

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ГОСТРИХ ТА ЗАКРУГЛЕНИХ КУТОВИХ ВИРІЗІВ

В. В. ПАНАСЮК¹, М. П. САВРУК¹, А. КАЗБЕРУК²

¹ *Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;*

² *Білостоцький технологічний університет, Польща*

Наведено огляд досліджень концентрації напружень у пружних тілах, послаблених гострими та закругленими кутковими вирізами. Особливу увагу приділено єдиному підходу до вивчення розподілу напружень біля таких концентраторів напружень, коли коефіцієнти інтенсивності напружень у гострих вершинах вирізів знаходять за коефіцієнтами концентрації напружень в околі вершини закругленого вирізу з малим радіусом кривини. Розглянуто двовимірні тіла з внутрішніми гострокутними отворами та крайовими кутковими вирізами.

Ключові слова: *механіка руйнування, коефіцієнт інтенсивності напружень, коефіцієнт концентрації напружень, кутковий виріз, гострокутний отвір.*

У механіці руйнування важливе значення мають дослідження поля напружень і переміщень у твердих тілах з дефектами типу тріщин, до яких відносять як самі тріщини-щілини, так і інші концентратори напружень, що в лінійній теорії пружності призводять до нескінченних напружень в їх вершинах, тобто поле пружних напружень має особливості певного типу. Така ситуація не дає можливості застосовувати класичні критерії до оцінки на міцність елементів конструкцій з такими концентраторами напружень. На сьогодні найбільш розвинуто методи розв'язування задач механіки руйнування для тіл з тріщинами і значно менше приділено увагу руйнуванню тіл з гострими кутковими вирізами, які також зумовлюють особливість напружень у лінійно-пружному тілі. До задач механіки руйнування відносять також задачі про концентрацію напружень в околі куткових вирізів із закругленою вершиною великої кривини, що призводить до значних напружень (більших за границю міцності матеріалу) та унеможливорює оцінювання їх міцності за допомогою класичних критеріїв. Такий стан досліджень у цьому напрямі можна пояснити великими математичними труднощами, які виникають під час розв'язування задач теорії пружності для тіл з кутковими вирізами. Тому важливого значення набувають наближені методи розв'язування такого класу задач на основі результатів про концентрацію напружень у вершинах закруглених куткових вирізів (не дуже малого радіуса кривини), які можна отримати різними методами. Для цього потрібно знати, як коефіцієнт концентрації напружень для закругленого вирізу малого радіуса кривини залежить асимптотично від коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) у вершині відповідного гострого концентратора напружень. Детальніший огляд цих досліджень можна знайти у довідниковому посібнику [1].

Розподіл поля напружень та переміщень біля гострого куткового вирізу. Розподіл напружень у пружному клині (площині з гострим кутковим вирізом) почав вивчати Віггарт [2] ще 1907 р., а в тридцятих роках минулого сторіччя продовжив Брац [3]. У 1952 р. Вільямс [4] розглянув задачу на власні значення для

пружного клина за різних крайових умов на його гранях. Пізніше ці питання різними методами вивчали багато інших дослідників [5–12]. Як і для тіл з тріщинами, у механіці руйнування тіл з кутовими вирізами розрізняють три типи їх деформування (рис. 1), коли розтягувальне навантаження симетричне відносно бісекторної площини (тип I), зсувне навантаження антисиметричне відносно бісекторної площини і спрямоване перпендикулярно (тип II) або паралельно (тип III) до ребра вирізу. Перші два типи спричинені зусиллями, що діють у площині, перпендикулярній до ребра вирізу. Їх досліджують у межах плоскої задачі теорії пружності. Третій тип деформування, викликаний силами, паралельними до ребра вирізу, називають поздовжнім зсувом або антиплоскою деформацією.

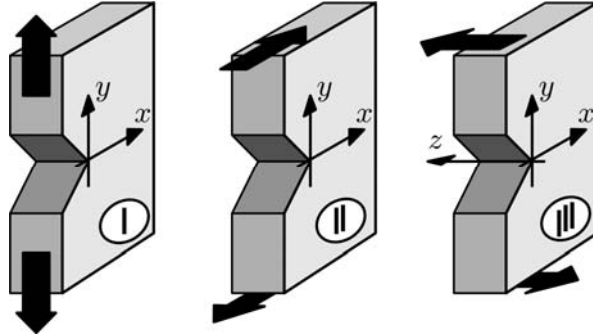


Рис. 1. Три типи деформування тіла з кутовим вирізом.

Fig. 1. Three deformation types of a solid with a V-shaped notch.

Компоненти напружень у циліндричній системі координат (r, θ, z) у пружному тілі з кутовим вирізом можна подати у вигляді [1, 10–11]

$$\sigma_{ik} = \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_I}} f_{ik}(\beta, \theta) + \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}}} g_{ik}(\beta, \theta) + \frac{\tilde{K}_{III}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{III}}} h_{ik}(\beta, \theta) \quad (i, k = r, \theta, z),$$

$$u_i = \tilde{K}_I^V (2\pi r)^{\lambda_I} f_i(\beta, \theta) + \tilde{K}_{II}^V (2\pi r)^{\lambda_{II}} g_i(\beta, \theta) \quad (i = r, \theta),$$

$$u_z = \tilde{K}_{III}^V (2\pi r)^{\lambda_{III}} h_z(\beta, \theta),$$

де \tilde{K}_I^V , \tilde{K}_{II}^V , \tilde{K}_{III}^V – КІН у вершині кутового вирізу з кутом розхилу 2β ; λ_I , λ_{II} , λ_{III} – показники степеневих особливостей напружень (рис. 2); (r, θ) – полярні координати з полюсом у вершині вирізу і полярною віссю вздовж осі x (див. схему на рис. 2).

