УДК 539.3

ЕЛІПСОЇДАЛЬНЕ ПРУЖНЕ ВКЛЮЧЕННЯ У ТІЛІ ЗА ДІЇ СТАЛОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ НА ЙОГО ПОВЕРХНІ

М. М. СТАДНИК

Національний лісотехнічний університет України, Львів

Отримано аналітичний розв'язок системи трьох сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь термопружної задачі для простору з тонким еліпсоїдальним пружним включенням. Прийнято, що на поверхнях включення діє сталий тепловий потік. Виписані формули для визначення концентрації напружень біля включення та напружень у ньому. Розглянуто часткові випадки задачі для еліптичної тріщини та пластинчастого абсолютно жорсткого еліптичного включення, одержано відповідні формули для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Ключові слова: *система сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, тепловий потік, з'єднання включення–матриця, концентрація напружень.*

Дослідження міцності тіла з пружним включенням за температурного навантаження ґрунтуються на розв'язках відповідних термопружних задач, за якими знайдено найбільші значення напружень чи коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) в неоднорідному тілі. Задачу для кругової тріщини, на поверхнях якої діє сталий протилежний за напрямом тепловий потік, розв'язано раніше [1]. Розглянуто [2, 3] задачі для пластинчастого еліптичного абсолютно жорсткого включення, на поверхнях якого діє сталий однаково направлений або в його площині тепловий потік. Нижче розв'язано задачу для тонкого еліпсоїдального пружного включення, на поверхнях якого діє сталий протилежно направлений тепловий потік.

Формулювання задачі та її розв'язок. Нехай у тривимірному тілі міститься пружне еліпсоїдальне включення, у центрі якого вибрано початок прямокутної системи координат $Oxyz$. На поверхнях з'єднання матриця–включення $z=\pm h = =\pm c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}$ діє сталий протилежно направлений тепловий потік $q(1+c/b)=\mathrm{const}$, який спричиняє стрибок нормальних зміщень до серединної області S ($x^2/a^2+y^2/b^2\le 1$; $c<<a,b$; $a\ge b$). Оскільки тіло нагрівається через поверхню з'єднання матриця–включення, то вважаємо, що температура в однорідному тілі (відсутність поверхні) $T_0=0$. Задача полягає у визначенні концентрації напружень біля включення та напружень у ньому. На основі результату [4] зведемо її до розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi G}\left(D_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_S\left[\tilde{\sigma}_{zx}\right]_*\ln\left(x-\xi+R\right)d\xi d\eta+D_2\frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_S\frac{\left[\tilde{\sigma}_{zy}\right]_*}{R}d\xi d\eta+$$
$$+D_3\Delta\iint\limits_S\frac{\left[\tilde{u}_z\right]_*}{R}d\xi d\eta+\frac{1}{G_1 h}\int\limits_{-a}^{x}\left[\tilde{\sigma}_{zx}\right]_*dx=D_4\iint\limits_S\left[\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\right]_*\frac{d\xi d\eta}{R}+A_1\left(y\right);$$

Контактна особа: М. М. СТАДНИК, e-mail: matematyka@ i.ua

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi G}\left(D_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\iint_S[\tilde{\sigma}_{zy}]_*\ln(y-\eta+R)\,d\xi d\eta+D_2\frac{\partial}{\partial x}\iint_S\frac{[\tilde{\sigma}_{zx}]_*}{R}d\xi d\eta+\\
&+D_3\Delta\iint_S\frac{[\tilde{u}_z]_*}{R}d\xi d\eta+\frac{1}{G_1h}\int_{-b}^{y}[\tilde{\sigma}_{zy}]_*dy=D_4\iint_S\left[\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\right]_*\frac{d\xi d\eta}{R}+A_2(x);\\
&D_6\Delta\iint_S\frac{[\tilde{u}_z]_*}{R}d\xi d\eta+D_7\iint_S\left([\tilde{\sigma}_{zx}]_*\frac{\partial R^{-1}}{\partial x}+[\tilde{\sigma}_{zy}]_*\frac{\partial R^{-1}}{\partial y}\right)d\xi d\eta-\\
&-\frac{2d_4}{d_6}\frac{[\tilde{u}_z]_*}{h}=-D_9\iint_S\left[\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\right]_*\frac{d\xi d\eta}{R},\quad (x,\,y)\in S
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

