

УДК 539.3

## ЛОКАЛЬНЕ ПРОКОВЗУВАННЯ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ ГАЗУ В МІЖКОНТАКТНОМУ ЗАЗОРІ

Б. С. СЛОБОДЯН<sup>1</sup>, Н. І. МАЛАНЧУК<sup>1</sup>, Р. М. МАРТИНЯК<sup>1</sup>,  
Б. А. ЛЯШЕНКО<sup>2</sup>, В. Є. МАРЧУК<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України, Київ;

<sup>3</sup> Національний авіаційний університет, Київ

Досліджено контакт двох пружних тіл з однакових матеріалів, одне з яких має пологу виїмку, з урахуванням тиску газу в міжконтактному зазорі та локального фрикційного проковзування поверхонь в околі його кінців. Задачу зведено до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно функції висоти міжконтактного зазору та зсуву поверхонь на зазорі і ділянках проковзування, одне з яких розв'язано аналітично, а інше – числово. Проаналізовано залежності довжини ділянок проковзування, контактних напружень та відносного зсуву поверхонь від прикладених навантажень.

**Ключові слова:** контактна взаємодія, проковзування, виїмка, зазор, тиск газу, сингулярне інтегральне рівняння, контактні напруження.

Контактні задачі теорії пружності з урахуванням зчеплення і часткового проковзування складні, оскільки заздалегідь невідомі і розміри області контакту, і ділянки проковзування. Практичний інтерес до таких задач пов'язаний з потребою прогнозування впливу сил тертя, що виникають на ділянках проковзування, на контактну міцність і втому спряжених тіл.

На сьогодні значних успіхів досягнуто в дослідженні часткового проковзування тіл з неузгодженими поверхнями, яким властивий локальний контакт, коли ділянка контакту поверхонь тіл мала проти їх розмірів [1–9]. Розробляють підходи до розв'язування аналогічних задач для тіл з узгодженими поверхнями [10–15], на яких відсутній локальний контакт в околі малих геометричних неоднорідностей (виїмок, впадин тощо). Тут припускали відсутність будь-якого середовища між поверхнями тіл. Водночас показано [16–20], що тиск рідини або газу в міжконтактних зазорах може істотно впливати на контактну поведінку тіл з узгодженими поверхнями навіть за безфрикційної їх взаємодії. Тому необхідно вивчати взаємодію тіл зі зчепленням і проковзуванням, враховуючи дію заповнювача міжповерхневих зазорів та його тиск.

**Формулювання задачі.** Розглянемо контакт двох пружних ізотропних півпросторів, матеріали яких ідентичні, тобто мають однакові модулі зсуву ( $G_1 = G_2 = G$ ) і коефіцієнти Пуассона ( $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ). Межа верхнього тіла плоска, а нижнього вздовж нескінченної смуги шириною  $2b$  має пологу виїмку, форму якої описує гладка функція

$$r(x) = -r_0(1 - x^2/b^2)^{3/2}, \quad |x| \leq b, \quad (1)$$

де  $r_0$  – максимальна глибина виїмки,  $r_0/b \ll 1$ .

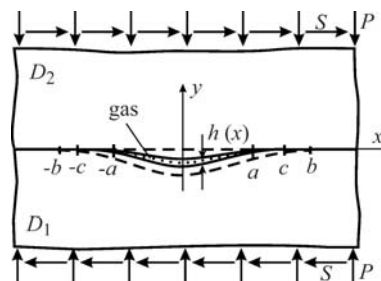


Рис. 1. Схема контакту.

Fig. 1. Scheme of interaction.

Вважаємо, що тіла контактують в умовах плоскої деформації. Тому досліджуватимемо взаємодію двох півплощин  $D_1$  і  $D_2$  (рис. 1), утворених внаслідок перетину півпросторів площиною  $Oxy$ , перпендикулярною до твірної виїмки.

