УДК 539.3

ДВІ КОЛІНЕАРНІ ТРІЩИНИ З КОНТАКТУЮЧИМИ БЕРЕГАМИ В ОРТОТРОПНІЙ ОБОЛОНЦІ ДОВІЛЬНОЇ КРИВИНИ ЗА УМОВ ЗГИНУ

К. М. ДОВБНЯ, Н. А. ШЕВЦОВА

Донецький національний університет

Розглянуто задачу про контактну взаємодію берегів колінеарних тріщин за згину пологої ортотропної оболонки довільної кривини. Задачу сформульовано у двовимірній постановці на основі моделі контакту вздовж лінії на одній з лицьових поверхонь оболонки. Розв'язки крайових задач побудовано за допомогою методів сингулярних інтегральних рівнянь та механічних квадратур. Досліджено вплив кривини оболонки, взаємного розміщення колінеарних тріщин, механічних властивостей матеріалу в околі вершин тріщин на коефіцієнти інтенсивності моментів.

Ключові слова: *коефіцієнти інтенсивності, колінеарні тріщини, згин, контакт берегів, ортотропна оболонка*

Конструкції з тонкостінними оболонками інтенсивно використовують в авіаційній та космічній техніці, суднобудуванні, промисловому, цивільному будівництві та інших галузях сучасного машинобудування. Їх довговічність здебільшого зумовлена наявністю в них концентраторів напружень типу тріщин, тому визначення міцності таких конструкцій є однією з найважливіших задач механіки руйнування. Переважна більшість подібних задач для пластин та оболонок розв'язані за умови, що береги тріщин під час деформування не контактують. Урахування контакту берегів тріщин в ізотропних пластинах та оболонках досліджено в працях [1–6]. Ця робота присвячена дослідженню напруженого стану ортотропної оболонки з двома наскрізними колінеарними тріщинами, береги яких контактують під час згинального навантаження.

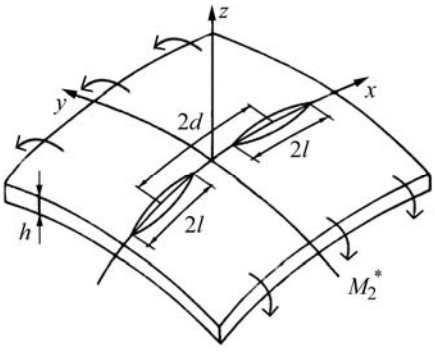

Рис. 1. Оболонка з колінеарними тріщинами.

Fig. 1. A shell with two collinear cracks.

Формулювання задачі. Розглянемо ортотропну оболонку довільної кривини сталої товщини h з двома наскрізними колінеарними тріщинами довжиною $2l$ вздовж осі Ox (рис. 1). Оболонка знаходиться під дією згинального навантаження, симетричного відносно лінії тріщини. Поверхні оболонки вільні від напружень. У межах двовимірної теорії оболонок тріщину моделюють як математичний розріз серединної поверхні оболонки. Напружений стан в оболонці подаємо у вигляді суми напруженого стану без тріщини за заданого зовнішнього навантаження, яке вважаємо відомим (величини із зірочкою), та шуканого додаткового напруженого стану, викликаного тріщиною.

Контактна особа: Н. А. ШЕВЦОВА, e-mail: nadya.shevtsova@gmail.com

Неповний по висоті контакт берегів розрізу інтерпретуємо як змикання його гострих країв в одній із лицьових поверхонь оболонки $z = h/2$ чи $z = -h/2$. Внаслідок симетрії задачі відносно осі Ox крайові умови контакту на лінії розрізу [3] мають такий вигляд:

$$[v(x)] = \frac{h}{2}\left|[\theta_2(x)]\right| \ge 0,\ M_2(x) = -M_2^* - \frac{h}{2}T_2(x)\operatorname{sgn}[\theta_2],$$

$$T_2(x) \le 0,\quad y = 0,\quad x \in [-l, l]. \tag{1}$$

Тут $[v]$ – розкриття тріщини в серединній поверхні оболонки, $[\theta_2]$ – розрив кута повороту нормалі ($\theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial y}$); M_2^* – зовнішнє навантаження, яке у розглядуваній задачі є стале; T_2 – мембранне зусилля, M_2 – згинальний момент.