Відомі функції $f_{ik}(\beta, \theta)$, $g_{ik}(\beta, \theta)$, $h_{ik}(\beta, \theta)$, $f_i(\beta, \theta)$, $g_i(\beta, \theta)$, $h_z(\beta, \theta)$ визначають залежності сингулярних напружень та переміщень від полярного кута θ в околі вершини кутового вирізу. Параметри $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ – корені характеристичних рівнянь

$$(1 - \lambda) \sin 2\alpha + \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad (2)$$

$$(1 - \lambda) \sin 2\alpha - \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad (3)$$

$$\sin 2\alpha(1 - \lambda) = 0 \quad (4)$$

для плоскої (2), (3) та антиплоскої (4) задач теорії пружності на власні значення для клина з кутом розхилу $2\alpha = 2(\pi - \beta)$ з діапазону $0 < \lambda < 1$ за симетричного (2) і антисиметричного (3) розподілів напружень.

На основі числових даних (рис. 2) для показників λ_I, λ_{II} побудовано апрок-

симувальні залежності, а для параметра λ_{III} відоме точне значення:

$$\lambda_I \approx 1,247 \cos \beta - 1,312 \cos^2 \beta + 0,8532 \cos^3 \beta - 0,2882 \cos^4 \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2,$$

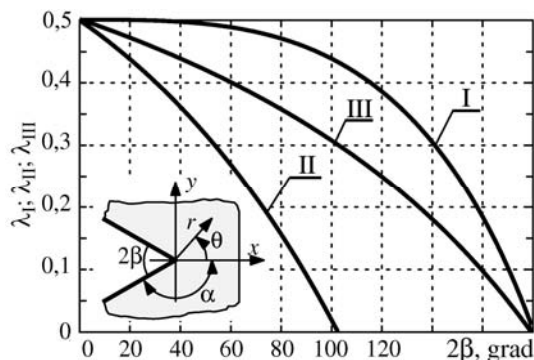
$$\lambda_{II} \approx 0,5 - 0,3134 \operatorname{tg} \beta - 0,2479 \operatorname{tg}^2 \beta + 0,1937 \operatorname{tg}^3 \beta - 0,0410 \operatorname{tg}^4 \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \beta^*,$$

$$\lambda_{III} = 1 - \pi/(2\alpha) = 1 - \pi/(2(\pi - \beta)), \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2.$$

Тут кут $\beta^* = 0,8945 (51,2733^\circ)$ – корінь рівняння $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\alpha$, що визначає діапазон зміни кута β ($0 \leq \beta < \beta^*$), в якому напруження у вершині гострого кутового вирізу мають особливість за антисиметричного їх розподілу.

Рис. 2. Залежності показників особливостей напружень $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ від кута розхилу вирізу 2β .

Fig. 2. Dependences of stress exponents $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ on opening angle 2β .



Співвідношення (1) впливають із розв'язків плоскої та антиплоскої задач теорії пружності на власні значення для пружного клина, які визначають сингулярні напруження у вершині клина. Для нескінченного клина вони справедливі у всій пружній області, а для обмежених областей з кутовими вирізами виступають як асимптотичні залежності, що характеризують поля напружень та переміщень в околі вершини концентратора напружень.

Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих та закруглених кутових вирізів. Залежності (1) використовують також для побудови відповідних розв'язків задач на власні значення для нескінченного кутового закруглених вирізів у пружній площині [1]. Для цього у пружному клині на контурі L^* , що складається з двох променів, паралельних до граней клина і з'єднаних плавно дугою кола радіуса ρ (рис. 3a), знаходять нормальні та дотичні напруження. Потім розв'язують плоску та антиплоску задачі для площини з кутовим закругленим вирізом з контуром L^* , на якому задано ці напруження з протилежним знаком, а на нескінченності напруження зникають. Додавши отримані результати до відомих співвідношень (1) для клина, знаходимо розв'язки задач на власні значення для площини з кутовим закругленим вирізом, коли асимптотика поля напружень на нескінченності така сама, як і в площині з відповідним гострим вирізом. У цьому разі напруження на контурі вирізу виражають співвідношення [13–16]

$$\sigma_s = \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_I}} R_I(\beta, \theta) + \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}}} R_{II}(\beta, \theta), \quad \tau_{sz} = \frac{\tilde{K}_{III}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{III}}} R_{III}(\beta, \theta), \quad (5)$$

причому максимальні їх значення досягаються у вершині вирізу лише для I та III типів деформування

$$(\sigma_s)_{\max} = \sigma_s(\rho, 0) = \tilde{K}_I^V R_I(2\pi\rho)^{-\lambda_I}, \quad \tau_{\max} = \tau_{\theta z}(\rho, 0) = \tilde{K}_{III}^V R_{III}(2\pi\rho)^{-\lambda_{III}}, \quad (6)$$

а за антисиметричного навантаження (тип II) – для певного кута $\theta_{\max} = \theta_{\max}(\beta)$:

$$(\sigma_s)_{\max} = \sigma_s(\rho, \theta_{\max}) = \tilde{K}_{II}^V R_{II} (2\pi\rho)^{-\lambda_{II}}. \quad (7)$$

Тут $R_I = R_I(\beta, 0)$, $R_{II} = R_{II}(\beta, \theta_{\max})$, $R_{III} = R_{III}(\beta, 0)$ – коефіцієнти впливу закруглення вирізу на максимальні напруження на його контурі. Співвідношення (1) і (5) свідчать, що КІН характеризують не лише напружено-деформований стан в околі вершини гострого кутового вирізу, але й біля вершини вирізу з малим радіусом закруглення.