відносно невідомих збурених стрибків зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ та напружень $[\tilde{\sigma}_{zx}]_*$ і $[\tilde{\sigma}_{zy}]_*$ тріщини, на берегах $z=\pm 0$ якої діють напруження, знесені з поверхонь включення $z=\pm h$.

Тут

$$
D_1=\frac{\mu_1 G d_3-\kappa G_1}{2G_1 d_1 d_4};\qquad D_2=\frac{2G\mu_1 d_3+G_1 d_4-G_1\kappa d_5}{8\pi G G_1 d_1 d_4};\qquad D_3=\frac{G_1 d_3+\mu_1 G}{2\pi G_1 d_1 d_4};
$$

$$
D_4=\frac{\alpha d_2(G_1-\mu_1 G)}{2\pi d_1 d_4 G_1}-\frac{\alpha_1 d_5}{\pi d_4};\qquad D_6=\frac{G d_6-\mu_1 G_1 d_3}{2\pi G_1 d_1 d_6};\qquad D_7=\frac{G d_3 d_6+\mu_1\kappa G_1}{4\pi G G_1 d_1 d_6};
$$

$$
D_9=\frac{\alpha d_2(G d_6+\mu_1 G_1)}{2\pi d_1 d_6 G_1}-\frac{\alpha_1 d_5}{\pi d_6};\qquad \left[\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\right]_*=\frac{2q}{\lambda_0}\left(1+\frac{c}{b}\right);\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2};
$$

$R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$; $d_1 = 1 - \mu$; $d_2 = 1 + \mu$; $d_3 = 1 - 2\mu$; $d_4 = 1 - \mu_1$; $d_5 = 1 + \mu_1$; $d_6 = 1 - 2\mu_1$; $\kappa = 3 + 4\mu$; G, G_1 – модулі зсуву і μ, μ_1 – коефіцієнти Пуассона відповідно для матриці та включення; α, α_1 – коефіцієнти теплового розширення матриці та включення; λ_0 – коефіцієнт теплопровідності матриці; $A_1(y)$, $A_2(x)$ – довільні функції, які потрібно визначити.

Аналіз структури систем рівнянь (1) свідчить, що їх розв'язок можна подати у вигляді

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{u}_z]_*=C_1\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\;\Psi(x,y);\\
&[\tilde{\sigma}_{zx}]_*=C_2\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}\Psi(x,y)-a^2\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\;\Psi'_x(x,y)\right);\\
&[\tilde{\sigma}_{zy}]_*=C_3\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}\Psi(x,y)-b^2\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\;\Psi'_y(x,y)\right);\\
&\Psi(x,y)=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-(bx\sin\theta-ay\cos\theta)^2/(a^2b^2)}{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta,\quad (x,y)\in S,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

де C_1, C_2, C_3 – невідомі сталі; $k^2=(a^2-b^2)/a^2$.

Підставивши розв'язок (2) у рівняння (1), одержимо:

$$
C_1=\frac{a^2}{bC_4}\left(E(k)(2\pi D_7 Q_1-D_1 Q_2/G)+Q_2\lambda/G_1\right);
$$

$$C_2 = \frac{1}{C_4}\left(-2\pi E(k)(D_3 Q_2 - D_6 Q_1)/b + 2d_4 Q_1/(cd_6)\right); \quad C_3 = a^2 C_2/b^2, \qquad (3)$$