Спершу тіла притискаються одне до одного рівномірно розподіленими на нескінченності нормальними зусиллями інтенсивності  $P$ . Внаслідок початкової нерівності поверхні одного з тіл між ними утвориться зазор висотою  $h(x)$  та шириною  $2a$  ( $a < b$ ). Вважаємо, що зазор заповнений ідеальним газом. Навантаження змінюються квазістатично, внаслідок чого в газі не виникають дотичні напруження, а його тиск  $P_1$ , згідно зі законом Паскаля, однаковий у всіх точках його об'єму. Тому на берегах зазору діє лише рівномірний тиск  $P_1$ , а дотичні напруження відсутні. Під час навантаження тиск  $P_1$  змінюється, а його зв'язок з об'ємом газу описує рівняння стану ідеального газу Клапейрона–Менделєєва:

$$P_1 V_1 \equiv P_1 \int_{-a}^a h(x) dx = \frac{m_1}{\mu_1} RT, \quad (2)$$

де  $V_1$  і  $m_1$  – об'єм та маса газу, що припадають на одиницю довжини зазору в його поздовжньому напрямі;  $\mu_1$  – молярна маса газу;  $T$  – його температура;  $R$  – універсальна газова стала.

Далі до тіл на нескінченності прикладають монотонно зростальні зсувні зусилля інтенсивності  $S$  (рис. 1), що зумовлюють фрикційне проковзування поверхонь тіл на ділянках  $(-c, -a)$  та  $(a, c)$ , які примикають до кінців зазору. На цих ділянках виникають дотичні напруження, які згідно з законом Кулона рівні контактному тиску, помноженому на коефіцієнт тертя  $f$ .

Контактно-крайові умови задачі такі:

$$\begin{aligned} \sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \\ u^-(x, 0) - u^+(x, 0) = 0, \quad v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = \begin{cases} -r(x), & c \leq |x| \leq b, \\ 0, & |x| > b \end{cases} \end{aligned}$$

на ділянках зчеплення тіл ( $y = 0, |x| \geq c$ );

$$\begin{aligned} \sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \\ \tau_{xy}^-(x, 0) = f \left| \sigma_y^-(x, 0) \right|, \quad v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = -r(x) \end{aligned}$$

на ділянках проковзування ( $y = 0, a \leq |x| \leq c$ );

$$\sigma_y^-(x, 0) = -P_1, \quad \sigma_y^+(x, 0) = -P_1, \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}^+(x, 0) = 0$$

на поверхні зазору ( $y = 0, |x| \leq a$ );

$$\sigma_y = -P, \quad \tau_{xy} = S, \quad \sigma_x = 0$$

на нескінченності. Тут і надалі  $\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $u, v$  – компоненти вектора переміщень; знаки “–” і “+” вказують на граничні значення функцій на межі півплощин  $D_1$  і  $D_2$ . Зазначимо, що тиск газу, ширина зазору та ділянок проковзування заздалегідь невідомі та змінюються під навантаженням.

**Розв'язання задачі.** Використовуючи викладену раніше [11] методику, напруження та переміщення в тілах подамо через функцію висоти міжконтактного зазору  $h(x)$  і відносного зсуву поверхонь тіл  $U(x) = u^-(x, 0) - u^+(x, 0)$ , що виникає на ділянках проковзування і зазору. Для визначення похідних від цих функцій отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з ядром Коші:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} = \frac{3r_0}{b} \left( \frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{(1+\kappa)}{2G} (P - P_1), \quad |x| \leq a, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{U'(t)dt}{t-x} = \frac{1+\kappa}{2G} S + \begin{cases} 0, & |x| \leq a; \\ f \left( \frac{3r_0}{b} \left( \frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1+\kappa}{2G} P + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t)dt}{t-x} \right), & a \leq |x| \leq c. \end{cases} \quad (4)$$

Функції  $h(x)$  та  $U(x)$  задовольняють умови

$$h(\pm a) = 0, \quad h'(\pm a) = 0, \quad (5)$$

$$U(\pm c) = 0, \quad U'(\pm c) = 0, \quad (6)$$

перші з яких випливають з неперервності переміщень на межі тіл, а виконання других забезпечує обмеженість напружень на кінцях зазору і ділянок проковзування. Визначивши згідно з другою умовою (5) обмежений розв'язок СІР (3) та проінтегрувавши його з урахуванням першої умови, знайдемо висоту міжконтактного зазору:

$$h(x) = r_0 \left( \frac{a}{b} \right)^3 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{3/2}, \quad |x| \leq a. \quad (7)$$