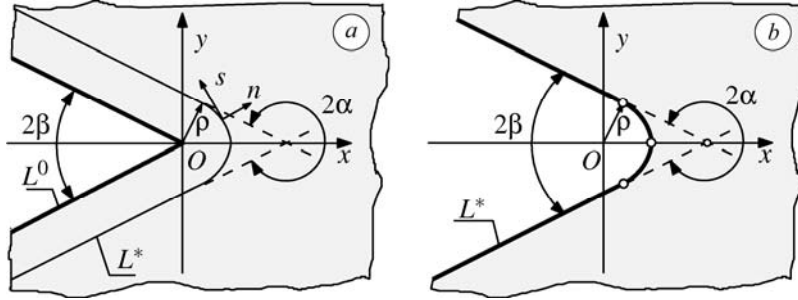


Рис. 3. Гострий (а) та закруглений (б) кутові вирізи у пружній площині.

Fig. 3. Sharp (a) and rounded (b) V-shaped notches in an elastic plane.

Параметри R_I, R_{II}, R_{III} вперше ввів Бентхем [17] для параболічного та гіперболічного вирізів. Для кутового закругленого вирізу залежності коефіцієнтів R_I, R_{II}, R_{III} від кута розхилу вирізу отримано [13–16] методом сингулярних інтегральних рівнянь [18]. Для I та III типів деформування, коли максимальні напруження на контурі вирізу досягаються у його вершині, ці залежності, а також відповідні для гіперболічного вирізу наведено на рис. 4.

Розв'язки (5) для кутового закругленого та гіперболічного вирізів суттєво відрізняються, коли радіуси закруглення їх вершин однакові, тобто на розподіл напружень біля вершини вирізу впливає не тільки її радіус закруглення, але й форма її околу, причому відносні різниці максимальних напружень на контурі вирізу також істотно залежать від типу деформування: вони не перевищують 10 і 26% для I та III типів відповідно.

Для кута $\beta = 0$, коли гіперболічний виріз переходить у параболічний, відоме точне співвідношення

$$(\sigma_y)_{\max} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} R_I \rho^{-1/2} \quad (R_I = 2\sqrt{2}), \quad (8)$$

яке впливає із замкненого розв'язку плоскої задачі теорії пружності для площини, послабленої еліптичним отвором [19]. Формулу (8) вперше опублікував Ірвін [20]. Її широко застосовують в інженерній практиці для оцінювання максимальних напружень у вершинах вузьких вирізів [21–28], які часто у літературі ще називають U-подібними, а коректніше U-подібний виріз – це кутовий закруглений виріз із кутом розхилу $2\beta = 0$. Для нього методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано [1, 13] значення параметра $R_I = 2,992$, близьке до відомих результатів [29, 30], знайдених іншими методами. Зауважимо, що максимальне напруження у вершині U-подібного вирізу практично збігається з відповідним для напівнескінченної тріщини, у вершині якої є круговий отвір радіуса ρ [31, 32].

За мішанного навантаження ($\tilde{K}_I^V \neq 0, \tilde{K}_{II}^V \neq 0$) максимальні напруження на контурі кутового закругленого вирізу досягаються не у вершині вирізу, а на певній віддалі від неї, яка залежить і від кута розхилу вирізу, і виду напруженого ста-

ну. Ця обставина суттєво ускладнює знаходження КІН \tilde{K}_{II}^V за контурним напруженням на краю закругленого вирізу. Оскільки градієнт контурного напруження (його похідна за кутовою координатою θ) досягає максимуму у вершині вирізу, де симетричні напруження рівні нулю, то приходимо до співвідношення [14, 15]

$$\left. \frac{d\sigma_s}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{\tilde{K}_{II}^V R'_{II}}{(2\pi\rho)^{\lambda_{II}}}, \quad R'_{II} = \frac{dR_{II}(\beta, 0)}{d\theta}, \quad (9)$$

з якого можна знайти КІН \tilde{K}_{II}^V .

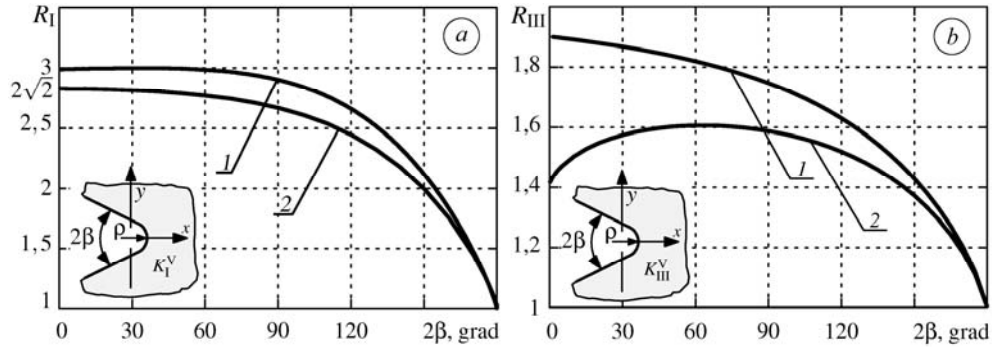


Рис. 4. Залежності коефіцієнтів R_I (a) і R_{III} (b) для кутового закругленого (1) та гіперболічного (2) вирізів від кута розхилу вирізу 2β .

