УДК 539.3

ПРУЖНИЙ ПОКРИВ З НЕОДНОРІДНИМ ПРОМІЖНИМ ШАРОМ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНИХ І ДОТИЧНИХ ЗУСИЛЬ

Р. КУЛЬЧИЦЬКИЙ-ЖИГАЙЛО, А. БАЙКОВСЬКИЙ

Білостоцький технологічний університет, Польща

Розглянуто тривимірну задачу теорії пружності про навантаження неоднорідного півпростору нормальними і дотичними зусиллями, розподіленими в круговій області його поверхні. Півпростір складається з однорідних основи та шару, і проміжного неоднорідного шару, коефіцієнт Пуассона якого сталий, а залежність модуля Юнґа від відстані до поверхні основи описує лінійна функція. Досліджено вплив товщини проміжного шару на розподіл розтягальних напружень у покриві.

Ключові слова: *пружний півпростір, покрив, неоднорідний проміжний шар, нормальне і дотичне навантаження.*

Руйнування покривів, які використовують для поліпшення трибологічних властивостей пар тертя, часто пов'язують з появою у них розтягальних напружень [1–9]. Аналіз напруженого стану, який виникає за контактної взаємодії тіл, показав, що в однорідних покривах, де модуль Юнґа є більший від модуля Юнґа основи, розтягальні напруження виникають не тільки в околі ненавантаженої поверхні тіл, а й на межі поділу між покривом і основою [6–11]. Можна їх зменшити, якщо між однорідними покривом і основою помістити однорідний проміжний шар з відповідно вибраними механічними властивостями [6].

Нижче знайдено аналітичний розв'язок тривимірної задачі теорії пружності про навантаження нормальними і дотичними зусиллями поверхні пружного півпростору з пружним покривом, що містить проміжний неоднорідний шар, коефіцієнт Пуассона якого сталий, а залежність модуля Юнґа від відстані до поверхні основи описує лінійна функція. Проаналізовано розподіл першого головного напруження залежно від товщини проміжного шару.

Формулювання задачі. Розглянемо пружний неоднорідний півпростір, до поверхні якого в деякій області Ω прикладені нормальні $p(x, y)$ і дотичні $t(x, y)$ зусилля (рис. 1), де x, y, z – безрозмірні прямокутні координати, віднесені до характерного лінійного розміру a області Ω.

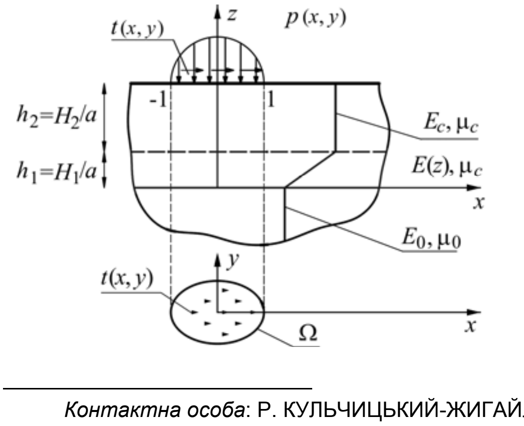

Рис. 1. Схема задачі теорії пружності для півпростору, покритого неоднорідним покривом.

Fig. 1. Scheme of the problem of elasticity theory for a functionally graded coated half-space.

Контактна особа: Р. КУЛЬЧИЦЬКИЙ-ЖИГАЙЛО, e-mail: r.kulczycki@pb.edu.pl

Неоднорідний півпростір складається з однорідного ізотропного півпростору з модулем Юнґа E_0 і коефіцієнтом Пуассона μ_0, однорідного покриву товщиною H_2 з модулем Юнґа E_c ($E_c > E_0$) та коефіцієнтом Пуассона μ_c і неоднорідного проміжного шару (рис. 1) товщини H_1, коефіцієнт Пуассона якого сталий і рівний μ_c. Залежність модуля Юнґа від координати z описує лінійна функція

$$E(z) = E_0 + (E_c - E_0) h_1^{-1} z, \quad z \in [0, h_1],$$

де параметр $h_1 = H_1/a$.

