

УДК 539.3

**ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ПРУЖНОГО ПРОСТОРУ
З ГЛАДКИМИ ТА ГОСТРОКУТНИМИ ВИРІЗАМИ**В. С. КРАВЕЦЬ¹, М. П. САВРУК^{1,2}¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;² Білостоцький технологічний університет, Польща

Розвинуто єдиний підхід до розв'язування задач про концентрацію напружень біля гострих та закруглених вершин в осесиметричних порожнинах за кручення пружного простору. Використано метод сингулярних інтегральних рівнянь щодо гладких розкнених контурів, кінці яких виходять на вісь кручення пружного тіла. Знайдено розподіли напружень на поверхнях порожнин, коефіцієнти концентрації та інтенсивності напружень у закруглених та гострих вершинах. Числові результати отримано для порожнин різних конфігурацій (ромбічних, гіперболічних, овальних, прямокутних) у широкому діапазоні зміни радіуса закруглення у вершинах межового контуру.

Ключові слова: осесиметрична порожнина, гострокутний виріз, кручення, коефіцієнт концентрації напружень, коефіцієнт інтенсивності напружень, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

У механіці руйнування основну увагу приділяють дослідженню процесів деформування та руйнування твердих тіл з тріщинами – як основними та найнебезпечнішими дефектами. Однак під час деформування пружних тіл (в межах лінійної теорії пружності) з концентраторами напружень з гострими та закругленими (з малим радіусом кривини) вершинами виникають нескінченні або дуже великі (більші за границю міцності матеріалу) напруження, що не дає змоги використати класичні критерії для оцінки міцності таких тіл. Тому останнім часом значну увагу зосереджено на вивченні процесів деформування твердих тіл з такими концентраторами. Для розв'язування плоских та антиплоских задач теорії пружності та механіки руйнування тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами розробили єдиний підхід [1]. Нижче цей підхід розвинуто для відповідних задач кручення нескінченних пружних областей з осесиметричними порожнинами, контури осьових перерізів яких містять гострі та закруглені вершини.

Розв'язки крайових задач для пружних областей з гладкими контурами знайдено методом сингулярних інтегральних рівнянь [2], який дав змогу досить точно розрахувати напружено-деформований стан на значно викривлених ділянках гладких межових контурів. Використовуючи раніше знайдені залежності між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень у вершинах гострого та закругленого кутових вирізів за антиплоскої деформації [3], отримали низку нових результатів для коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) у нескінченних пружних тілах з різного роду гострокутними осесиметричними порожнинами за умов кручення.

Інтегральне рівняння задачі. Розглянемо кручення пружного ізотропного простору з вільною від навантажень осесиметричною (відносно осі Oz циліндричної системи координат $Orz\phi$) порожниною з центром на початку системи координат. Для осесиметричної задачі кручення відмінні від нуля компоненти напружень $\tau_{\phi r}$, $\tau_{\phi z}$ та переміщення v у тангенціальному (відносно кута ϕ) напрямі не

залежать від кутової координати φ . Пружний простір закручується на сталий кут $\varphi_0 = d\varphi/dz = \text{const}$ на одиницю довжини вздовж осі кручення Oz . Напружено-деформований стан суцільного пружного простору визначають компоненти напружень $\tau_{\varphi r}^0 = 0, \tau_{\varphi z}^0 = Gr\varphi_0$ та переміщень $v_0 = rz\varphi_0$, де G – модуль зсуву.

Враховуючи відсутність напружень на поверхні порожнини та на осі кручення Oz [4], задачу звели до визначення збуреного напруженого стану двовимірного пружного тіла (у півплощині $r > 0$ системи координат rOz) із симетричним відносно осі Or розрізом $L = ACB$, кінці якого A і B виходять на вісь кручення, а на берегах розрізу задані самозрівноважені напруження [5]

$$\tau_{\varphi n}^{\pm}(s) = \tau(s), \quad (1)$$

де верхні індекси вказують на граничні значення напружень на контурі L за підходу до нього зліва (+) або справа (-), n – зовнішня нормаль до контуру L , $s = s(t)$ – дугова абсциса точки $t = r + iz \in L$, $\tau(s) = -r\tau_0(dr/ds)/a$, $\tau_0 = Ga\varphi_0$, a – радіальна координата вершини C контуру L . На нескінченності збурені напруження і поворот тіла відсутні.

Використовуючи інтегральні зображення загальних розв’язків осесиметричних задач теорії пружності за кручення пружних тіл з тріщинами по поверхнях обертання [6, 7], з крайової умови (1) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_L \Gamma(s) M(s, s') ds = \tau(s'), \quad s' = s'(t'), \quad t' = r' + iz' \in L \quad (2)$$

відносно невідомої функції $\Gamma(s) = \partial\{\gamma(s)/r\}/\partial s$, де $\gamma(s) = G[v^+(s) - v^-(s)]/2$ – стрибок переміщень на контурі L . Ядро $M(s, s')$ визначає залежність [5, 8]

$$M(s, s') = M(r, z, r', z') = \frac{\sqrt{r/r'}}{4k} \left\{ D_1 \frac{2r}{r'} \frac{dr'}{ds'} + D_2 \left\langle \frac{(z'-z)}{r'} \frac{dz'}{ds'} + \frac{(r+r')}{r'} \frac{dr'}{ds'} \right\rangle \right\},$$