Використовуючи рівняння Клапейрона–Менделєєва (2) та умови існування обмеженого розв'язку СІР (3), знайдемо тиск газу  $P_1$  і півширину зазору  $a$ :

$$P_1 = P - \frac{3Gr_0}{(1+\kappa)b} \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right), \quad (8)$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{\beta_2}{2} - \frac{\beta_1^3}{27} + \sqrt{\frac{\beta_2^2}{4} - \frac{\beta_1^3\beta_2}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{\beta_2}{2} - \frac{\beta_1^3}{27} - \sqrt{\frac{\beta_2^2}{4} - \frac{\beta_1^3\beta_2}{27}}} - \frac{\beta_1}{3},$$

$$\text{де} \quad \beta_1 = \frac{(1+\kappa)b^3P}{3r_0G} - b^2, \quad \beta_2 = \frac{8(1+\kappa)b^6m_1RT}{9r_0^2\pi\mu_1G}.$$

Підставивши функцію  $h(x)$  (7) у праву частину СІР (4), одержимо:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{U'(t)dt}{t-x} = \frac{1+\kappa}{2G} S + L(x), \quad |x| \leq c, \quad (9)$$

$$\text{де} \quad L(x) \equiv \begin{cases} 0, & |x| \leq a; \\ F(x), & a \leq |x| \leq c; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} -f \left( \frac{1+\kappa}{2G} P_1 + \frac{3r_0}{b} \frac{|x|}{|b|} \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}} \right), & c \leq b; \\ f \left( \frac{3r_0}{b} \frac{|x|}{|b|} \left( \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - 1} - \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}} \right) - \frac{1+\kappa}{2G} P_1 \right), & c > b. \end{cases}$$

Розв'язок СІР (9) шукатимемо у вигляді ряду за поліномами Чебишева другого роду  $U_{2m-2}(x/c)$ :

$$U(x) = -c \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2}} \sum_{m=1}^N \frac{d_m}{2m-1} U_{2m-2}(x/c). \quad (10)$$

Коефіцієнти  $d_m$  та координату  $c$  кінця ділянки проковзування визначаємо числово за відомою схемою [11]. Підставивши функції (7) та (10) у формули з праці [11], що виражають напруження в тілах через висоту міжконтактного зазору та відносний зсув поверхонь тіл, знаходимо контактні нормальні і дотичні напруження:

$$\sigma_{xy}^-(x,0) = -P_1, \quad |x| \leq a, \quad \sigma_y^-(x,0) = -\frac{6r_0G}{(1+\kappa)b} \left| \frac{x}{b} \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}} - P_1, \quad a \leq |x| \leq b, \quad (11)$$

$$\sigma_y^-(x,0) = \frac{6r_0G}{(1+\kappa)b} \left| \frac{x}{b} \left( \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - 1} - \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}} \right) - P_1, \quad |x| \geq b.$$

$$\tau_{xy}^-(x,0) = 0, \quad |x| \leq a, \quad \tau_{xy}^-(x,0) = -\frac{2G}{(1+\kappa)} \sum_{m=1}^N d_m U_{2m-2}(x/c) + S, \quad a \leq |x| \leq c, \quad (12)$$

$$\tau_{xy}^-(x,0) = \frac{2G}{(1+\kappa)} (x^2/c^2 - 1)^{-1/2} \sum_{m=1}^N d_m e^{(2m-1) \ln(|x/c| - \sqrt{x^2/c^2 - 1})} + S, \quad |x| \geq c.$$

Локальне проковзування тіл за відсутності газу в міжконтактному зазорі вивчено раніше [11]. Вважаючи, що маса і тиск газу рівні нулю ( $m_1 = 0, P_1 = 0$ ), з виразів (7)–(11) отримаємо всі відповідні співвідношення і рівняння праці [11] для визначення висоти і довжини зазору, відносного зсуву поверхонь, довжини ділянки проковзування і контактних напружень, коли зазор незаповнений.