де

$$Q_1 = \frac{2bq(1+\lambda)}{\pi d_4 \lambda\lambda_0}\left(\frac{\alpha d_2(G_1 - \mu_1 G)}{2d_1 G_1} - \alpha_1 d_5\right);$$

$$Q_2 = -\frac{2bq(1+\lambda)}{\pi d_6 \lambda\lambda_0}\left(\frac{\alpha d_2(G d_6 + \mu_1 G_1)}{2d_1 G_1} - \alpha_1 d_5\right);$$

$$C_4 = \frac{2a^2}{G_1 b^2 d_6}\left[\frac{d_4 E(k)}{G}(D_1 G_1 \lambda - G E(k)) - \lambda(\pi D_6 d_6 E(k) + \lambda d_4)\right];$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}\; d\alpha, \quad \lambda = \frac{b}{c}, \quad A_1(y) = A_2(x) = 0.$$

Зокрема, для еліпсоїдальної порожнини ($G_1 \to 0$) на основі виразу (3) матимемо $C_1 = \dfrac{b^2 \alpha d_2 q(1+\lambda)}{\lambda\lambda_0 \pi E(k)}$, $C_2 = C_3 = 0$; для абсолютно жорсткого еліпсоїдального включення ($G_1 \to \infty$) $C_1 = 0$, $C_2 = -\dfrac{2\alpha d_2 b^2 G q(1+\lambda)}{\pi a^2 \kappa \lambda\lambda_0 E(k)}$, $C_3 = \dfrac{a^2 C_2}{b^2}$, а для однорідного тіла $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, оскільки відсутня поверхня нагрівання.

КІН $K_{\mathrm{I}}(\lambda)$ визначаємо [4] згідно з виразом

$$K_{\mathrm{I}}(\lambda) = -\lim_{n \to -0} \sqrt{-2\pi n}\left[\frac{G}{2d_1} \cdot \frac{\partial [\tilde{u}_z]_*}{\partial n} + \frac{d_3}{4d_1}[\tilde{\sigma}_{zn}]_*\right], \qquad (4)$$

де $K_{\mathrm{I}}(\lambda)$ – КІН для еліптичної тріщини, на поверхнях якої $z = \pm 0$ діють напруження, знесені із поверхонь пружного включення $z = \pm h$, тобто $K_{\mathrm{I}} = \lim\limits_{\lambda \to \infty} K_{\mathrm{I}}(\lambda)$. Тут $O_1 ntz$ – рухома прямокутна система координат з початком на контурі області S; $O_1 n$ – зовнішня нормаль до контуру S.

Користуючись співвідношеннями (2), (4), матимемо формулу

$$K_{\mathrm{I}}(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi f(\varphi)}}{4d_1\sqrt{ab}}(2GC_1 - C_2 d_3 a^2)\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\cos^2(\theta - \varphi)}{1 - k^2 \sin^2\theta}}\, d\theta \qquad (5)$$

для обчислення коефіцієнта $K_{\mathrm{I}}(\lambda)$ вздовж еліптичного контуру. Тут $f(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}$; φ – кут, що визначає параметричні координати точок еліпса.

Для еліптичної тріщини ($G_1 = 0, \lambda \to \infty$) із виразу (5) одержуємо співвідношення

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{G\alpha_0 d_2 b q \sqrt{b f(\varphi)}}{2d_1 \lambda_0 E(k)\sqrt{\pi a}} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\cos^2(\theta - \varphi)}{1 - k^2 \sin^2\theta}}\, d\theta \qquad (6)$$

для обчислення КІН K_{I}, звідки, якщо $a = b$, маємо подання

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{4G d_2 q \alpha a \sqrt{a}}{d_1 \lambda_0 \pi \sqrt{\pi}} \qquad (7)$$

для кругової тріщини. Зауважимо, що задача для кругової тріщини розв’язана також у праці [1].