де $D_1 = (8 - 3k^2)K(k) + \frac{(7k^2 - 8)E(k)}{1 - k^2}$; $D_2 = 8(k^2 - 2)K(k) + \frac{(k^4 - 16k^2 + 16)E(k)}{1 - k^2}$;

$K(k)$ і $E(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого родів; $k = 2\sqrt{rr'}/\Delta$,

$$\Delta = \sqrt{(z - z')^2 + (r + r')^2}.$$

Сингулярне інтегральне рівняння (2) має єдиний розв’язок у класі функцій з інтегрованою особливістю на кінцях контуру інтегрування за умови однозначності переміщень за обходу контуру L [2]:

$$\int_L \Gamma(s) ds = 0. \quad (3)$$

Шукана функція $\Gamma(s)$ визначає збурений напружено-деформований стан у всій пружній області [6]. Повні напруження $\tau_{\varphi s}^*(s')$ на краю порожнини визначають через граничні значення збурених напружень $\tau_{\varphi s}(s')$ на правому березі розрізу L та відповідних напружень у тілі без порожнини [5]

$$\tau_{\varphi s}^*(s') = \tau_{\varphi s}^-(s') + \tau_{\varphi s}^0(s') = \tau_{\varphi s}^0(s') - r'\Gamma(s') + \frac{1}{\pi} \int_L \Gamma(s) P_0(s, s') ds. \quad (4)$$

Тут $\tau_{\varphi s}^0(s') = r'\tau_0(dz'/ds')/a$ – відомі дотичні напруження у точці $t' \in L$ суцільного пружного тіла, $P_0(s, s') = \frac{-\Delta}{8r} \left\{ D_1 \frac{2r}{r'} \frac{dz'}{ds'} + D_2 \left\langle \frac{(z'-z)}{r'} \frac{dr'}{ds'} + \frac{(r+r')}{r'} \frac{dz'}{ds'} \right\rangle \right\}$.

Числове розв'язування задачі. Записавши параметричне рівняння контуру L у вигляді

$$t = r + iz = a\omega(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1; \quad (t' = r' + iz' = a\omega(\eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1), \quad (5)$$

подамо сингулярне інтегральне рівняння (2) та додаткову умову (3) у канонічній безрозмірній формі

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma_1(\xi) M_1(\xi, \eta) d\xi = \tau_1(\eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1; \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma_1(\xi) d\xi = 0, \quad (6)$$

де $M_1(\xi, \eta) = aM(s(\xi), s'(\eta))$, $\Gamma_1(\xi) = \Gamma(s(\xi))|\omega'(\xi)|/\tau_0$, $\tau_1(\eta) = \tau(s'(\eta))/\tau_0$, $s(\xi)$, $s'(\eta)$ – дугові абсциси точок $t, t' \in L$. Невідому дійсну функцію $\Gamma_1(\xi)$ шукатимемо у класі функцій, що мають інтегровну особливість на кінцях проміжку інтегрування $\Gamma_1(\xi) = u(\xi)/\sqrt{1-\xi^2}$.

Щоб поліпшити точність обчислень напружень (4) біля вершин вирізів з малим відносним радіусом закруглення ($\varepsilon = \rho/a \rightarrow 0$), використовують різні нелінійні перетворення, які згущують точки квадратурних вузлів біля цих вершин [1]. Для контурів з вершинами у центральній точці $C = a\omega(0)$ використали перетворення [5]

$$\xi = G(\tau) = c_1 \operatorname{sh}(c_2 \tau), \quad c_2 = \operatorname{arsh}(1/c_1), \quad c_1 = \operatorname{const}, \quad (7)$$

яке відображає інтервал $\tau \in [-1; 1]$ в інтервал $\xi \in [-1; 1]$ і згущує вузли квадратурних формул в околі точки $\xi = 0$. Сталу c_1 у заміні (7) вибирали на підставі числових експериментів ($c_1 \in [0, 1\varepsilon; 10\varepsilon]$) залежно від форми контуру L та радіуса закруглення у вершині C .

Для контурів із закругленою вершиною у нецентральної точці ($D = a\omega(\xi_0)$, $\xi_0 \neq 0$) використовували модифіковане перетворення для нерівновіддалених вершин отворів [9]

$$\xi = G(\tau) = \begin{cases} \tau + c_3 \frac{\tau_0}{\pi} \sin \frac{\pi\tau}{\tau_0}, & \xi_0 = G(\tau_0), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0; \\ \tau - c_3 \frac{1-\tau_0}{\pi} \sin \frac{\pi(\tau-\tau_0)}{1-\tau_0}, & \tau_0 \leq \tau \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Функція (8) гладка і неперервна в інтервалі $\tau \in [0; 1]$. Параметр c_3 ($0 \leq c_3 \leq 1$), що опосередковано визначає міру згущення вузлів в околі вершини D , вибирали на підставі числових експериментів ($c_3 \in [0, 9; 0, 999]$) залежно від радіуса закруглення у вершині.