Fig. 4. Dependences of coefficients R_I (a) and R_{III} (b) for rounded V-shaped (1) and hyperbolic (2) notches on opening angle 2β .

Побудовано (рис. 5) залежності безрозмірного градієнта контурного напруження R'_{II} у вершинах кутового закругленого та гіперболічного вирізів від кута розхилу вирізу 2β . Для U-подібного вирізу ($\beta = 0$) маємо: $R'_{II} = -5,186$.

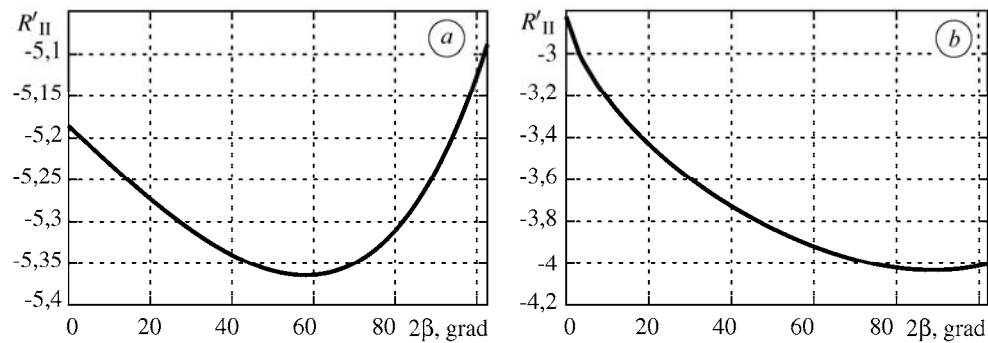


Рис. 5. Залежності безрозмірного градієнта контурного напруження R'_{II} у вершинах кутового закругленого (a) та гіперболічного (b) вирізів від кута розхилу вирізу 2β .

Fig. 5. Dependences of dimensionless contour stress gradient R'_{II} at the vertex of rounded V-shaped (a) and hyperbolic (b) notches on opening angle 2β .

Для кутових вирізів у скінченних тілах співвідношення (6)–(9) є асимптотичним розв'язком задачі, коли відношення радіуса ρ до характерного розміру тіла мале. У результаті приходимо до таких граничних рівностей [14–16]:

$$\begin{aligned}\tilde{K}_I^V &= \frac{1}{R_I} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(2\pi\rho)^{\lambda_I} \sigma_s(\theta=0) \right], & \tilde{K}_{II}^V &= \frac{1}{R'_{II}} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(2\pi\rho)^{\lambda_{II}} \frac{d\sigma_s}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \right], \\ \tilde{K}_{III}^V &= \frac{1}{R_{III}} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(2\pi\rho)^{\lambda_{III}} \tau_{sz}(\theta=0) \right].\end{aligned}\quad (10)$$

Для коефіцієнтів R_I, R'_{II}, R_{III} побудовано апроксимувальні формули

$$R_I = \frac{1 + 28,75\gamma + 98,04\gamma^2 - 102,1\gamma^3 + 47,42\gamma^4 - 8,441\gamma^5}{1 + 20,71\gamma}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2},$$

$$R'_{II} = 5,234 \exp(0,137\beta) - 0,051 \exp(3,114\beta), \quad 0 \leq \beta \leq \beta^*,$$

$$R_{III} = \frac{1 + 17,845\gamma + 20,266\gamma^2 - 19,123\gamma^3 + 9,502\gamma^4 - 1,916\gamma^5}{1 + 14,248\gamma}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

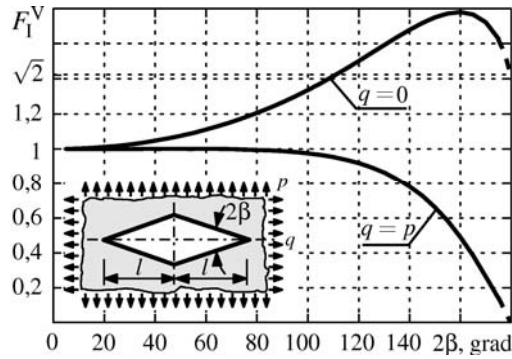
Співвідношення (10) – основні залежності в єдиному підході до розв’язування задач про концентрацію напружень біля гострих та закруглених кутових вирізів [1, 13–16, 33–40], коли методом сингулярних інтегральних рівнянь (або іншими аналітичними чи числовими методами) знаходять розв’язок задачі для тіла із закругленими кутовими вирізами і за допомогою граничних переходів (10) отримують КІН у гострих вершинах відповідних кутових вирізів. Знаючи КІН у вершині гострого кутового вирізу, можна записати наближені залежності, подібно до співвідношення (8), щоб оцінити максимальні напруження на контурі кутового вирізу, закругленого дугою малого радіуса [1].

