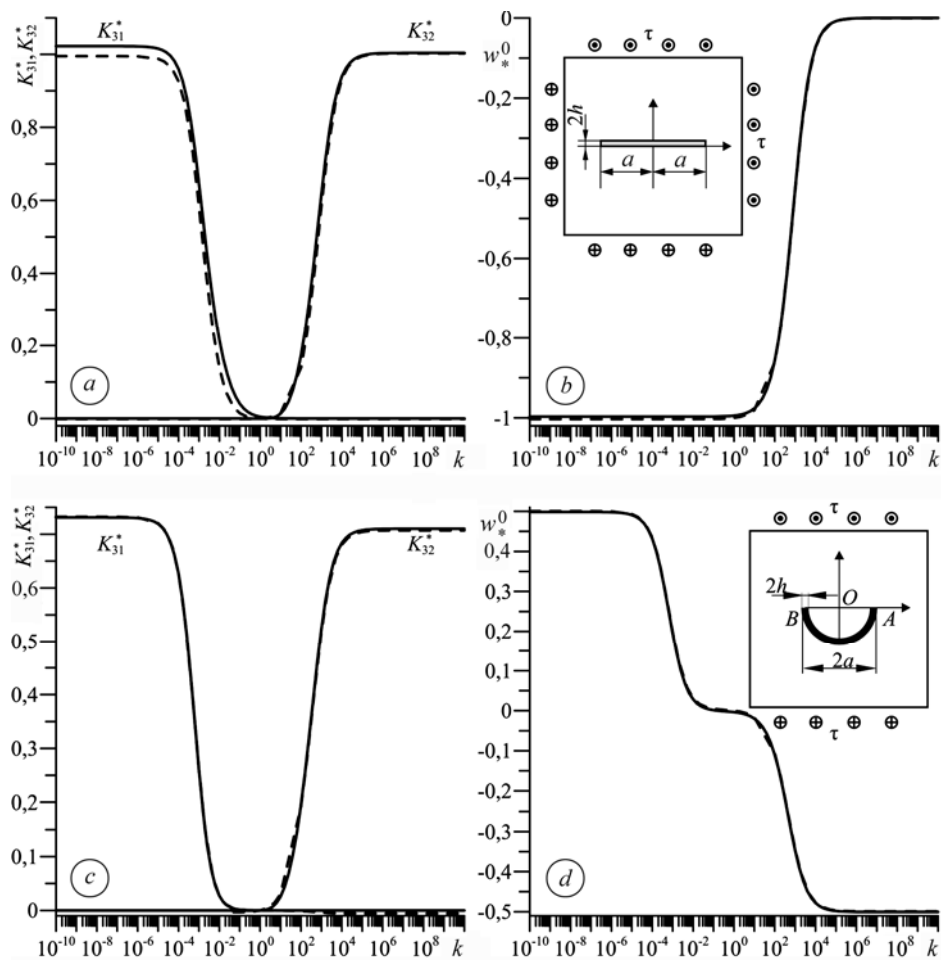


Рис. 3. Нормовані узагальнені КІН  $K_{3i}^* = K_{3i} / (\tau\sqrt{\pi a})$  (a, c) та переміщення  $w_*^0 = w^0 G(\tau a)$  (b, d) лівого торця прямолінійного включення (a, b) і тонкого включення вздовж дуги кола (c, d).

Fig. 3. Normalized generalized SIF  $K_{3i}^* = K_{3i} / (\tau\sqrt{\pi a})$  (a, c) and displacement  $w_*^0 = w^0 G(\tau a)$  (b, d) of the left tip of a rectilinear inclusion (a, b) and of a thin circular arc inclusion (c, d).

### ВИСНОВКИ

Побудований на основі принципу спряження континуумів різної вимірності числовий підхід моделювання тонких пружних включень засвідчив свою коректність з огляду на добру узгодженість отриманих із його допомогою даних із результатами застосування прямого регуляризаційного методу граничних елементів. Перевага розробленого підходу – істотне зменшення кількості використаних елементів розбиття, що значно скорочує час та зменшує обсяг машинної пам'яті, які необхідні для розрахунків, а отже, дає можливість досліджувати задачі більшої складності. Отримані на основі моделі тонкого пружного включення зв'язки між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень дають можливість оцінити граничне навантаження композиції з тонкими включеннями довільної конфігурації на основі розрахованих значень узагальнених КІН та міцнісних характеристик матеріалу матриці.

*РЕЗЮМЕ.* Исходя из чисто физических соображений, получено связь напряжений в вершине дефекта с коэффициентами при корневой особенности поля напряжений – обобщенными коэффициентами интенсивности напряжений (КИН). Построены аппроксимационные формулы определения обобщенных КИН. Путем сравнения результатов расчетов конкретных задач предложенным и прямым подходами доказана эффективность первого.

*SUMMARY.* Basing on the solely physical considerations the relationship between stresses at the defect tip with the factors near the square root singularity of the stress field – the generalized stress intensity factors – is obtained. The approximation formulas are adopted for determination of the generalized stress intensity factors. The comparison of results obtained for certain problems by the proposed and direct technique shows high efficiency of the proposed approach.

1. *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т.* Розв'язування методами інтегральних рівнянь задач антиплоского деформування тіл із тонкими стрічковими включеннями. I. Загальні співвідношення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 1. – С. 37–43.  
(*Pasternak Ya. M., Sulym H. T.* Solution of the problems of antiplane deformation of bodies with thin ribbonlike inclusions by the methods of integral equations. I. General relations // *Materials Science*. – 2011. – **47**, № 1. – P. 36-44.)
2. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. *Бережницький Л. Т., Качур П. С., Мазурак Л. П.* До теорії концентраторів напружень із заокругленими вершинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1989. – **25**, № 5. – С. 28–41.  
(*Berezhnitskii L. T., Kachur P. S., Mazurak L. P.* The theory of stress concentrations with round vertices // *Materials Science*. – 1989 – **25**, № 5. – P. 465–476.)
4. *Portela A., Aliabadi M. H., Rooke D. P.* The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 1992. – **33**. – P. 1269–1287.
5. *Сулим Г. Т., Пастернак Я. М.* Використання *J*-інтеграла для дослідження поздовжнього зсуву анізотропних тіл із тонкостінними стрічковими включеннями // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Прир. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 88–92.
6. *Сулим Г. Т., Пастернак Я. М.* Вплив розмірів анізотропних тіл зі стрічковими пружними включеннями на параметри граничного стану за антиплоскої деформації // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 263–269.
7. *Сулим Г. Т., Пастернак Я. М.* Застосування методу граничних елементів до аналізу антиплоскої деформації анізотропних тіл із тонкостінними структурами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 136–144.  
(*Sulym H. T., Pasternak Ia. M.* Application of the boundary element method for analysis of the antiplane shear of anisotropic bodies containing thin-walled structures // *J. of Mathematical Sciences*. – 2010. – **167**, № 2. – P. 162–172.)
8. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах / Под ред. Ю. Мураками.* – М.: Мир, 1990. – 1016 с.

Одержано 06.04.2010