Розглядувану задачу теорії пружності зводять до розв'язування диференційних рівнянь

$$\Delta u_x^{(i)} + d_i \left(\frac{\partial \theta_1^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial x \partial z} \right) + \frac{\delta_{i1}}{c+z} \left(\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial x} \right) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \tag{1}$$

$$\Delta u_y^{(i)} + d_i \left(\frac{\partial \theta_1^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial y \partial z} \right) + \frac{\delta_{i1}}{c+z} \left(\frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial y} \right) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \tag{2}$$

$$\Delta u_z^{(i)} + d_i \left(\frac{\partial \theta_1^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial z^2} \right) + \frac{\delta_{i1}(d_i + 1)}{c+z} \left(\iota_i \theta_1^{(i)} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} \right) = 0, \quad i = 0, 1, 2 \tag{3}$$

за крайових умов на поверхні неоднорідного півпростору

$$\sigma_{xz}^{(2)}(x, y, h) = t(x, y) H(x, y), \quad \sigma_{yz}^{(2)}(x, y, h) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(2)}(x, y, h) = -p(x, y) H(x, y), \tag{4}$$

умов ідеального механічного контакту між складовими частинами неоднорідного півпростору

$$\mathbf{u}^{(i)}(x, y, h_i) = \mathbf{u}^{(i+1)}(x, y, h_i), \quad i = 0, 1, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}(x, y, h_i) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(i+1)}(x, y, h_i) \cdot \mathbf{n}, \quad i = 0, 1 \tag{6}$$

та умов на нескінченності

$$\mathbf{u}^{(i)}(x, y, z) \to 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \to \infty, \quad i = 0, 1, 2, \tag{7}$$

де

$$\theta_1^{(i)} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial y}, \quad i = 0, 1, 2;$$

$\mathbf{u}^{(i)}$ – безрозмірний, віднесений до параметра a, вектор пружного переміщення; $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ – тензор напруження; індекс $i = 0$ описує параметри і функції стану в однорідному півпросторі; $i = 1$ – у неоднорідному проміжному шарі, а $i = 2$ – у однорідному покриві; $d_0 = 1/(1 - 2\mu_0)$; $d_1 = d_2 = 1/(1 - 2\mu_c)$; δ_{ij} – символ Кронекера; $\iota_0 = \mu_0/(1 - \mu_0)$; $\iota_1 = \iota_2 = \mu_c/(1 - \mu_c)$; $h_0 = 0$; $h = (H_1 + H_2)/a$; $c = E_0 h_1/(E_c - E_0)$; $H(x, y) = 1$, якщо $(x, y) \in \Omega$, $H(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$; $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$.

Схема розв'язування задачі. Крайову задачу (1)–(7) розв'язуємо за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є

$$\tilde{f}(\xi, \eta, z) = FF(f(x, y, z), x \to \xi, y \to \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \exp(-ix\xi - iy\eta)\, dx dy.$$

Якщо коефіцієнт $\mu_c = 1/3$, загальний розв'язок рівнянь (1)–(3), який задовольняє умови на нескінченності (7), описують формули [12]:

$$s^2\tilde{u}_x^{(i)} = -i\xi\tilde{\theta}_1^{(i)} - i\eta\tilde{\chi}^{(i)},\ \ i = 0, 1, 2, \tag{8}$$

$$s^2\tilde{u}_y^{(i)} = -i\eta\tilde{\theta}_1^{(i)} + i\xi\tilde{\chi}^{(i)},\ \ i = 0, 1, 2, \tag{9}$$

$$2\tilde{u}_z^{(0)}(\xi,\eta,z) = \left(d_0 z a_{-1}(\xi,\eta) + 2a_0(\xi,\eta)\right)\exp(sz), \tag{10}$$

$$\tilde{u}_z^{(i)}(\xi,\eta,z) = \sum_{j=1}^{4} a_{4i-4+j}(\xi,\eta)\psi_j^{(i)}(s,z),\ \ i = 1, 2, \tag{11}$$

де

$$\tilde{\chi}^{(0)}(\xi,\eta,z) = b_0(\xi,\eta)\exp(sz), \tag{12}$$

$$2\tilde{\theta}_1^{(0)}(\xi,\eta,z) = -\left((2+d_0)a_{-1}(\xi,\eta) + d_0 sz a_{-1}(\xi,\eta) + 2a_0(\xi,\eta)s\right)\exp(sz), \tag{13}$$

$$\tilde{\chi}^{(i)}(\xi,\eta,z) = b_{2i-1}(\xi,\eta)\chi_1^{(i)}(s,z) + b_{2i}(\xi,\eta)\chi_2^{(i)}(s,z),\ i = 1, 2, \tag{14}$$

$$\tilde{\theta}_1^{(i)}(\xi,\eta,z) = \sum_{j=1}^{4} a_{4i-4+j}(\xi,\eta)s\varphi_j^{(i)}(s,z),\ \ i = 1, 2, \tag{15}$$

$$\chi_1^{(1)}(s,z) = I_0(s\zeta_1),\quad \chi_2^{(1)}(s,z) = K_0(s\zeta_1),$$

$$\varphi_1^{(1)}(s,z) = s\zeta_1 K_0(s\zeta_1),\quad \psi_1^{(1)}(s,z) = K_0(s\zeta_1) + s\zeta_1 K_1(s\zeta_1),$$