**Числові результати.** Базуючись на отриманому розв'язку, проаналізуємо поведінку контактної пари для безрозмірних параметрів  $\bar{x} = x/b, \bar{a} = a/b, \bar{c} = c/b, \bar{r}_0 = r_0/b, \bar{U} = U/b, \bar{\sigma}_y = \sigma_y/G, \bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}/G, \bar{P} = P/G, \bar{S} = S/G, \bar{m} = \frac{RTm_1}{\mu_1 b^2 G}$ ,

якщо  $f = 0,1, \bar{r}_0 = 10^{-3}, \bar{m} = 10^{-6}$ .

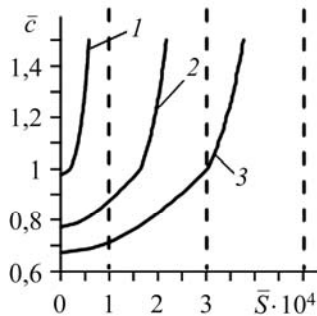


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Залежність півдовжини ділянки проковзування  $\bar{c}$  від зсувних зусиль  $\bar{S}$  для різних нормальних зусиль  $\bar{P}$ : 1 –  $\bar{P} = 0,001$ ; 2 –  $0,003$ ; 3 –  $0,005$ .

Fig. 2. Half-length of the slip zone  $\bar{c}$  versus the external shear  $\bar{S}$  for different normal forces  $\bar{P}$ : 1 –  $\bar{P} = 0.001$ ; 2 –  $0.003$ ; 3 –  $0.005$ .

Рис. 3. Залежність розподілу дотичних контактних напружень  $\bar{\tau}_{xy}$  від зсувних зусиль  $\bar{S}$  для нормальних зусиль  $\bar{P} = 0,005$ .

Fig. 3. Dependence of the tangential contact stress  $\bar{\tau}_{xy}$  on shear forces  $\bar{S}$  for normal forces  $\bar{P} = 0.005$ .

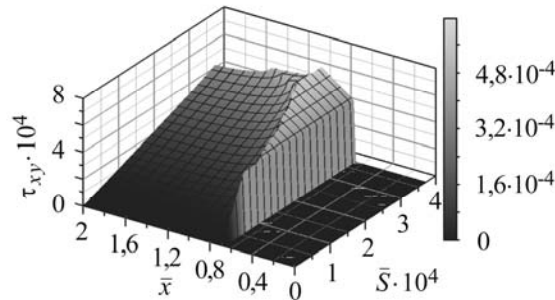


Рис. 3. Fig. 3.

Криві залежності півдовжини ділянки проковзування  $\bar{c}$  від зсувних зусиль  $\bar{S}$  мають нелінійний характер (рис. 2). Що менші нормальні зусилля  $\bar{P}$ , то швидше зростає довжина ділянки проковзування  $\bar{c}$  зі збільшенням зсувних зусиль  $\bar{S}$ . Зауважимо, що ділянка проковзування може виходити за межі виїмки, на відміну від ситуації, коли зазор незаповнений [11] і локальне проковзування може розви-

ватися лише в межах виїмки. Якщо ділянка проковзування поширюється за межі виїмки ( $\bar{c} > 1$ ), то швидкість її росту зі збільшенням зсувних зусиль більша, ніж за розвитку проковзування в межах виїмки ( $\bar{a} < \bar{c} < 1$ ). За переходу цієї ділянки через край виїмки ( $\bar{c} = 1$ ) на залежності  $\bar{c} - \bar{S}$  з'являється злам. Коли  $\bar{S} \rightarrow f\bar{P}$ , тобто зсувні зусилля прямують до нормальних, помножених на коефіцієнт тертя (вертикальні штрихові лінії на рис. 2), то довжина ділянки проковзування асимптотично прямує до нескінченності, що означає перехід від локального проковзування до глобального фрикційного ковзання одного тіла по іншому, якщо  $\bar{S} = f\bar{P}$ .