Концентрація напружень біля гострокутних отворів. Двовимірні задачі про концентрацію напружень біля гладких криволінійних отворів вивчали різними методами [41, 42]. За наявності на контурі отвору кутових точок розв’язування задачі суттєво ускладнюється. Особливо це стосується пружних областей з гострокутними отворами за складного напруженого стану, коли у вершині отвору компоненти напружень мають степеневі особливості різного типу. Нижче розглянемо застосування єдиного підходу до розв’язування задачі про двовісний розтяг пружної площини, послабленої ромбічним отвором (див. схему на рис. 6). Спочатку методом сингулярних інтегральних рівнянь отримали розв’язок задачі для пружної площини, послабленої ромбічним отвором із закругленими вершинами. Щоб отримати достатню точність для малих радіусів закруглення вершин отвору, для параметризації межового контуру використовували нелінійні перетворення, які призводили до згущення вузлів квадратурних формул та вузлів колокації в околі цих вершин [1, 39, 43]. Знайшовши значення максимального напруження у закруглених вершинах отвору, за формулами (10) отримали КІН $K_I^V = (2\pi)^{1/2-\lambda_I} \tilde{K}_I^V$ та обчислили залежності відносного КІН $F_I^V = K_I^V / (\rho l^{\lambda_I} \sqrt{\pi})$ від кута 2β (рис. 6) за одновісного та всебічного розтягів. Отримані результати в окремому випадку ($\beta = \pi/2$) квадратного отвору практично збігаються з відомими розв’язками [44, 45]. Вони також близькі до відповідних розв’язків для лінзоподібного отвору [33, 39, 46, 47].

Концентрацію напружень біля гострокутного вирізу за складного напруженого стану ($\tilde{K}_I^V \neq 0, \tilde{K}_{II}^V \neq 0$) досліджували за двовісного розтягу площини з прямокутним отвором [1, 15]. Цю задачу розв’язували вже раніше методом сингулярних [48] та регулярних [49] інтегральних рівнянь, однак при цьому враховували лише одну (більшу) особливість напружень у вершині отвору.

Рис. 6. Залежності відносного КІН F_1^V у вершині ромбічного отвору від кута 2β за одновісного ($q = 0$) та всебічного ($q = p$) розтягу.

Fig. 6. Dependences of dimensionless stress intensity factor F_1^V at the vertex of a diamond-shape hole on angle 2β for uniaxial ($q = 0$) and all-around ($q = p$) tension.



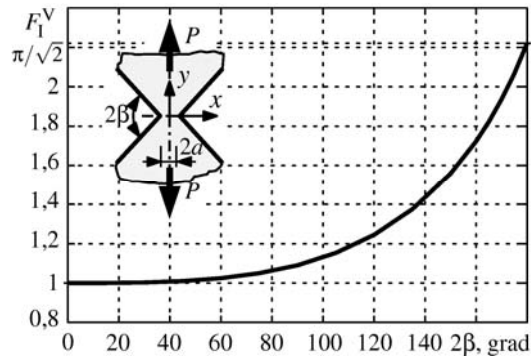
Єдиний підхід до розв'язування задач про концентрацію напружень біля гострих та закруглених кутових вирізів використано також для дослідження періодичної системи близько розташованих гострокутних отворів у пружній площині [50]. У границі, коли віддаль між отворами прямує до нуля, отримано відносний КІН $F_1^V = K_1^V \sqrt{\pi a^{1-\lambda_1}} / P$ для двобічного кутового вирізу в пружній площині (рис. 7). На основі цих даних побудовано апроксимувальну формулу

$$F_1^V(\lambda_1) = \frac{1 - 0,9134\lambda_1}{1 + 0,4138\lambda_1} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right), \quad 0 \leq \lambda_1 \leq 0,5, \quad (11)$$

відносна похибка якої не перевищує 0,5%.

Рис. 7. Залежність відносного КІН F_1^V для двобічного кутового вирізу від кута розхилу 2β .

Fig. 7. Dependence of dimensionless stress intensity factor F_1^V for a bilateral V-shaped notch on opening angle 2β .



Крайові кутові вирізи. Задачу про розтяг пружної півплощини з крайовим гострим кутовим вирізом (див. схему на рис. 8) розв'язували різними методами [27, 44, 51–56]. Наведено (рис. 8) залежність відносного КІН $F_1^V = K_1^V / (pl^\lambda \sqrt{\pi})$ у вершині вирізу від кута розхилу 2β , яку отримали з числового розв'язку задачі для відповідного закругленого кутового вирізу за допомогою граничного переходу (10) [1, 39, 57]. На основі цих даних побудовано апроксимувальну формулу

$$F_1^V = \sqrt{2} + 5,0576\lambda_1 - 23,027\lambda_1^2 + 41,218\lambda_1^3 - 35,472\lambda_1^4, \quad (12)$$

відносна похибка якої не перевищує 0,5% у всьому діапазоні $0 \leq \lambda_1 \leq 1/2$. Цим же підходом розв'язано задачу про періодичну систему крайових кутових вирізів у півплощині [58].