$$\varphi_2^{(1)}(s,z) = K_0(s\zeta_1) - \iota_1 s\zeta_1 K_1(s\zeta_1),\quad \psi_2^{(1)}(s,z) = -\iota_1 s\zeta_1 K_0(s\zeta_1),$$

$$\varphi_3^{(1)}(s,z) = s\zeta_1 I_0(s\zeta_1),\quad \psi_3^{(1)}(s,z) = I_0(s\zeta_1) - s\zeta_1 I_1(s\zeta_1),$$

$$\varphi_4^{(1)}(s,z) = I_0(s\zeta_1) + \iota_1 s\zeta_1 I_1(s\zeta_1),\quad \psi_4^{(1)}(s,z) = -\iota_1 s\zeta_1 I_0(s\zeta_1),$$

$$\chi_1^{(2)}(s,z) = \sinh\left(s(h-z)\right),\quad \chi_2^{(2)}(s,z) = \cosh\left(s(h-z)\right),$$

$$2s\varphi_1^{(2)}(s,z) = (2+d_2)\sinh\left(s(h-z)\right) + d_2 s(h-z)\cosh\left(s(h-z)\right),$$

$$2s\varphi_2^{(2)}(s,z) = (2+d_2)\cosh\left(s(h-z)\right) + d_2 s(h-z)\sinh\left(s(h-z)\right),$$

$$\varphi_3^{(2)}(s,z) = \cosh\left(s(h-z)\right),\quad \varphi_4^{(2)}(s,z) = \sinh\left(s(h-z)\right),$$

$$2\psi_1^{(2)}(s,z) = d_2(h-z)\sinh\left(s(h-z)\right),\quad 2\psi_2^{(2)}(s,z) = d_2(h-z)\cosh\left(s(h-z)\right),$$

$$\psi_3^{(2)}(s,z) = \sinh\left(s(h-z)\right),\quad \psi_4^{(2)}(s,z) = \cosh\left(s(h-z)\right),$$

$a_j(\xi, \eta)$, $j = -1, ..., 8$; $b_j(\xi, \eta)$, $j = 0, ..., 4$ – невідомі функції параметрів інтегрального перетворення; $s^2 = \xi^2 + \eta^2$; $\zeta_1 = c + z$; $I_0(s\zeta_1)$, $I_1(s\zeta_1)$, $K_0(s\zeta_1)$, $K_1(s\zeta_1)$ – модифіковані функції Бесселя. Задовольнивши крайові умови (4)–(6), функції $a_j(\xi, \eta)$, $j = -1, \dots, 8$ і $b_j(\xi, \eta)$, $j = 0, ..., 4$ запишемо у вигляді

$$a_j(\xi,\eta) = \frac{\tilde{p}(\xi,\eta)}{G_c}a^{(j,1)}(s) - \frac{i\xi\tilde{t}(\xi,\eta)}{G_c s}a^{(j,2)}(s),\quad b_j(\xi,\eta) = -\frac{i\eta\tilde{t}(\xi,\eta)}{G_c s}b^{(j)}(s), \tag{16}$$

де G_c – модуль зсуву на поверхні неоднорідного півпростору, функції $a^{(j,\,m)}(s)$, $j = -1, \ldots, 8$, $m = 1, 2$ і $b^{(j)}(s)$, $j = 0, ..., 4$ – розв'язки систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{9} A_{ij} a^{(j-1,m)} = \delta_{i8}\delta_{m1} + \delta_{i9}\delta_{m2},\ i = 0,...,9,\ m = 1, 2,\ \sum_{j=0}^{4} B_{ij} b^{(j)} = \delta_{i4},\ i = 0,...,4. \quad (17)$$

Ненульові коефіцієнти систем рівні:

$$A_{00} = 2 + d_0,\ A_{20} = A_{11} = -1,\ A_{30} = 1 + d_0,\ A_{01} = -A_{21} = A_{31} = 2s,$$

$$A_{0j} = 2s\varphi_j^{(1)}(s,0), A_{1j} = \psi_j^{(1)}(s,0), (1-\iota_1)A_{2j} = 2\iota_1 s\varphi_j^{(1)}(s,0) + 2\psi_{j,z}^{(1)}(s,0),\ j = 2,...,5,$$

$$A_{4j} = 2s\varphi_j^{(1)}(s,h_1),\ A_{5j} = 2\psi_j^{(1)}(s,h_1),$$

$$(1-\iota_1)A_{6j} = 2\iota_1 s\varphi_j^{(1)}(s,h_1) + 2\psi_{j,z}^{(1)}(s,h_1),\ j = 2,...,5,$$

$$A_{3j} = \varphi_{j,z}^{(1)}(s,0) - s\psi_j^{(1)}(s,0),\ A_{7j} = \varphi_{j,z}^{(1)}(s,h_1) - s\psi_j^{(1)}(s,h_1),\ j = 2,...,5,$$