Зробивши заміни $\xi = G(\tau)$, $-1 \leq \tau \leq 1$; $\eta = G(\zeta)$, $-1 \leq \zeta \leq 1$, із рівнянь (6) отримуємо:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M_1(\xi, \eta) \frac{u_1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \tau_1(\eta), \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = 0, \quad (9)$$

де $\tau_1(\eta) = \tau_1(G(\zeta))$ і введено нову невідому функцію $u_1(\tau)$

$$u_1(\tau)/\sqrt{1-\tau^2} = G'(\tau)u(\xi)/\sqrt{1-\xi^2} = \Gamma_1(\xi)G'(\tau). \quad (10)$$

Для числового розв'язування сингулярного інтегрального рівняння (9) використали квадратурний метод [2]. Задачу звели до розв'язку системи $N = 2n$ лінійних алгебричних рівнянь

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} u_1(\tau_k) M_1(\xi_k, \eta_m) = \tau_1(\eta_m), \quad m = \overline{1, 2n-1}; \quad \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} u_1(\tau_k) = 0 \quad (11)$$

відносно вузлових значень $u_1(\tau_k)$ неперервної на проміжку $[-1; 1]$ невідомої функції $u_1(\tau)$ (10). Тут $\xi_k = G(\tau_k)$, $\eta_m = G(\zeta_m)$, де $\tau_k = \cos(\pi(2k-1)/(4n))$, $k = \overline{1, 2n}$; $\zeta_m = \cos(\pi m/2n)$, $m = \overline{1, 2n-1}$ – нулі поліномів Чебишова першого та другого родів.

Враховавши симетричність контуру $L = ACB$ відносно осі Or та парність шуканих функцій (10) ($u_1(-\tau) = u_1(\tau)$, $\Gamma_1(-\xi) = \Gamma_1(\xi)$), зменшили у два рази порядок системи рівнянь (11)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_1(\tau_k) \{M_1(\xi_k, \eta_m) + M_1(\xi_{2n+1-k}, \eta_m)\} = \tau_1(\eta_m), \quad m = \overline{1, n-1}; \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_1(\tau_k) = 0. \quad (12)$$

На основі отриманих розв'язків $u_1(\tau_k)$, $k = \overline{1, n}$, повні дотичні напруження на поверхні порожнини (4) знаходимо зі співвідношень [5]

$$\begin{aligned} \tau_{qs}^*(\zeta_m) = & -\frac{\tau_0 u_1(\zeta_m)}{|G'(\zeta_m)| \sqrt{1-\zeta_m^2}} \frac{\operatorname{Re}[\omega(\eta_m)]}{|\omega'(\eta_m)|} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_1(\tau_k) \{P_1(\tau_k, \zeta_m) + P_1(\tau_{2n+1-k}, \zeta_m)\} + \\ & + \frac{\tau_0 \operatorname{Re}[\omega(\eta_m)] \operatorname{Im}[\omega'(\eta_m)]}{a|\omega'(\eta_m)|}, \quad m = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (13)$$

де $P_1(\tau, \zeta) = P_0(a\omega(G(\tau)), a\omega(G(\zeta)))$, $u_1(\zeta_m) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{(-1)^{m+k} \sqrt{1-\tau_k^2} / (\tau_k - \zeta_m)\} u_1(\tau_k)$.

Розрахували розподіли напружень та їхні максимальні значення на поверхнях осесиметричних порожнин для різних форм їхніх осьових перерізів. Використовуючи залежності між коефіцієнтами концентрації напружень у закруглених вершинах кутових вирізів та КІН у відповідних гострих вершинах за антиплоскої деформації [3]

$$K_{III}^V = \frac{1}{R_{III}} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{2\pi} \rho^{\lambda_{III}} \tau_{\max} \right\}, \quad (14)$$

отримали низку нових результатів для КІН у гострокінцевих вершинах контурів. Тут параметр $\lambda_{III} = 1 - \pi/(2\alpha)$ визначає порядок особливості поля напружень у вершині клина з кутом розхилу $2\alpha = 2\pi - 2\beta$, R_{III} – коефіцієнт впливу закруглення вершини кутового вирізу на максимальні напруження на його контурі за антиплоскої деформації, який визначаємо з апроксимувальної формули [3]

$$R_{III} = \frac{1 + 17,845\gamma + 20,266\gamma^2 - 19,123\gamma^3 + 9,502\gamma^4 - 1,916\gamma^5}{1 + 14,248\gamma}, \quad \gamma = \pi/2 - \beta.$$

V-подібний контур із закругленою вершиною. Розглянемо кручення пружного простору з осесиметричною порожниною, осьовий переріз якої складається з двох симетричних V-подібних контурів із закругленими вершинами (контур $L = ACB$ складається з двох прямолінійних відрізків, нахилених до осі Or під кутами $\pm\beta$, і дуги кола радіуса ρ у вершині $C(a, 0)$) (рис. 1а). Враховуючи симетрію відносно осі Or контуру L , його параметричне рівняння подамо у вигляді

$$t = r + iz = a\omega(\xi) = a \begin{cases} \omega_0(\xi), & 0 \leq \xi \leq 1, \\ \overline{\omega_0(-\xi)}, & -1 \leq \xi < 0, \end{cases} \quad (15)$$

де функція $\omega_0(\xi)$ описує частину контуру L (CB) у першій чверті системи коор-

динат rOz . Для закруглених V-подібних контурів функція $\omega_0(\xi)$ має вигляд

$$\omega_0(\xi) = 1 - \varepsilon + \begin{cases} \varepsilon \exp(i\xi l / \rho), & 0 \leq \xi \leq \xi_0, \\ \{(\xi_0 - \xi)l / a + i\varepsilon\} \exp(-i\beta), & \xi_0 < \xi \leq 1, \end{cases} \quad (16)$$

де $\xi_0 = 1/(1+l_0) = \rho(\pi/2 - \beta)/l$ – значення параметра ξ , що відповідає точці D переходу прямолінійної ділянки контуру в криволінійну; l_0 – відношення довжини прямолінійної ділянки BD контуру до довжини колової ділянки DC ; $l = \rho(\pi/2 - \beta)/\xi_0$ – повна дугова довжина половини контуру L (CDB); $\varepsilon = \rho/a$ – відносний радіус закруглення контуру у вершині $C(a, 0)$.