Однобічні [27, 54, 59] та двобічні [54, 60] крайові кутові вирізи досліджували також у прямокутних зразках (смугах). Запропоновано інтерполяційну формулу для визначення КІН K_1^V у вершині кутового вирізу довільної глибини у смугі через КІН для мілкового (K_{1s}^V) та глибокого (K_{1d}^V) вирізів [1]:

$$K_I^V = \frac{K_{Is}^V K_{Id}^V}{\left((K_{Is}^V)^{1/\kappa} + (K_{Id}^V)^{1/\kappa} \right)^\kappa}, \quad (13)$$

де κ – параметр, залежний від кута розхилу вирізу 2β

$$\kappa = \lambda_1 [1/2 + (1/3) \cos \beta]. \quad (14)$$

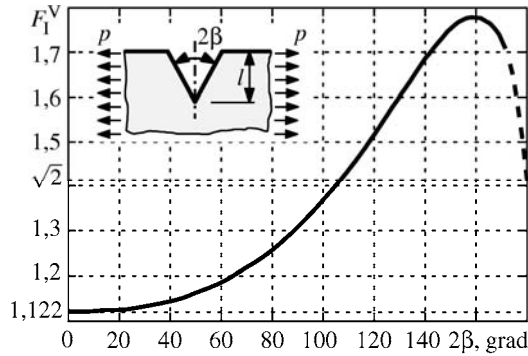


Рис. 8. Залежність відносного КІН F_I^V від кута розхилу 2β крайового кутового вирізу в розтягненій півплощині.

Fig. 8. Dependence of dimensionless stress intensity factor F_I^V on opening angle 2β of an edge V-shaped notch in a stretched half-plane.

У формулі (13) номінальне напруження для всіх КІН однакове і рівне середньому в мінімальному перерізі смуги. Порівняння розрахованих за цією формулою КІН у розтягненій смугі з двобічним кутовим вирізом, коли за мілкий прийнято крайовий вирізу в півплощині (формула (12)), а за глибокий – двобічний кутовий вирізу у площині (формула (11)), з відомими числовими результатами [60] засвідчило її високу точність у всьому діапазоні зміни відносної глибини вирізу для різних значень його кута розхилу (відносна похибка не перевищує 3%).

Якщо у співвідношенні (13) покласти $\kappa = 1/2$, то отримаємо відому залежність для КІН K_I для тріщин [61], яка впливає з інтерполяційної формули Нойбера [62, 63] для коефіцієнтів концентрації напружень для закруглених вирізів. Зі співвідношення (14) для тріщини ($\beta = 0$) маємо дещо інше значення: $\kappa = 5/12$. Порівняння з відомими числовими значеннями КІН у смугі з двобічною крайовою тріщиною [1] свідчить, що формула (13), коли параметр κ визначає залежність (14), і в цьому разі точніша, ніж за його значення $\kappa = 1/2$.

ВИСНОВКИ

Зроблено огляд досліджень концентрації напружень у пружних тілах з гострими та закругленими кутовими вирізами. Наведено основні співвідношення між коефіцієнтами інтенсивності напружень у гострій вершині вирізу та коефіцієнтами концентрації напружень для відповідного закругленого кутового вирізу. Ці співвідношення для скінченних тіл мають асимптотичний характер, тобто стають точнішими зі зменшенням радіуса закруглення вирізу. За їх допомогою можна розширити діапазон застосовності відомих числових результатів для коефіцієнтів концентрації напружень на вирізи великої кривини у вершині. Їх можна також використовувати для отримання коефіцієнтів інтенсивності напружень у гострій вершині вирізу на основі даних про концентрацію напружень у закругленій вершині відповідного кутового вирізу, що проілюстровано на прикладах ромбічного отвору у площині та крайового кутового вирізу в півплощині.

Розроблений загальний метод [1] розв'язування задач теорії пружності про концентрацію напружень біля гострих та закруглених (дугами малого радіуса) вирізів. Таким чином, запропоновано єдиний підхід до розв'язування таких задач, розв'язання яких раніше ([41, 62]) наштовхувалося на великі труднощі.

РЕЗЮМЕ. Приведен обзор исследований концентрации напряжений в упругих телах, ослабленных острыми и закругленными угловыми вырезами. Особое внимание уде-

лено єдиному підходу к изучению распределения напряжений около таких концентраторов напряжений, когда коэффициенты интенсивности напряжений в острых вершинах вырезов находят через коэффициенты концентрации напряжений в окрестности вершины закругленного выреза с малым радиусом кривизны. Рассмотрены двумерные упругие тела с внутренними остроугольными отверстиями и краевыми угловыми вырезами.

SUMMARY. The survey of studies on stress concentration in elastic bodies weakened by sharp and rounded V-shaped notches is presented. Special attention is paid to a unified approach to the problems on stress distribution near these stress concentrators. The stress intensity factors at the sharp vertices are found in terms of the stress concentration factors in the vicinity of the notch rounded vertices with a small radius of curvature. Two-dimensional elastic bodies with internal holes and edge V-shaped notches are considered.

Робота виконана за проектом № 2011/03/B/ST8/06456, що фінансується Національним центром науки (Польща), а також за проектом № P9.3 програми “РЕСУРС” НАН України.