$$A_{46} = -(2+d_2)\sinh(sh_2) - d_2 sh_2\cosh(sh_2),\ A_{68} = -A_{48} = 2s\cosh(sh_2),$$

$$A_{47} = -(2+d_2)\cosh(sh_2) - d_2 sh_2\sinh(sh_2),\ A_{69} = -A_{49} = 2s\sinh(sh_2),$$

$$A_{56} = -d_2 h_2\sinh(sh_2),\ A_{57} = -d_2 h_2\cosh(sh_2),\ A_{78} = -sA_{58} = 2s\sin(sh_2),$$

$$A_{66} = \sinh(sh_2) + d_2 sh_2\cosh(sh_2),\ A_{67} = \cosh(sh_2) + d_2 sh_2\sinh(sh_2),$$

$$A_{76} = (1+d_2)\cosh(sh_2) + d_2 sh_2\sinh(sh_2),\ A_{79} = -sA_{59} = 2s\cosh(sh_2),$$

$$A_{77} = (1+d_2)\sinh(sh_2) + d_2 sh_2\cosh(sh_2),\ A_{87} = 1,\ A_{96} = 1 + d_2,\ A_{88} = A_{99} = 2s,$$

$$B_{0j} = \chi_j^{(1)}(s,0),\ B_{1j} = s^{-1}\chi_{j,z}^{(1)}(s,0),\ B_{2j} = \chi_j^{(1)}(s,h_1),\ B_{3j} = s^{-1}\chi_{j,z}^{(1)}(s,h_1),\ j = 1, 2,$$

$$B_{00} = B_{10} = -1,\ B_{34} = -B_{23} = \sinh(sh_2),\ B_{33} = -B_{24} = \cosh(sh_2),\ B_{43} = 1,$$

$$\varphi_{j,z}^{(1)} = \partial\varphi_j^{(1)}\big/\partial z,\ \psi_{j,z}^{(1)} = \partial\psi_j^{(1)}\big/\partial z,\ \chi_{j,z}^{(1)} = \partial\chi_j^{(1)}\big/\partial z,\ h_2 = h - h_1.$$

Розв'язавши системи рівнянь (17) і використавши формули (8)–(16), знаходимо залежності між трансформантами Фур'є компонент вектора пружного переміщення і трансформантами Фур'є функцій $p(x, y)$ і $t(x, y)$. Знаючи переміщення, можемо обчислити напруження.

Числова реалізація. Нехай областю навантаження є круг радіуса a, дотичне навантаження пов'язане з нормальним навантаженням законом Амонтона–Кулона: $t = fp$ (f – коефіцієнт тертя), а нормальне навантаження розподілене за еліптичним законом: $(p/p_0)^2 = 1 - r^2$, $r^2 = x^2 + y^2$. Трансформанти Фур'є функцій $p(x, y)$ і $t(x, y)$ рівні:

$$\tilde{p}(\xi,\eta)\big/p_0 = \tilde{t}(\xi,\eta)\big/(fp_0) = \overline{p}(s) = \sqrt{\pi/2}\,J_{3/2}(s)\big/s^{3/2}, \quad (18)$$

де $J_{3/2}(s)$ – функція Бесселя. Врахувавши формули (18) і обчисливши інтеграли, що описують напруження, отримаємо співвідношення для визначення ненульових у площині $y = 0$ компонент тензора напружень, які виникають у покриві:

$$\frac{G_c}{G_i}\frac{\sigma_{rr}^{(i,p)}}{p_0} = \int_0^\infty \overline{p}(s) S_{xy1}^{(i,1)}(s,z) J_0(sr) s\,ds - \frac{1}{r}\int_0^\infty \overline{p}(s) S_{xy2}^{(i,1)}(s,z) J_1(sr)\,ds,\ i = 1, 2,$$

$$\frac{G_c}{G_i}\frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(i,p)}}{p_0}=\int_0^\infty \overline{p}(s)\left(S_{xy1}^{(i,1)}-S_{xy2}^{(i,1)}\right)J_0(sr)sds+\frac{1}{r}\int_0^\infty \overline{p}(s)S_{xy2}^{(i,1)}J_1(sr)ds,\ i=1,\,2,$$

$$\frac{G_c}{G_i}\frac{\sigma_{zz}^{(i,p)}}{p_0}=-\int_0^\infty \overline{p}(s)S_{z1}^{(i,1)}(s,z)J_0(sr)sds,\ \ i=1,\,2,$$

$$\frac{G_c}{G_i}\frac{\sigma_{rz}^{(i,p)}}{p_0}=\int_0^\infty \overline{p}(s)S_{z2}^{(i,1)}(s,z)J_1(sr)sds,\ \ i=1,\,2,$$