Знайдено розподіли напружень (13) на контурі (16) для різних кутів 2β його розхилу за однакових радіусів закруглення у вершині C ($\varepsilon = 0,01$) та побудовано залежності добутків $\tilde{\tau}_s(\theta)\varepsilon^{\lambda_{III}} \equiv \tau_{\varphi s}^*(\theta)\varepsilon^{\lambda_{III}} / \tau_0$ від параметра $\theta = \arg(t-a+\rho)$ (рис. 1а).

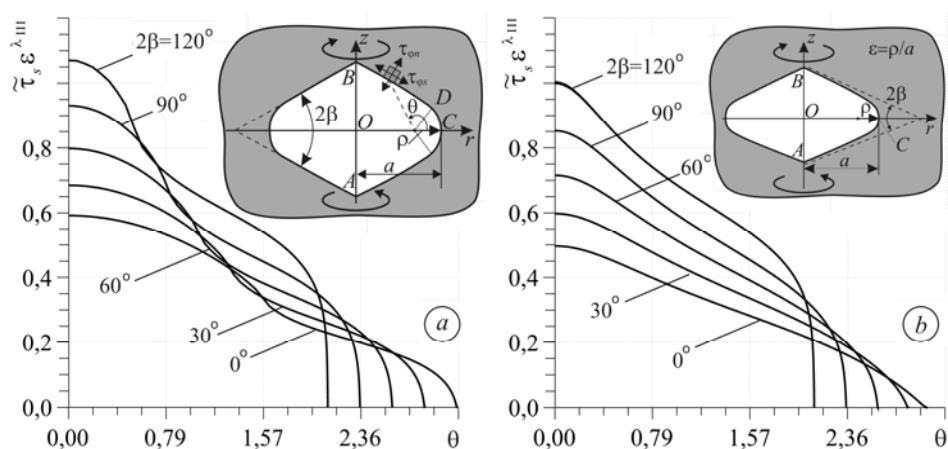


Рис. 1. Розподіли добутків $\tilde{\tau}_s(\theta)\varepsilon^{\lambda_{III}}$ на закруглених V-подібних (а) та гіперболічних (б) контурах для різних кутів розхилу 2β .

Fig. 1. Distributions of the product $\tilde{\tau}_s(\theta)\varepsilon^{\lambda_{III}}$ on the rounded V-shaped (a) and hyperbolic (b) contours for different opening angles 2β .

Гіперболічний контур. Аналогічні залежності побудовано (рис. 1б) для гіперболічного контуру з вершиною у точці $C(a, 0)$, параметричне рівняння якого має вигляд (15), де

$$\omega_0(\xi) = 1 - \frac{\varepsilon \cos \alpha}{\cos \alpha - 1} + \frac{\varepsilon \cos \alpha \exp(i\alpha \xi_1 \xi)}{\cos \alpha - \cos(\alpha \xi_1 \xi)}, \quad (17)$$

$\xi_1 \alpha = \arccos \{1/(1/\cos \alpha + 1/(\cos \alpha / (\cos \alpha - 1) - 1/\varepsilon))\}$, $\alpha = \pi - \beta$. Отримані розподіли напружень якісно та кількісно відрізняються, отже, не тільки радіус закруглення у вершині, а й форма контуру в околі його вершини значно впливають на розподіл напружень по поверхні осесиметричної порожнини за дії кручення.

Найбільші розбіжності коефіцієнтів концентрації напружень k_c у вершині C (максимальних значень відносних напружень $\tau_{\varphi s}^*(0)/\tau_0$) для гіперболічних (17) та V-подібних закруглених контурів (16) отримано, коли $\varepsilon \rightarrow 0$ та $\beta = 0$ (рис. 2). Їхні відносні відхилення прямують до нуля, коли $\varepsilon \rightarrow 1$, однак зростають за зменшення ε і досягають 18% для $\varepsilon = 0,01$; $\beta = 0$ та 32% для $\varepsilon = 0,0001$; $\beta = 0$.