1. *Саврук М. П., Казберук А.* Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. пос. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – **14**. – 384 с.
2. *Wieghardt K.* Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper // *Z. Mathematik und Physik.* – 1907. – **55**, № 2. – P. 60–103.
3. *Brahtz J. H. A.* Stress distribution in a re-entrant corner // *Trans. ASME.* – 1933. – **55**. – P. 31–37.
4. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech.* – 1952. – **19**. – P. 526–530.
5. *Karp S. N. and Karal F. C. J.* The elastic-field behaviour in the neighbourhood of a crack of arbitrary angle // *Commun. Pure Appl. Math.* – 1962. – **15**, № 4. – P. 413–421.
6. *Каландія А. І.* Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов // *Прикл. математика и механика.* – 1969. – **33**, № 1. – С. 132–135.
7. *Rösler R.* On the wedge / notch eigenvalue // *Int. J. Fract.* – 1987. – **33**, № 1. – P. 61–71.
8. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук І. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
9. *Белубекян В. М., Белубекян М. В., Терзян С. А.* Напряженное состояние окрестности вершины упругого клина // *Изв. НАН Армении. Механика.* – 2001. – **54**, № 2. – С. 18–21.
10. *Seweryn A. and Molski K.* Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions // *Engng. Fract. Mech.* – 1996. – **55**, № 4. – P. 529–556.
11. *Seweryn A.* Metody numeryczne w mechanice pękania. – Warszawa: IPPT PAN, 2003. – 361 s.
12. *Barber J. R.* Elasticity. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 410 p.
13. *Саврук М. П., Казберук А.* Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих і закруглених кутових вирізів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2006. – **42**, № 6. – С. 17–26.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches // *Materials Science.* – 2006. – **42**, № 6. – P. 725–738.)
14. *Саврук М. П., Казберук А.* Антисиметричний розподіл напружень у пружному тілі з гострим та закругленим кутовим вирізом // *Там же.* – 2010. – **46**, № 6. – С. 5–15.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Antisymmetric stress distribution in an elastic body with a sharp or a rounded V-shaped notch // *Materials Science.* – 2010. – **46**, № 6. – P. 711–722.)
15. *Саврук М. П., Казберук А.* Розподіл напружень біля кутових вирізів за складного напруженого стану // *Там же.* – 2011. – **47**, № 4. – С. 52–61.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Distribution of stresses near V-shaped notches in the complex stressed state // *Materials Science.* – 2012. – **47**, № 4. – P. 476–487.)
16. *Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г.* Розподіл напружень на контурі кутового закругленого вирізу за антиплоскої деформації // *Там же.* – 2011. – **47**, № 6. – С. 7–14.
(*Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasiuk G.* Distribution of stresses over the contour of a rounded V-shaped notch under antiplane deformation // *Materials Science.* – 2012. – **47**, № 6. – P. 717–725.)

17. *Bentham J. P.* Stresses in the region of rounded corners // *Int. J. Solids Struct.* – 1987. – **23**, № 2. – P. 239–252.
18. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
19. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
20. *Irwin G. R.* Fracture // *Handbuch der Physik.* – Berlin: Springer, 1958. – № 6. – P. 551–590.
21. *Creager M. and Paris P. C.* Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking // *Int. J. Fract. Mech.* – 1967. – **3**, № 4. – P. 247–252.
22. *Hasebe N. and Kutanda Y.* Calculation of stress intensity factor from stress concentration factor // *Engng. Fract. Mech.* – 1978. – **10**, № 2. – P. 215–221.
23. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // *Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. под общ. ред. В. В. Панасюка.* – К.: Наук. думка, 1988. – **2**. – 620 с.
24. *Chiang C. R.* The stress field for a blunt crack in an anisotropic material // *Int. J. Fract.* – 1994. – **68**. – P. R41–R46.
25. *Nui L. S., Chehimi C., and Pluvinage G.* Stress field near a large blunted tip V-notch and application of the concept of the critical notch stress intensity factor (NSIF) to the fracture toughness of very brittle materials // *Engng. Fract. Mech.* – 1994. – **49**, № 3. – P. 325–335.
26. *Lazzarin P. and Tovo R.* A unified approach to the evaluation of linear elastic stress field in the neighbourhood of crack and notches // *Int. J. Fract.* – 1996. – **78**, № 1. – P. 3–19.
27. *Strandberg M.* A numerical study of the elastic stress field arising from sharp and blunt V-notches in a SENT-specimen // *Ibid.* – 1999. – **100**, № 4. – P. 329–342.
28. *Filippi S., Lazzarin P., and Tovo R.* Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates // *Int. J. Solids Struct.* – 2002. – **39**, № 17. – P. 4543–4565.
29. *Kullmer G.* Elastic stress fields in the vicinity of a narrow notch with circular root // *Reliability and Structural Integrity of Advanced Materials. Proc. 9th Biennial Eur. Conf. on Fracture (ECF 9).* – Varna, 1992. – **2**. – P. 905–910.
30. *Livieri P.* Use of J-integral to predict static failures in sharp V-notches and rounded U-notches // *Engng. Fract. Mech.* – 2008. – **75**. – P. 1779–1793.
31. *Chiang C. R.* Stress field around a rounded crack tip // *J. Appl. Mech.* – 1991. – **58**, № 3. – P. 832–836.
32. *Kullmer G. and Richard H. A.* Influence of the root radius of crack-like notches on the fracture load of brittle components // *Arch. Appl. Mech.* – 2006. – **76**. – P. 711–723.
33. *Саврук М. П., Казберук А.* Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // *Прикл. механика.* – 2007. – **43**, № 2. – С. 70–87.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* A unified approach to problems of stress concentration near V-shaped notches with sharp and rounded tip // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, № 2. – P. 182–196.)
34. *Саврук М. П., Казберук А.* Единый подход к решению задач о распределении напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // *Актуальные проблемы механики сплошной среды.* – Ереван: Ереванск. гос. ун-т архитектуры и строительства, 2007. – С. 359–363.
35. *Саврук М. П., Казберук А.* Проблеми механіки руйнування твердих тіл з кутовими вирізами // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2009. – **45**, № 2. – С. 23–39.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Problems of fracture mechanics of solid bodies with V-shaped notches // *Materials Science.* – 2009. – **45**, № 2. – P. 162–180.)
36. *Savruk M. and Kazberuk A.* Stress concentration problems for elastic domains with V-shaped notches // *Fracture Mechanics of Materials and Structural Integrity.* – Lviv: Karpenko Physico-Mechanical Institute, 2009. – P. 75–86.
37. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Two-dimensional fracture mechanics problems for solids with sharp and rounded V-notches // *Int. J. Fract.* – 2010. – **161**, № 1. – P. 79–95.
38. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* О певных загадненнях механіки пекання ціл з острыми і заокраглоними карбами V // *Acta Mech. Autom.* – 2010. – **4**, № 3. – P. 113–123.
39. *Kazberuk A.* Dwuwymiarowe zagadnienia mechaniki pękania ciał z karbami. – Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, 2010. – 242 s.