$$\frac{G_c}{G_i}\frac{\sigma_{xx}^{(i,t)}}{fp_0}=\frac{x}{r}\int_0^\infty \overline{p}(s)\left[S_{xy1}^{(i,2)}J_1(sr)-\left(S_{xy2}^{(i,2)}-2S_{xy3}^{(i)}\right)K(x,y,s)\right]sds,\ \ i=1,\,2,$$

$$\frac{G_c}{G_i}\frac{\sigma_{yy}^{(i,t)}}{fp_0}=\frac{x}{r}\int_0^\infty \overline{p}(s)\left[\left(S_{xy1}^{(i,2)}-S_{xy2}^{(i,2)}\right)J_1(sr)+\left(S_{xy2}^{(i,2)}-2S_{xy3}^{(i)}\right)K(x,y,s)\right]sds,\ i=1,\,2,$$

$$\frac{G_c}{G_i}\frac{\sigma_{zz}^{(i,t)}}{fp_0}=-\frac{x}{r}\int_0^\infty \overline{p}(s)S_{z1}^{(i,2)}(sz)J_1(sr)sds,\ \ i=1,\,2,$$

$$\frac{G_c}{G_i}\frac{\sigma_{xz}^{(i,t)}}{fp_0}=\int_0^\infty \overline{p}(s)\left[S_{z2}^{(i,2)}(s,z)K^{+}(x,y,s)+S_{z3}^{(i)}(s,z)K^{-}(x,y,s)\right]sds,\ i=1,\,2,$$

де $J_0(sr)$, $J_1(sr)$, $J_2(sr)$ – функції Бесселя; $G_1(z)$ – модуль зсуву в неоднорідному проміжному шарі; G_2 – модуль зсуву в однорідному покриві; φ – кутова координата циліндричної системи координат,

$$K(x,y,s)=\frac{y^2}{r^2}J_1(sr)-\frac{3y^2-x^2}{r^2}\frac{J_2(sr)}{sr},\ K^{\pm}(x,y,s)=J_0(sr)\pm\left(1-2\frac{x^2}{r^2}\right)J_2(sr),$$

$$S_{xy1}^{(i,m)}(s,z)=\frac{2}{1-\iota_i}\sum_{j=1}^{4}a^{(4i-4+j,m)}(s)\left(s\varphi_j^{(i)}(s,z)+\iota_i\psi_{j,z}^{(i)}(s,z)\right),\ \ i=1,\,2,\ \ m=1,\,2,$$

$$S_{xy2}^{(i,m)}(s,z)=2\sum_{j=1}^{4}a^{(4i-4+j,m)}(s)s\varphi_j^{(i)}(s,z),\ \ i=1,\,2,\quad m=1,\,2,$$

$$S_{z1}^{(i,m)}(s,z)=-\frac{2}{1-\iota_i}\sum_{j=1}^{4}a^{(4i-4+j,m)}(s)\left(\iota_i s\varphi_j^{(i)}(s,z)+\psi_{j,z}^{(i)}(s,z)\right),\ i=1,\,2,\ \ m=1,\,2,$$

$$S_{z2}^{(i,m)}(s,z)=\sum_{j=1}^{4}a^{(4i-4+j,m)}(s)\left(s\psi_j^{(i)}(s,z)-\varphi_{j,z}^{(i)}(s,z)\right),\ \ i=1,\,2,\ \ m=1,\,2,$$

$$S_{xy3}^{(i)}(s,z)=b^{(2i-1)}(s)\chi_1^{(i)}(s,z)+b^{(2i)}(s)\chi_2^{(i)}(s,z),\ i=1,\,2,$$

$$S_{z3}^{(i)}(s,z)=-s^{-1}\left(b^{(2i-1)}(s)\chi_{1,z}^{(i)}(s,z)+b^{(2i)}(s)\chi_{2,z}^{(i)}(s,z)\right),\ \ i=1,\,2.$$

Отримані інтеграли у внутрішніх точках неоднорідного півпростору обчислюємо за допомогою квадратури Ґаусса. В площині $z = h$ враховуємо асимптотичну поведінку підінтегральних функцій, коли $s \to \infty$. Інтеграли, в яких ці функції замінено їх асимптотиками, знаходимо аналітично. Вони дають розподіл напруження, характерний для однорідного півпростору. Для визначення решти інтегралів застосовуємо квадратуру Ґаусса.

Аналіз результатів. Оцінюючи вихідні співвідношення, робимо висновок, що розподіл напружень залежить від шести безрозмірних параметрів: відношення між модулями Юнґа на поверхні неоднорідного півпростору і основи E_c/E_0, коефіцієнтів Пуассона покриву μ_c та основи μ_0, товщини покриву h, товщини неоднорідного проміжного шару h_1 і коефіцієнта тертя f. Описаний вище аналітичний розв'язок отримано для параметра $\mu_c = 1/3$. Якщо $\mu_c \neq 1/3$, наближений розв'язок задачі можна знайти, замінивши неоднорідний проміжний шар пакетом однорідних шарів [12–14]. Нижче вважатимемо, що $\mu_0 = \mu_c = 1/3$; $E_c/E_0 = 4$ або 8; $f = 0$ або 0,25; $h = 0{,}4$ або 0,8. Сконцентруємось на аналізі розподілу першого головного напруження в областях площини $y = 0$ покриву, в яких напруження $\sigma_1 > 0$.