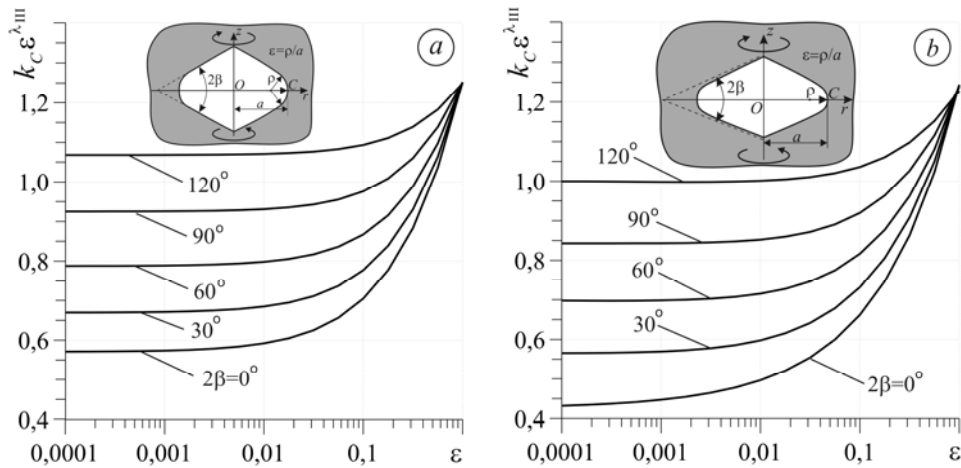


Рис. 2. Залежності добутків $k_c \varepsilon^{\lambda_{III}}$ від параметра ε для закругленого V-подібного (а) та гіперболічного (b) контурів за різних кутів розхилу 2β .

Fig. 2. Dependence of the product $k_c \varepsilon^{\lambda_{III}}$ on parameter ε for the rounded V-shaped (a) and hyperbolic (b) contours for different opening angles 2β .

Для параболічного контуру, який отримуємо з гіперболічного за $\beta = 0$, обчислені коефіцієнти концентрації напружень для різних радіусів кривини у вершині практично збігаються з відомими [10] (відносні відхилення не перевищують 0,12%) за кручення пружного простору з осесиметричною еліпсоїдною порожниною.

За отриманими числовими залежностями коефіцієнтів концентрації напружень k_c від параметра $\varepsilon \in [0,0001; 1]$ для різних кутів розхилу 2β закруглених V-подібних контурів (рис. 2a) у граничному випадку $\varepsilon \rightarrow 0$ на основі залежності (14) знайдено відносні КІН $F_{III}^V = K_{III}^V / [\tau_0 a^{\lambda_{III}} \sqrt{\pi}]$ для гострих V-подібних контурів у всьому діапазоні зміни кута 2β (рис. 3a). Таким способом отримали відоме значення КІН ($K_{III} = (4/3)\tau_0 \sqrt{a/\pi}$) для плоскої дископодібної тріщини (коли кут $2\beta = 0$) у пружному просторі за умов кручення [11, 12].

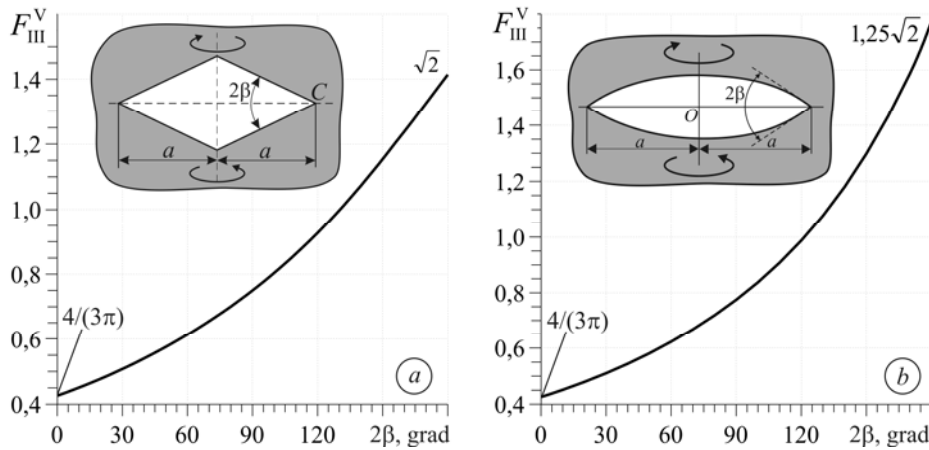


Рис. 3. Залежність відносного КІН F_{III}^V від кута розхилу 2β гострого V-подібного (а) та лінзоподібного (b) контурів.

Fig. 3. Dependence of relative stress intensity factor F_{III}^V on the opening angle 2β of the sharp V-shaped (a) and the lens-shaped (b) contours.

Овальний контур. Аналогічні розрахунки здійснили для овальних контурів $L = ACB$, які складаються з двох симетричних дуг кола радіуса R , кінці яких гладко з'єднані між собою дугою кола радіуса ρ (рис. 4а). Коли $\rho \rightarrow 0$, дуги кіл радіуса R перетинаються у вершині C під кутом 2β . Довжина проекції контуру порожнини на вісь Or рівна $2a$. Параметричне рівняння такого контуру має вигляд (15), де

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} 1 - \varepsilon + \varepsilon \exp(i\xi l / \rho), & 0 \leq \xi \leq \xi_D, \\ -i\varepsilon_R \cos \beta + \varepsilon_R \exp\{i[\xi l / R + \xi_D(1 - \varepsilon / \varepsilon_R)l / \rho]\}, & \xi_D < \xi \leq 1. \end{cases} \quad (18)$$

Тут $\varepsilon = \rho / a$, $\varepsilon_R = R / a = (\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + (1 - 2\varepsilon)\sin^2 \beta}) / \sin^2 \beta$, $\xi_D = \rho \theta_D / l$ – параметр точки $D = a\omega_0(\xi_D)$ гладкого з'єднання дуг кіл, $\theta_D = \arctg(R \cos \beta / (a - \rho))$, $l = \rho \theta_D + R(\pi / 2 - \theta_D)$ – дугова довжина контуру CDB .