Інтегральні рівняння. Поставлену задачу розв'язуємо методом інтегральних сингулярних рівнянь. Запишемо інтегральні подання зусилля T_2 та моменту M_2 через похідні від стрибків переміщення та кута повороту нормалі [7]:

$$\begin{cases} -\pi T_2\left(l(\tau+\gamma),0\right) = \int_{-1}^{1}\left(K_{11}(t-\tau)\psi_1(t) - K_{13}(t-\tau+2\gamma)\psi_3(t)\right)dt, \\ -\pi c^2 R_2 M_2\left(l(\tau+\gamma),0\right) = \int_{-1}^{1}\left(K_{31}(t-\tau)\psi_1(t) - K_{33}(t-\tau+2\gamma)\psi_3(t)\right)dt, \end{cases} \tag{2}$$

де $\psi_1(t) = \frac{Eh}{4\chi^2 l\sqrt{a}}\sqrt{1-\mu}\,\frac{d[v]}{dt}$; $\psi_3(t) = \frac{D(1-v)(3+v-2\mu)}{4\chi^2 l\sqrt{a}}R^2c^2\,\frac{d[\theta_2]}{dt}$;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)}$; $c = \frac{\sqrt[4]{12(1-v^2)}}{\sqrt{Rh}}$; $R = \min\left(|R_1|,|R_2|\right)$, де R_1, R_2 – радіуси головних кривин серединної поверхні оболонки вздовж осі Ox та Oy; $a = \frac{2-\mu+\mu v}{2}$; $\chi^4 = \frac{E_1}{E_2}$. Тут $E = \sqrt{E_1E_2}$, E_1, E_2 – модулі Юнга; $v = \sqrt{v_1v_2}$, v_1, v_2 – коефіцієнти Пуассона; $\mu = 1 - 2\frac{G_{12}(1+v)}{E}$, де G_{12} – модуль зсуву для площин, паралельних серединній поверхні оболонки; $\gamma = d/l$, де $2d$ – відстань між центрами тріщин. Ядра $K_{ij}(x)$ для наскрізної тріщини за відсутності контакту берегів наведені в праці [7].

Щоб визначити стрибок повороту нормалі, підставимо вирази (2) у крайові умови (1), враховуючи, що $\operatorname{sgn}[\theta_2] = \operatorname{sgn} M_2^*$. Отримаємо сингулярне інтегральне рівняння:

$$\pi M_2^* = \frac{D}{4\chi^2 l\sqrt{a}}\int_{-1}^{1}\Big(\sqrt{1-\mu}\,3(1+v)\left(K_{11}(t-\tau) - K_{11}(t-\tau+2\gamma)\right) +$$

$$+2\operatorname{sgn}M_2^*\sqrt{1-\mu}\sqrt{3(1-v^2)}\left(K_{31}(t-\tau) - K_{31}(t-\tau+2\gamma)\right) +$$

$$+(1-v)(3+v-2\mu)\left(K_{33}(t-\tau) - K_{33}(t-\tau+2\gamma)\right)\Big)\frac{d[\theta_2]}{dt}dt. \tag{3}$$

На кінцях розрізу розв'язок рівняння (3) повинен задовольняти додаткові умови:

$$[\theta_2](\pm 1) = 0\,. \qquad (4)$$

Інтегральне рівняння (3) зі заданими умовами (4) розв'язано методом механічних квадратур [8, 9].

Аналіз результатів. Коефіцієнти інтенсивності моментів та напружень у вершинах тріщини обчислюють за формулами:

$$K_M^{\pm} = \pm(1-\nu)(3+\nu-2\mu)\frac{D}{4\chi^2\sqrt{a}}\lim_{t\to\pm 1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{d[\theta_2](t)}{dt};$$

$$K_T^{\pm} = \pm\frac{Eh}{4\chi^2}\sqrt{\frac{1-\mu}{a}}\lim_{t\to\pm 1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{d[v](t)}{dt}.$$

Розрахунки виконано для пластин і оболонок, виготовлених з таких матеріалів: М0 (ізотропний, $\nu = 0{,}3$); МІ (композит на епоксидній основі, армований прямолінійними графітними волокнами), для якого $E_1 = 4{,}9\cdot 10^4$ MPa; $E_2 = 0{,}6\cdot 10^4$ MPa; $G_{12} = 0{,}4\cdot 10^4$ MPa; $\nu_1 = 0{,}31$; МІІ (односпрямований волокнистий намотувальний склопластик) зі сталими $E_1 = 5{,}7\cdot 10^4$ MPa; $E_2 = 1{,}4\cdot 10^4$ MPa; $G_{12} = 0{,}575\cdot 10^4$ MPa; $\nu_1 = 0{,}277$;

Для ізотропної пластини та оболонки отримані тут результати узгоджуються з наведеними в праці [3].

Залежності безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності моментів $\tilde{K}_M = K_M / M^* l$ від взаємного розташування тріщин $\rho = 1/\gamma$ будували для фіксованих параметрів $\beta = \frac{\sqrt[4]{(12(1-\nu^2))}\,l}{\sqrt{Rh}}$, $R = \min\left(|R_1|,|R_2|\right)$. Коли $M^* > 0$, береги змикаються у внутрішній лицьовій поверхні оболонки, при $M^* < 0$ – у зовнішній.