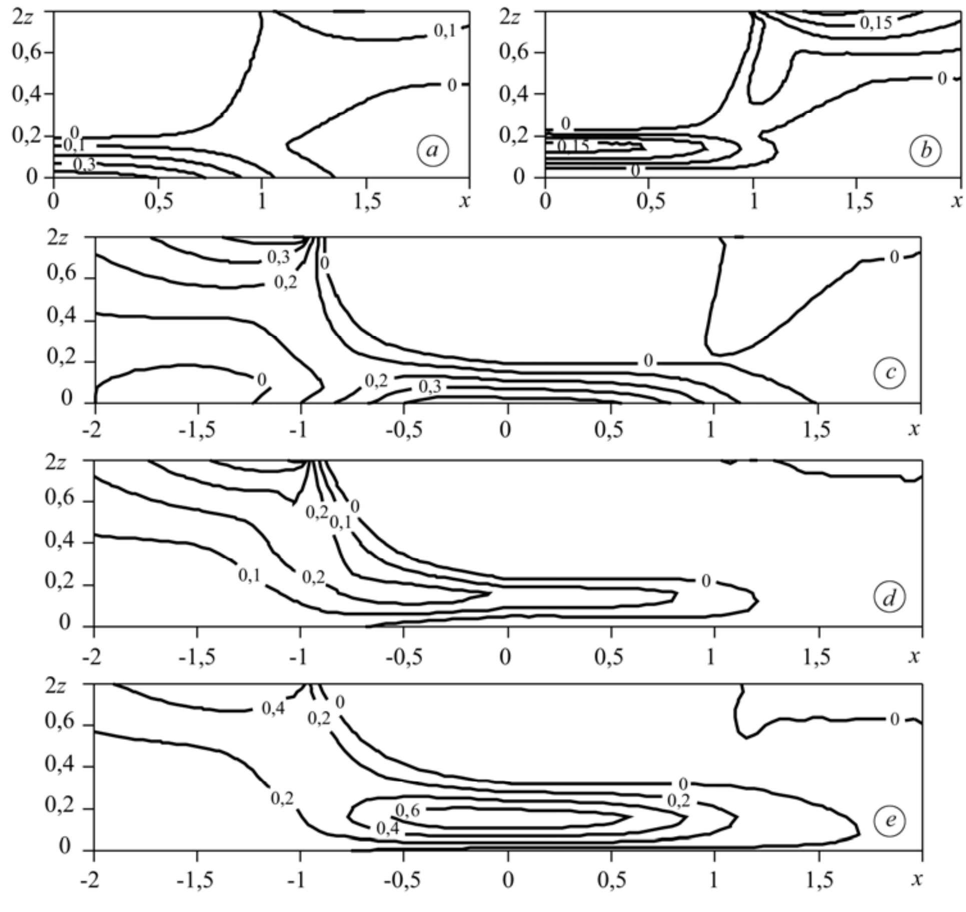

Рис. 2. Лінії рівня безрозмірного першого головного напруження σ_1/p_0 в площині $y = 0$ покриву в задачах для однорідного покриву ($h = 0{,}4$; $E_c/E_0 = 4$; $f = 0$ (a); $f = 0{,}25$ (c)) та для покриву з неоднорідним проміжним шаром ($h = 0{,}4$; $h_1/h = 0{,}2$; $f = 0$, $E_c/E_0 = 4$ (b); $f = 0{,}25$, $E_c/E_0 = 4$ (d); $f = 0{,}25$, $E_c/E_0 = 8$ (e)).

Fig. 2. Level lines of dimensionless first principal stress σ_1/p_0 in plane $y = 0$ of coating in the problems for homogeneous coating ($h = 0.4$; $E_c/E_0 = 4$; $f = 0$ (a); $f = 0.25$ (c)) and for coating with the inhomogeneous interlayer ($h = 0.4$; $h_1/h = 0.2$; $f = 0$, $E_c/E_0 = 4$ (b); $f = 0.25$, $E_c/E_0 = 4$ (d); $f = 0.25$, $E_c/E_0 = 8$ (e)).