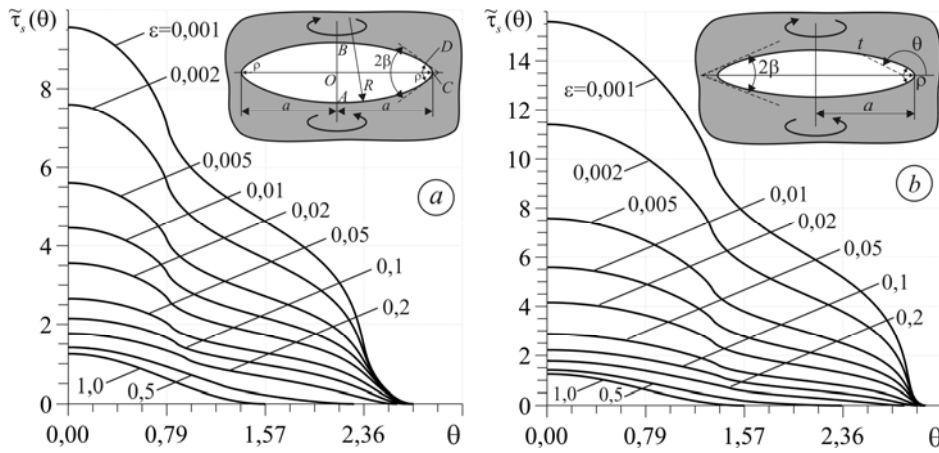


Рис. 4. Розподіли відносних напружень $\tilde{\tau}_s(\theta)$ на овальних контурах з кутами розхилу $2\beta = 90^\circ$ (а) та $2\beta = 30^\circ$ (б) для різних значень параметра $\varepsilon = \rho/a$.

Fig. 4. Distributions of relative stress $\tilde{\tau}_s(\theta)$ on the oval contours with opening angles $2\beta = 90^\circ$ (a) and $2\beta = 30^\circ$ (b) for different values of parameter $\varepsilon = \rho/a$.

Знайдено розподіли напружень $\tilde{\tau}_s(\theta) = \tau_{\phi s}^*(\theta) / \tau_0$ ($\theta = \arg(t - a + \rho)$) на контурі (18) для різних відносних радіусів закруглення у вершині C ($\varepsilon = \rho/a \in [1; 0,001]$) та кутів розхилу $2\beta = 90^\circ$ (рис. 4а) і $2\beta = 30^\circ$ (рис. 4б). За кручення пружного простору зі сферичною порожниною ($\varepsilon = 1$) отримали відомий коефіцієнт концентрації напружень $k_c = 1,25$ [10].

За допомогою граничного переходу (14) на основі одержаних числових значень максимальних напружень у вершині C контуру (18) обчислені безрозмірні КІН $F_{III}^V = K_{III}^V / [\tau_0 a^{\lambda_{III}} \sqrt{\pi}]$ у вершинах двокутного лінзоподібного отвору для всього діапазону зміни кута 2β (див. рис. 3б).

На основі отриманих залежностей (див. рис. 3) побудовано апроксимувальні формули відносно параметра $\lambda_{III} = 1 - \pi / (2\pi - 2\beta)$ для відносних КІН F_{III}^V у вершині ромбічної

$$F_{III}^V(\lambda_{III}) / F_{III} = 3,3301 - 3,5747\lambda_{III} - 6,3669\lambda_{III}^2 + 10,3158\lambda_{III}^3 - 3,8115\lambda_{III}^4$$

та лінзоподібної

$$F_{III}^V(\lambda_{III})/F_{III} = 4,1674 - 8,3683\lambda_{III} + 3,9429\lambda_{III}^2 + 0,2689\lambda_{III}^3$$

осесиметричних порожнин, відносні похибки яких не перевищують 0,11% та 0,2%, відповідно. Тут $F_{III} = 4/(3\pi)$ – відносний КІН для дископодібної тріщини.

Прямокутний контур. Нехай осьовий переріз порожнини є прямокутник із закругленими (дугами кіл радіуса ρ) вершинами. Проекції прямокутника на осі Or і Oz відповідно рівні $2a$ і $2b$. Уведемо параметри: $\varepsilon = \rho/a$ ($0 < \varepsilon \leq \min\{1, \rho/b\}$) – відносний радіус закруглення вершин і $\gamma = b/a$ ($\varepsilon \leq \gamma < \infty$) – відносне видовження прямокутника вздовж осі Oz . Параметричне рівняння половини контуру такого прямокутника ($L = ACB$) подамо у вигляді (15), де

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} 1 + i l \xi, & 0 \leq \xi \leq \xi_E, \\ 1 - \varepsilon + i(\gamma - \varepsilon) + \varepsilon \exp(i\psi), & \xi_E < \xi \leq \xi_H, \\ 1 - \varepsilon + i\gamma - l(\xi - \xi_H), & \xi_H \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Тут $\xi_E = (\gamma - \varepsilon)/l$; $\xi_H = \xi_E + \pi\varepsilon/(2l)$ – значення параметра ξ , що відповідають перехідним точкам E і H від прямолінійних ділянок контуру до криволінійної (рис. 5); $\psi = l(\xi - \xi_E)/\varepsilon$; $l = 1 + \gamma + \varepsilon(\pi/2 - 2)$ – повна дугова довжина контуру CDB .