Для обчислення K_{I} у випадку пластинчастого абсолютно жорсткого еліптичного включення ($G_1 \to \infty, \lambda \to \infty$) із співвідношення (5) матимемо вираз

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{\alpha d_2 d_3 G b q \sqrt{b f(\varphi)}}{2 d_1 \kappa \lambda_0 E(k) \sqrt{\pi a}} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\cos^2(\theta - \varphi)}{1 - k^2 \sin^2 \theta}}\, d\theta\,. \tag{8}$$

Якщо у формулі (8) взяти $a = b$, то одержимо формулу

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{4 G q \alpha\, d_2 d_3 a \sqrt{a}}{d_1 \kappa \lambda_0 \pi \sqrt{\pi}} \tag{9}$$

для визначення параметра K_{I} у тілі з дископодібним абсолютно жорстким включенням.

Поклавши $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi/2$ у поданні (5), знаходимо [4] концентрацію напружень $\tilde{\sigma}_{zz}$ у тілі в точках $M_1(\pm a; 0; 0)$ і $M_2(0; \pm b; 0)$ біля пружного еліпсоїдального включення:

$$\tilde{\sigma}_{zz}\big|_{M_1} = \frac{2}{k\, d_1 c}\left(2 G C_1 + a^2 \mu C_2\right) \arcsin k\,;$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}\big|_{M_2} = \frac{1}{k\, d_1 c}\left(2 G C_1 + a^2 \mu C_2\right) \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right). \tag{10}$$

Як часткові випадки зі співвідношень (10) одержуємо вирази для обчислення концентрації напружень біля еліпсоїдальної порожнини ($G_1 \to 0$)

$$\tilde{\sigma}_{zz}\big|_{M_1} = \frac{4 b \alpha d_2 G q (1+\lambda) \arcsin k}{\pi k\, d_1 \lambda_0 E(k)}\;;\quad \tilde{\sigma}_{zz}\big|_{M_2} = \frac{2 b \alpha d_2 G q (1+\lambda)}{\pi k\, d_1 \lambda_0 E(k)} \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) \tag{11}$$

та еліпсоїдального абсолютно жорсткого включення ($G_1 \to \infty$)

$$\tilde{\sigma}_{zz}\big|_{M_1} = -\frac{4 b \alpha d_2 G \mu q (1+\lambda) \arcsin k}{\pi k\, d_1 \kappa \lambda_0 E(k)}\;;$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}\big|_{M_2} = -\frac{2 b \alpha d_2 G \mu q (1+\lambda)}{\pi k\, d_1 \kappa \lambda_0 E(k)} \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right). \tag{12}$$

Напруження в еліпсоїдальному пружному включенні знаходимо на основі відомих результатів [4] з урахуванням виразів (2):

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{1}{2 b d_1}\left[E(k)\left(\frac{a^2 d_3}{2} C_2 - G C_1\right) + \frac{\alpha d_2 G b^2 q (1+\lambda)}{\pi \lambda \lambda_0}\right] \Psi(x, y)\,;$$

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \frac{C_2 a^2 \lambda}{2b} \Psi(x, y)\,; \qquad \tilde{\sigma}_{yy} = \frac{C_3 b \lambda}{2} \Psi(x, y)\,, \quad (x,\, y) \in S\,. \tag{13}$$

Якщо у поданнях (13) покласти $G_1 \to \infty$, то одержимо співвідношення

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{\alpha d_2 b G q (1+\lambda)}{\pi \lambda \lambda_0 \kappa} \Psi(x, y)\,;$$

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \tilde{\sigma}_{yy} = -\frac{\alpha d_2 b G q (1+\lambda)}{\pi \lambda_0 \kappa E(k)} \Psi(x, y)\,, \quad (x,\, y) \in S \tag{14}$$

для обчислення напружень в абсолютно жорсткому еліпсоїдальному включенні.