Як і в задачі для однорідного півпростору з однорідним покривом (рис. 2a, c), в задачі, де покрив містить неоднорідний проміжний шар (рис. 2b, d, e), розтягальні напруження можуть виникнути в точках ненавантаженої поверхні неоднорідного півпростору та біля межі поділу між покривом і основою. Розтягальні напруження поблизу межі поділу є суттєво нижчі, якщо покрив містить проміжний шар. Обчислення показали, що тертя практично не впливає на найбільше значення напруження σ_1 в цій області. Якщо локальний максимум напруження σ_1 біля межі поділу існує (рис. 2*b*, *e*), а проміжний шар є достатньо тонкий ($h_1/h < 0{,}2$), то цей максимум виникає на поверхні $z = h_1$. Зі збільшенням параметра h_1 він переміщується в проміжний шар. Якщо тертя відсутнє, то вказаний максимум виникає на осі z. Відповідне напруження σ_1 суттєво залежить від параметра h_1/h (рис. 3*a*). Якщо $h_1/h = 0{,}1$, то розтягальні напруження зменшуються на 15...30%.

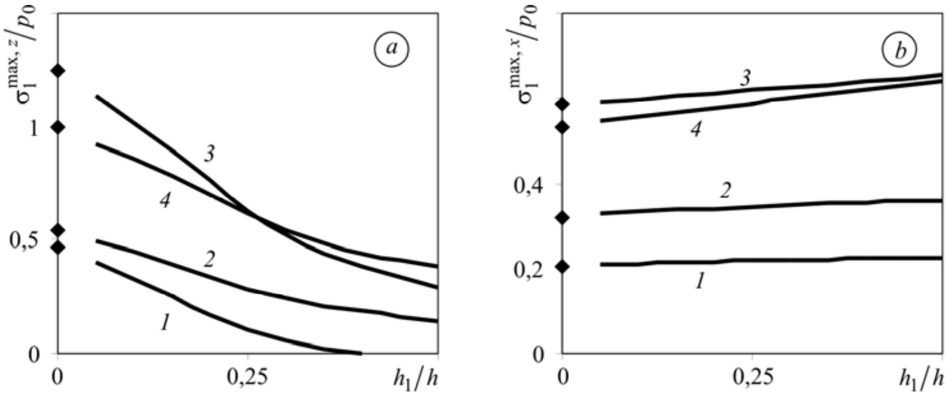

Рис. 3. Залежність найбільшого розтягального напруження на осі z (*a*) і на поверхні неоднорідного півпростору (*b*) від параметра h_1/h: $f = 0$; *1* – $h = 0{,}4$, $E_c/E_0 = 4$; *2* – $h = 0{,}8$, $E_c/E_0 = 4$; *3* – $h = 0{,}4$, $E_c/E_0 = 8$; *4* – $h = 0{,}8$, $E_c/E_0 = 8$ (*a*); $E_c/E_0 = 4$; *1* – $f = 0$, $h = 0{,}4$; *2* – $f = 0$, $h = 0{,}8$; *3* – $f = 0{,}25$, $h = 0{,}4$; *4* – $f = 0{,}25$, $h = 0{,}8$ (*b*); ромби – розв’язок задачі для однорідного покриву.

Fig. 3. Dependence of the maximum value of tensile stresses on the axis z (*a*) and on the surface of the inhomogeneous half-space (*b*) on parameter h_1/h: $f = 0$; *1* – $h = 0.4$, $E_c/E_0 = 4$; *2* – $h = 0.8$, $E_c/E_0 = 4$; *3* – $h = 0.4$, $E_c/E_0 = 8$; *4* – $h = 0.8$, $E_c/E_0 = 8$ (*a*); $E_c/E_0 = 4$; *1* – $f = 0$, $h = 0.4$; *2* – $f = 0$, $h = 0.8$; *3* – $f = 0.25$, $h = 0.4$; *4* – $f = 0.25$, $h = 0.8$ (*b*); rhombs – solution of the problem for homogeneous coating.

Другий локальний максимум розтягальних напружень у покриві виникає на ненавантаженій поверхні неоднорідного півпростору на деякій відстані від краю ділянки навантаження (див. рис. 2). Подібно як в задачі для однорідного півпростору [15], тертя суттєво збільшує їх рівень і звужує область їх виникнення до ділянки $x < 0$ і $r \geq 1$. Зі зростанням коефіцієнта тертя максимум напруження σ_1 переміщується в напрямку краю ділянки контакту і для деякого його значення виникає в точці $(-1, 0, h)$. Проміжний неоднорідний шар лише незначно підвищує розтягальні напруження в цій області (рис. 3*b*). Якщо відношення $h_1/h = 0{,}2$, то максимальне напруження σ_1 збільшується на 5...10%.