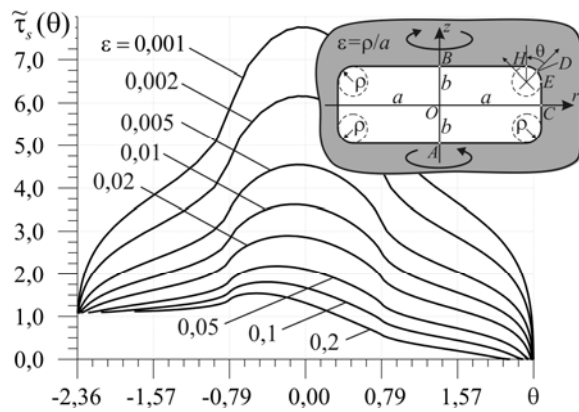


Рис. 5. Розподіл відносних напружень $\tilde{\tau}_s(\theta)$ в околі закругленої вершини D на прямокутному контурі ($b/a = 0,5$) для різних значень параметра $\varepsilon = \rho/a$.

Fig. 5. Distribution of relative stresses $\tilde{\tau}_s(\theta)$ near the rounded vertex D on the rectangular contour ($b/a = 0.5$) for different values of parameter $\varepsilon = \rho/a$.

Знайдено розподіли напружень $\tilde{\tau}_s(\theta) = \tau_{s\varphi}^*(\theta)/\tau_0$ на поверхні порожнини в околі закругленої вершини прямокутного контуру (рис. 5). Тут $\theta = \arg(t - O_1) - \pi/4$; $O_1 = a - \rho + i(b - \rho)$; $t = r + iz \in CDB$. Зі зменшенням радіуса закруглення у вершині контуру ($\varepsilon \rightarrow 0$) точка, в якій напруження $\tilde{\tau}_s(\theta)$ досягають максимального значення, наближається до вершини D контуру. Для збільшення точності числового розв'язку тут використали перетворення (8).

Відносні КІН $F_{III}^V = K_{III}^V / [\tau_0 a^{1/3} \sqrt{\pi}]$ у гострій вершині прямокутного контуру ($2\beta = 90^\circ$, $\lambda_{III} = 1/3$) обчислили за допомогою граничного переходу (14) для відносних видовжень прямокутника $\gamma = b/a \in [0,01; 1]$ (рис. 6a). На основі цих результатів для безрозмірного КІН побудували апроксимувальну формулу

$$F_{III}^V(\gamma) = \gamma^{-1/6} (0,4039 + 4,7115\gamma + 5,3726\gamma^2) / (1 + 9,4879\gamma + 6,3318\gamma^2), \quad 0,01 \leq \gamma \leq 1,$$

відносна похибка якої не перевищує 0,12%.

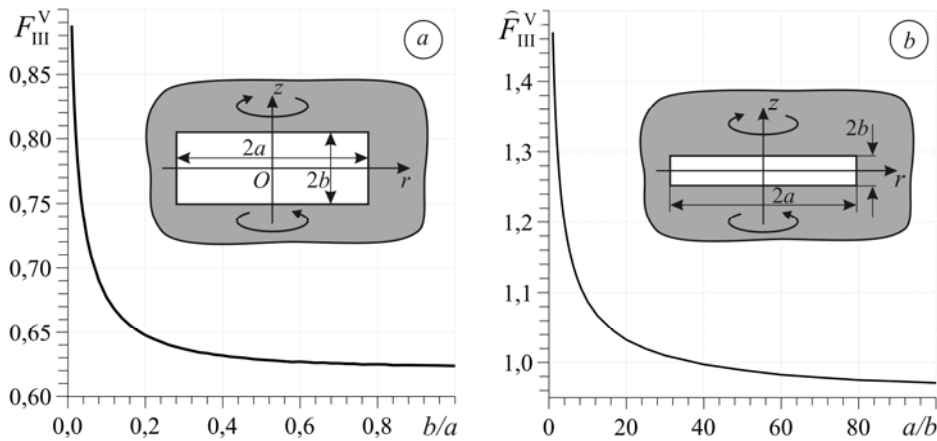


Рис. 6. Залежності безрозмірних КІН F_{III}^V (a) і \hat{F}_{III}^V (b) у вершині прямокутного контуру від відносних видовжень b/a (a) і a/b (b).

Fig. 6. Dependences of dimensionless stress intensity factors F_{III}^V and \hat{F}_{III}^V at the vertex of the rectangular contour on relative elongations b/a (a) and a/b (b).

Для видовжених вздовж осі Or прямокутних контурів ($\gamma \rightarrow 0$) КІН у їхніх гострих вершинах можна подати у вигляді

$$K_{III}^V = F_{III}^V \tau_0 a^{1/3} \sqrt{\pi} = \hat{F}_{III}^V K_{III} b^{-1/6}, \quad \hat{F}_{III}^V = 0,75\pi(b/a)^{1/6} F_{III}^V \quad (20)$$

де $K_{III} = (4/3)\tau_0\sqrt{a/\pi}$ – КІН у вершині відповідної плоскої дископодібної тріщини за кручення, а напруження $\tau_0 = Ga\phi_0$ відповідає куту закручування тіла ϕ_0 на одиницю довжини вздовж осі Oz . Коли відношення $a/b \rightarrow \infty$, функція \hat{F}_{III}^V (20) прямує до граничного значення $\hat{F}_{III}^V \approx 0,95$ (рис. 6b). У результаті отримали залежність узагальненого КІН K_{III}^V у вершині тонкої прямокутної порожнини $K_{III}^V \approx 0,95K_{III}b^{-1/6}$ від КІН у вершині відповідної плоскої дископодібної тріщини за кручення. Зауважимо, що аналогічна залежність була знайдена раніше [9] для напівнескінченного прямокутного вирізу за антиплоскої деформації тіла.