40. *Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г.* Концентрація напружень біля отворів у пружній площині за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 4. – С. 5–13.
(*Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasiuk G.* Stress concentration near holes in the elastic plane subjected to antiplane deformation // *Materials Science*. – 2013. – **48**, № 4. – P. 415–426.)
41. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
42. *Петерсон Р.* Коэффициенты концентрации напряжений. – М.: Мир, 1977. – 304 с.
43. *Savruk M. and Kazberuk A.* Współczynniki intensywnosci naprężeń w wierzchołku rombowego otworu w rozciąganej płaszczyźnie // *Acta Mech. Autom.* – 2007. – **1**, № 2. – P. 37–40.
44. *Noda N. A., Oda K., and Inoue T.* Analysis of newly-defined stress intensity factors for angular corners using singular integral equations of the body force method // *Int. J. Fract.* – 1996. – **76**. – P. 243–261.
45. *Кравець В. С.* Дослідження напруженого стану нескінченної пластини з квадратним отвором // *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій.* – Львів: Каменяр, 2002. – **5**. – С. 95–105.
46. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
47. *Kazberuk A.* Koncentracja naprężeń wokół owalnego otworu // *Acta Mech. Autom.* – 2007. – **1**, № 2. – P. 25–30.
48. *Gecit M. R.* An integral equation approach for simultaneous solution of rectangular hole and rectangular block problems // *Int. J. Engng. Sci.* – 1983. – **21**, № 9. – P. 1041–1051.
49. *Арсенян В. А., Заргарян С. С.* Численное решение плоских задач теории упругости для областей с углами // *Изв. АН АрмССР. Механика.* – 1983. – **36**, № 1. – С. 47–55.
50. *Саврук М. П., Казберук А.* Напруження у пружній площині з періодичною системою близько розміщених отворів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 6. – С. 70–81.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stresses in an elastic plane with periodic system of closely located holes // *Materials Science*. – 2009. – **45**, № 6. – P. 831–844.)
51. *Theocaris P. S. and Ioakimidis N. I.* The V-notched elastic half-plane problem // *Acta Mech.* – 1979. – **32**, № 1–3. – P. 125–140.
52. *Theocaris P. S. and Ioakimidis N. I.* Mode I stress intensity factors at corner points in plane elastic media // *Engng. Fract. Mech.* – 1980. – **13**, № 4. – P. 699–708.
53. *Chen D. H. and Nisitani H.* Singular stress fields near the tip of a V-notch in a semi-infinite plate // *Trans. Jap. Soc. Mech. Engng.* – 1991. – **A57**. – P. 1406–1411. – Яп.
54. *Chen D. H.* Stress intensity factors for V-notched strip under tension or in-plane bending // *Int. J. Fract.* – 1995. – **70**, № 1. – P. 81–97.
55. *Dunn M. L., Suwito W., and Cunningham S.* Stress intensities at notch singularities // *Engng. Fract. Mech.* – 1997. – **57**, № 4. – P. 417–430.
56. *Noda N.-A. and Takase Y.* Generalized stress intensity factors of V-shaped notch in a round bar under torsion, tension, and bending // *Ibid.* – 2003. – **70**, № 11. – P. 1447–1466.
57. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Koncentracja naprężeń wokół zaokrąglonego karbu o dowolnej krzywiznie wierzchołka // *Acta Mech. Autom.* – 2007. – **1**, № 1. – P. 99–102.
58. *Саврук М. П., Казберук А.* Плоска періодична крайова задача теорії пружності для півплощини з криволінійним краєм // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 4. – С. 5–12.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* A plane periodic boundary-value problem of elasticity theory for a half-plane with curvilinear edge // *Materials Science*. – 2008. – **44**, № 4. – P. 461–470.)
59. *Gross B. and Mendelson A.* Plane elastostatic analysis of V-notched plates // *Int. J. Fract. Mech.* – 1972. – **8**, № 3. – P. 267–276.
60. *Strandberg M.* Upper bounds for the notch intensity factors for some geometries and their use in general interpolation formulae // *Engng. Fract. Mech.* – 2001. – **68**. – P. 577–585.
61. *Панько І. М.* Теоретичні основи інженерних методів для оцінки тріщиностійкості матеріалів і елементів конструкцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2000. – 280 с.
62. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
63. *Neuber H.* Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration; genaue Berechnung der Festigkeit, dritte Auflage. – Berlin: Springer, 1985. – 326 s.

Одержано 16.01.2013