ВИСНОВКИ

На основі аналітичного розв’язку задачі про навантаження нормальними і дотичними зусиллями пружного півпростору з покривом, що містить неоднорідний проміжний шар, підтверджено суттєве зниження розтягальних напружень у покриві біля межі поділу між ним і основою порівняно з відповідними напруженнями в однорідному покриві. Одночасно незначно зростають розтягальні напруження, що виникають на ненавантаженій поверхні неоднорідного півпростору.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена трехмерная задача теории упругости о нагружении неоднородного полупространства нормальными и касательными усилиями, распределенными в круговой области его поверхности. Полупространство состоит из однородных основания и слоя, а также промежуточного неоднородного слоя, коэффициент Пуассона которого постоянный, а зависимость модуля Юнга от расстояния до поверхности основания опи-

сывает линейная функция. Исследовано влияние толщины промежуточного слоя на распределение растягивающих напряжений в покрытии.

SUMMARY. The analytical solution of the three-dimensional elasticity problem on inhomogeneous half-space under normal and tangential loading applied in circular area of its surface was obtained. Half-space is composed of the homogeneous base, homogeneous coating and inhomogeneous interlayer which Poisson's ratio is constant and its Youn's modulus is described by the linear function of the distance to the base surface. The influence of the interlayer thickness on the tensile stresses in coating was studied.

Робота виконана за проектом, що фінансується Національним Центром Науки Польщі, згідно з рішенням № DEC-2011/03/N/ST8/04212.

1. *Diao D. F., Kato K., and Hayashi K.* The maximum tensile stress on a hard coating under sliding friction // Tribology Int. – 1994. – **27**, № 4. – P. 267–272.
2. *Houmid-Bennani H. and Takadoum J.* Finite element model of elastic stresses in thin coatings submitted to applied forces // Surf. Coat. Technol. – 1999. – **111**, № 1. – P. 80–85.
3. *Schwarzer N., Richter F., and Hecht G.* The elastic field in a coated half-space under Hertzian pressure distribution // Surf. Coat. Technol. – 1999. – **114**, № 2. – P. 292–304.
4. *Contact* damage in TiN coatings steel / S. Bhowmick, A. N. Kale, V. Jayaram, et al. // Thin Solid Films. – 2003. – **436**, № 2. – P. 250–258.
5. *Xie C. and Tong W.* Cracking and decohesion of a thin Al_2O_3 film on a ductile Al–5% Mg substrate // Acta Mater. – 2005. – **53**, № 2. – P. 477–485.
6. *Schwarzer N.* Coating desing due to analytical modelling of mechanical contact problems on multilayer systems // Surf. Coat. Technol. – 2000. – **133**–**134**. – P. 397–402.
7. *Abdul-Baqi A. and Van der Giessen E.* Numerical analysis of indentation-induced cracking of brittle coatings on ductile substrates // Int. J. Solids Struct. – 2002. – **39**. – P. 1427–1442.
8. *Bragallini G. M., Cavatorta M. P., and Sainsot P.* Coated contact: a strain approach // Tribology Int. – 2003. – **36**, № 12. – P. 935–941.
9. *Chai H.* Fracture mechanics analysis of thin coatings under plane-strain indentation // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**. – P. 591–610.
10. *Кульчицкий-Жигайло Р., Роговский Г.* Растягивающие напряжения в твердом покрытии в двумерной контактной задаче с учетом трения // Трение и износ. – 2006. – **27**, № 1. – С. 33–42.
11. *Kulchytsky-Zhyhailo R. and Rogowski G.* Stresses in hard coating due to a rigid spherical indenter on a layered elastic half-space // Tribology Int. – 2010. – **43**, № 9. – P. 1592–1601.
12. *Kulchytsky-Zhyhailo R. and Bajkowski A.* Analytical and numerical methods of solution of three-dimensional problem of elasticity for functionally graded coated half-space // Int. J. Mech. Sci. – 2012. – **54**, № 1. – P. 105–112.
13. *Кульчицький-Жигайло Р., Роговський Г.* Осесиметрична контактна задача про втискування абсолютно жорсткої кулі в пружний півпростір з неоднорідним покривом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 6. – С. 82–92.

    (*Kul'chyts'kyi-Zhyhailo R. and Rogowski G.* Axially symmetric contact problem of pressing of an absolutely rigid ball into an elastic half space with inhomogeneous coating // Materials Science. – 2009. – **45**, № 6. – P. 845–858.)
14. *Кульчицький-Жигайло Р., Байковський А.* Пружний півпростір з неоднорідним покривом під дією дотичних зусиль // Там же. – 2010. – **46**, № 6. – С. 25–34.

    (*Kul'chyts'kyi-Zhyhailo R. and Bajkowski A.* Elastic half space with inhomogeneous coating under the action of tangential forces // Materials Science. – 2011. – **46**, № 6. – P. 735–746.)
15. *Hamilton G. M. and Goodman L. E.* The stress field created by a circular sliding contact // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1966. – **33**. – P. 371–376.

Одержано 18.02.2013