ВИСНОВКИ

Розвинуто єдиний підхід до визначення концентрації напружень біля гострих та закруглених вершин межових контурів осесиметричних порожнин у нескінченному пружному тілі за дії кручення. Методом сингулярних інтегральних рівнянь знайдено розв'язки осесиметричних задач кручення про концентрацію напружень біля гладких криволінійних контурів із закругленими вершинами. Використавши залежність між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень у гострій та закругленій вершинах куткових вирізів за антиплоскої деформації, визначили КІН у гострих вершинах симетричних V-подібних, лінзоподібних та прямокутних контурів. За допомогою граничного переходу, коли відношення сторін прямокутного контуру прямує до нескінченності, отримано залежність КІН у вершині тонкої прямокутної порожнини через КІН для відповідної плоскої дископодібної тріщини за кручення. Порівняння отриманих результатів з відомими розв'язками підтвердили високу точність запропонованого підходу.

РЕЗЮМЕ. Развѣт єдинѣй пѣдхѣд к рѣшенѣю задач љ концентрациѣ напруженѣю љко- љо љстрых љ закругленнѣх вершин в љсесиметричнѣх полѣстях за крученѣю упругѣю пространства. Исползован метод сингулярнѣх интегральнѣх уравненѣю љтносительно

гладких разомкнутих контуров, концы которых выходят на ось кручения упругого тела. Найдены распределения напряжений на поверхностях полостей, коэффициенты концентрации и интенсивности напряжений в закругленных и острых вершинах. Численные результаты получены для полостей различных конфигураций (ромбических, гиперболических, овальных, прямоугольных) в широком диапазоне изменения радиуса закругления в вершинах граничного контура.

SUMMARY. A unified approach to solution of the problem of stress concentration near sharp and rounded vertices in axisymmetric cavities under torsion of the elastic space is developed. The method of singular integral equations for the smooth open contours, the ends of which are located on the torsion axis of the elastic body is used. The stress distribution on the surfaces of the cavities, stress concentration and stress intensity factors at the rounded and sharp vertices are determined. Numerical results are obtained for different configurations of the cavities (rhombic, hyperbolic, oval, rectangular) in a wide range of variation of the curvature radius at the vertices of the boundary contour.

Робота виконана за проектом № P9.3 програми “РЕСУРС” НАН України, а також за проектом № 2011/03/B/ST8/06456, що фінансується Національним центром науки (Польща).

1. Саврук М. П., Казберук А. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. посіб. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: СПОЛОМ, 2012. – 14. – 384 с.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
3. Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г. Розподіл напружень на контурі кутового закругленого вирізу за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – 47, № 6. – С. 7–14.
(Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasiuk G. Distribution of stresses over the contour of a rounded V-shaped notch under antiplane deformation // Materials Science. – 2012. – 47, № 6. – P. 717–725.)
4. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматлит, 1963. – 688 с.
5. Кравець В. С., Васюта Р. В. Кручення пружного простору з осесиметричною вузькою порожниною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – 48, № 6. – С. 96–104.
(Kravets' V. S., Vasyuta R. V. Torsion of an elastic space containing an axially symmetric narrow cavity // Materials Science. – 2013. – 48, № 6. – P. 807–817.)
6. Саврук М. П. Інтегральні рівняння осесиметричних задач кручення пружних тіл з тріщинами // Там же. – 1989. – 25, № 6. – С. 37–44.
(Savruk M. P. Integral equations of axis-symmetric torsion problems for elastic bodies with cracks // Materials Science. – 1989. – 25, № 6. – P. 584–592.)
7. Саврук М. П., Байдак С. Д., Шабайкович В. О. Кручення пружного простору з тріщиною по поверхні обертання // Там же. – 1993. – 29, № 6. – С. 87–93.
(Savruk M. P., Baidak S. D., Shabaikovyeh V. O. Torsion of an elastic space with a crack on the surface of revolution // Materials Science. – 1993. – 29, № 6. – P. 649–656.)
8. Кравець В. С., Саврук М. П. Напружений стан простору з осесиметричною тріщиною по поверхні обертання // 10-й Міжнар. симп. українських інженерів-механіків у Львові. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2011. – С. 102–104.
9. Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г. Концентрація напружень біля отворів у пружній площині за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – 48, № 4. – С. 5–13.
(Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasiuk G. Stress concentration near holes in the elastic plane subjected to antiplane deformation // Materials Science. – 2013. – 48, № 4. – P. 415–426.)
10. Neuber H. Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration Genaue Berechnung der Festigkeit. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 326 s.
11. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х т. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 2. – 1016 с.
12. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. // Под общ. ред. В. В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – 2. – 620 с.

Одержано 16.04.2013