Якщо для обчислення КІН K_{I} у точках M_1 і M_2 для пластинчастого абсолютно жорсткого ($G_1 \to \infty, \lambda \to \infty$) включення скористатися формулою [4, 5]

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\rho \to 0} \sqrt{\rho}\, \tilde{\sigma}_{zz}\,, \quad \rho = \frac{b f(\varphi)}{a \lambda^2}\,, \tag{15}$$

то, підставивши у неї подання (12), дістанемо вирази

$$K_{\mathrm{I}}\Big|_{M_1} = -\frac{2q\alpha d_2 b^2 \mu G \arcsin k}{k d_1 \kappa \lambda_0 E(k)\sqrt{\pi a}} \;;\; K_{\mathrm{I}}\Big|_{M_2} = -\frac{q\alpha d_2 \mu G b\sqrt{b}}{k d_1 \kappa \lambda_0 E(k)\sqrt{\pi}} \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right), \quad (16)$$

які відрізняються від відповідних значень подання (8). Це пояснюють тим, що у виразах (16) враховано вплив контактних напружень $\tilde{\sigma}_{xx}$ і $\tilde{\sigma}_{yy}$ на концентрацію напружень $\tilde{\sigma}_{zz}$ (12). Зауважимо, що коли подання (11) підставити у формулу (15), то отримаємо вирази (6), тобто для тріщини КІН будуть однакові, незалежно від того, якими формулами (5) чи (15) користуватися для їх визначення.

Примітка. У праці [6] допущено деякі описки. Зокрема, у формулах (1)–(3) замість T потрібно поставити $\tilde{T}$, а у формулах (2), (3) замість q має бути $q_1 = q(1-\lambda_b/\lambda_0)$. Ці описки призвели і до деяких інших неточностей у праці [6], які повністю виправлені у дослідженні [7]. Автор приносить вибачення.

ВИСНОВКИ

Одержано формули для обчислення концентрації напружень у матриці, напружень у включенні та коефіцієнта інтенсивності напружень у тілі з еліптичною тріщиною. На цій основі, використовуючи методи класичної теорії міцності чи механіки крихкого руйнування, можна визначати міцність тіла з пружним включенням, або граничне значення теплового потоку, що діє на поверхнях тріщини.

РЕЗЮМЕ. Получено аналитическое решение системы трех сингулярных интегро-дифференциальных уравнений термоупругой задачи с тонким эллипсоидальным упругим включением. Принято, что на поверхностях включения действует постоянный противоположный по направлению тепловой поток. Выписаны формулы для определения концентрации напряжений возле включения и напряжений в нем. Рассмотрены частные случаи задачи для эллиптической трещины и пластинчатого абсолютно жесткого эллиптического включения, получены соответствующие формулы для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений.

SUMMARY. The analytical solution of a system of three singular integro-differential equations for thermoelastic problem with a thin elliptic elastic inclusion has been obtained. It is accepted, that the constant opposite heat flow acts on the inclusion surface. As a result, the formulae for determination of stress concentration near the inclusion and stress as in it have been written. The partial cases of the problem for an elliptic crack and plane absolutly rigid elliptic inclusion have been considered, the corresponding formulae for computing the stress intensity factors have been obtained.

1. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
2. *Пассос Моргадо А. Х., Пивник Я., Подильчук Ю. Н.* Распределение напряжений в бесконечном трансверсально-изотропном теле с жестким эллиптическим включением в равномерном тепловом потоке // Прикл. механика. – 1995. – № 11. – С. 3–10.
3. *Подильчук Ю. Н., Добривечер В. В.* О термонапряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с жестким эллиптическим включением, подверженном действию равномерного теплового потока в плоскости включения // Там же. –1996. – № 8. – С. 31–40.
4. *Стадник М. М.* Метод розв'язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – **30**, № 6. – С. 30–40.
   (*Stadnyk M. M.* A Method for the solution of three-dimensional thermoelasticity problems for bodies with thin inclusions // Materials Science. – 1994. – **30**, № 6. – P. 643–653.)
5. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
6. *Стадник М. М.* Пружне еліпсоїдальне теплопровідне включення у тілі за дії теплового потоку на безмежності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – № 3. – С. 16–23.
7. *Стадник М. М.* Тонке теплопровідне включення у пружному просторі за дії на безмежності теплового потоку // Наук. вісник НЛТУ України. – 2012. – Вип. 22.4. – С. 332–339.

Одержано 16.11.2011