Показано (рис. 2) залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів $\tilde{K}_M$ від відстані між розрізами в пластині ($\beta = 0$). Тут і далі суцільні лінії – результати для внутрішніх вершин розрізів, а штрихові – для зовнішніх. Найбільші коефіцієнти інтенсивності моментів у пластині з ортотропного матеріалу МІ, а найменші – у пластині з ізотропного матеріалу М0.

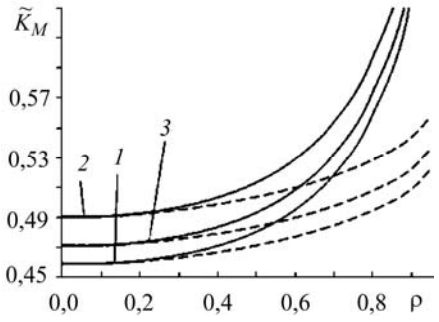

Рис. 2. Вплив зближення розрізів на коефіцієнти інтенсивності моментів $\tilde{K}_M$ в пластині: *1* – матеріал М0; *2* – МІ; *3* – МІІ.

Fig. 2. The influence of the distance between cracks on the moments intensity factors $\tilde{K}_M$ in the plate: *1* – material M0; *2* – MI; *3* – MII.

Наведені (рис. 3) залежності коефіцієнтів інтенсивності моментів від взаємного розташування розрізів у сферичній ($\lambda = 1$), циліндричній з повздовжньою орієнтацією тріщин ($\lambda = 0$) та псевдосферичній ($\lambda = -1$) оболонках при $\beta = 1$. Порівняно з аналогічними результатами [3] залежність коефіцієнтів інтенсивності від параметра взаємного розташування ρ посилюється, якщо береги змикаються у внутрішній лицьовій поверхні оболонки ($M^* > 0$) і послаблюється, якщо береги змикаються у зовнішній лицьовій поверхні. За значного зближення тріщин ($\rho \to 1$)

коефіцієнти інтенсивності на внутрішніх кінцях тріщин різко збільшуються, а на зовнішніх наближаються до коефіцієнтів інтенсивності, що відповідають одній тріщині подвійної довжини. При $\rho \to 0$ тріщини перестають впливати одна на одну і коефіцієнти інтенсивності наближаються до значень для однієї тріщини. Зі зростанням параметра χ коефіцієнти інтенсивності через взаємний вплив тріщин зі зменшенням відстані між ними знижуються швидше.

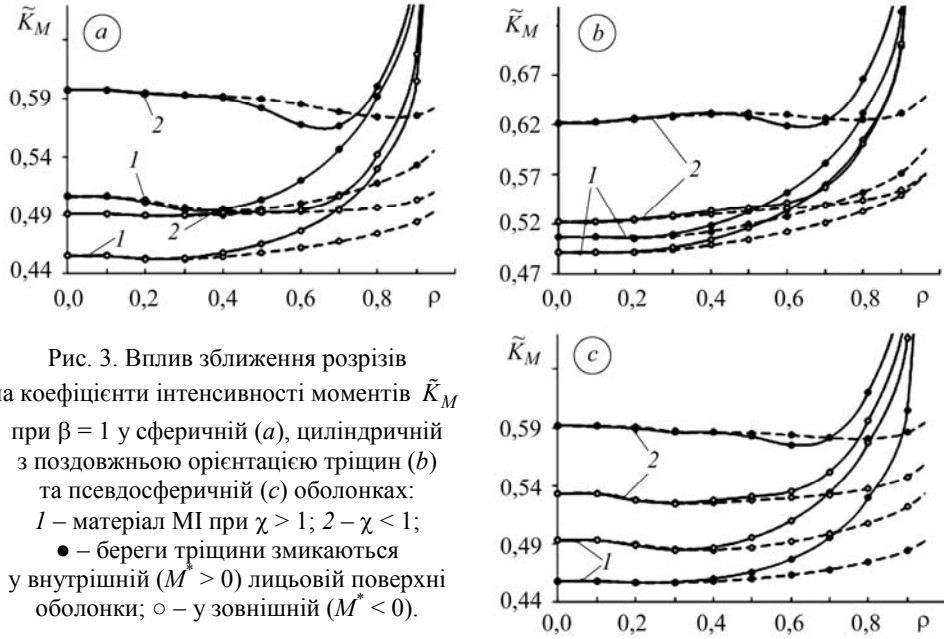

Рис. 3. Вплив зближення розрізів на коефіцієнти інтенсивності моментів $\tilde{K}_M$ при $\beta = 1$ у сферичній (*a*), циліндричній з поздовжньою орієнтацією тріщин (*b*) та псевдосферичній (*c*) оболонках: *1* – матеріал МІ при $\chi > 1$; *2* – $\chi < 1$; ● – береги тріщини змикаються у внутрішній ($M^* > 0$) лицьовій поверхні оболонки; ○ – у зовнішній ($M^* < 0$).

Fig. 3. The influence of the distance between cracks on the moments intensity factors $\tilde{K}_M$ with $\beta = 1$ in the spherical (*a*), cylindrical with longitudinal crack (*b*) and pseudo spherical (*c*) shells: *1* – material MI when $\chi > 1$; *2* – $\chi < 1$; ● – crack edges joint in the internal ($M^* > 0$) face surface of the shell; ○ – in the external ($M^* < 0$).

Зображена (рис. 4) залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів $\tilde{K}_M$ від параметра β для матеріалу МІ (графітопластика).

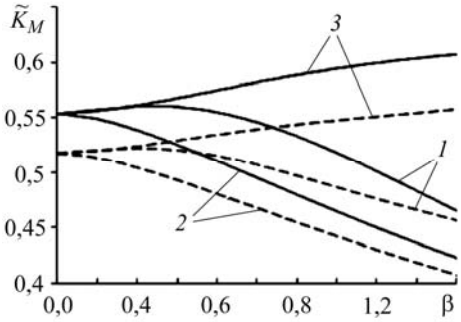

Рис. 4. Залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів $\tilde{K}_M$ від параметра β при $\rho = 0{,}3$ для матеріалу М1 при $\chi > 1$: *1* – сферична оболонка; *2* – псевдосферична; *3* – циліндрична з поздовжньою орієнтацією тріщин.

Fig. 4. Dependence of the moments intensity factors $\tilde{K}_M$ on the parameter β when $\rho = 0.3$ for material M1 when $\chi > 1$: *1* – spherical shell; *2* – pseudo spherical; *3* – cylindrical with longitudinal cracks.

Вплив ортотропії матеріалу на коефіцієнти інтенсивності моментів посилюється зі збільшенням кривини оболонки та розмірів тріщин.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена задача о контактном взаимодействии берегов коллинеарных трещин при изгибе пологой ортотропной оболочки произвольной кривизны. Задача сформулирована в двумерной постановке на основе модели контакта вдоль линии на одной из лицевых поверхностей оболочки. Решения краевых задач построены с помощью метода сингулярных интегральных уравнений и числовой процедуры метода механических квадратур. Исследовано влияние кривизны оболочки, взаимного размещения коллинеарных трещин, механических свойств материала в окрестности вершин трещин на коєффициенты интенсивности моментов.

SUMMARY. The problem of contact interaction of a shallow orthotropic shell of arbitrary curvature with two collinear cracks is considered. The problem is formulated in a two-dimensional statement by means of the contact model along a line in one of the facial surfaces of the shell. The boundary value problems solutions were constructed using the method of singular integral equations and numerical procedure of the method of mechanical quadratures. The influence of the shell curvature, mutual location of collinear cracks, mechanical properties of the material in the vicinity of the crack tip on the moments intensity factors is also investigated.

1. *Шацький І. П.* Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 2. – С. 26–29.
2. *Young M. J. and Sun T. C.* Influence of crack on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solusion // Int. J. Fract. – 1992. – **55**. – P. 81–91.
3. *Шацький І. П., Маковійчук М. В.* Рівновага сферичної пологої оболонки з урахуванням закриття колінеарних тріщин за згину // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 189–195.
4. *Опанасович В. К., Новосад В. П., Сільвестров Р. Г.* Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізотропної пластини // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Зб. наук. праць / За заг. ред. О. Є. Андрейківа, Й. Й. Лучка, В. В. Божидарника. – Львів: Каменяр, 2002. – **5**. – С. 148–153.
5. *Determination* of stress intensity factors for a cracked shell under bending with improved shell theories / R. Liu, T. Zhang, X. J. Wu, C. H. Wang // J. of Aerospace Engng. – 2006. – **19**. – P. 21–28.
6. *Довбня К. М., Григорчук Ю. В.* Напружений стан оболонки двоякої кривини з тріщиною при згинальному навантаженні // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 112–116.
7. *Механика* композитов: в 12-ти т. / Под. общей ред. А. Н. Гузя. – Т. 7: Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – К.: А.С.К., 1998. – 387 с.
8. *Корнейчук А. А.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – М.: Наука, 1964. – С. 64–74.
9. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.

Одержано 27.06.2013