На зазорі контактні дотичні напруження  $\bar{\tau}_{xy}$  рівні нулю (рис. 3). Поза ним зі збільшенням зсувних зусиль  $\bar{S}$  дотичні напруження зростають, досягаючи максимального значення або на краю ділянки проковзування, коли вона знаходиться в межах виїмки ( $\bar{c} < \bar{b}$ ), або на краю виїмки, коли ділянка проковзування поширюється поза її межі ( $\bar{c} \geq \bar{b}$ ). Тут на відміну від випадку, коли зазор незаповнений [11], дотичні контактні напруження на краях зазору ненульові, а рівні тиску газу, помноженому на коефіцієнт тертя ( $\bar{\tau}_{xy}(\pm a, 0) = f\bar{P}_1$ ).

У межах зазору абсолютне значення відносного зсуву поверхонь  $|\bar{U}|$  більше, ніж на ділянці проковзування (рис. 4), а в центрі зазору – максимальне. З віддаленням від краю зазору відносний зсув  $|\bar{U}|$  монотонно спадає і на краю ділянки проковзування стає рівним нулю.

#### ВИСНОВКИ

Вивчено контакт двох пружних півпросторів, один з яких має пологу тунельну поверхневу виїмку, з урахуванням локального фрикційного проковзування та тиску газу, що заповнює міжконтактний зазор. Тіла піддані послідовній дії нормальних та зсувних зусиль на безмежності. Задачу зведено до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь відносно функції висоти зазору та зсуву поверхонь. Для знаходження невідомих тиску газу, довжин зазору та ділянок проковзування використано рівняння Клапейрона–Менделєєва, умови обмеженості нормальних контактних напружень на краях зазору та дотичних контактних напружень на краях ділянки проковзування. На основі аналітико-числового розв'язку задачі проаналізовано контактні параметри системи. Виявлено, що локальне проковзування тіл може розвиватися як у межах виїмки, так і поза нею. Абсолютний відносний зсув максимальний в центрі виїмки, дотичні контактні напруження – на краю ділянки проковзування, якщо вона знаходиться в межах виїмки, або на її краю, якщо проковзування поширюється за межі виїмки.

**РЕЗЮМЕ.** Исследован контакт двух упругих тел из одинаковых материалов, одно из которых имеет поверхностную выемку, с учетом давления газа в межконтактном зазоре и локального фрикционного проскальзывания поверхностей в окрестности его концов. Задача сведена к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно функции высоты межконтактного зазора и сдвига поверхностей на зазоре и участках проскальзывания. Решение первого уравнения найдено аналитически, а второе решено численно. Проанализированы зависимости длины зазора, участка проскальзывания и контактных напряжений от приложенной нагрузки.

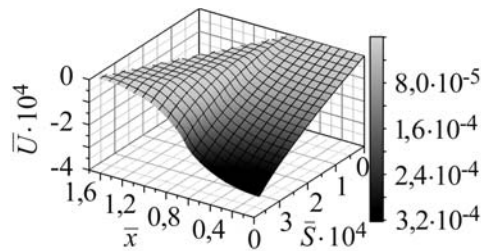


Рис. 4. Залежність відносного зсуву меж тіл  $\bar{U}$  від зсувних зусиль  $\bar{S}$  для нормальних зусиль  $\bar{P} = 0,005$ .

Fig. 4. Dependence of the relative tangential shift of bodies boundaries  $\bar{U}$  on the shear forces  $\bar{S}$  for normal forces  $\bar{P} = 0.005$ .

**SUMMARY.** The friction contact interaction between two solids made of the same isotropic materials, one of which possesses a surface shallow groove, with account of the presence of gas in intercontact gap, under sequential application of a normal and shear load is investigated. Local slip of boundaries is caused by shear forces. The contact problem is reduced to the system of Cauchy-type singular integral equations for the intercontact gap height and relative shift of the boundaries at the slip zone, first of them is solved analytically, the second one – numerically. The dependences of the gap length slip zone size and contact stresses on the applied loading are analyzed.

**Робота виконана в межах гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених на 2012 рік (договір № Ф36/413-2012 ГП384) та гранту 23-08-12 Національної академії наук України.**

1. Hills D. A., Nowell D., and Sackfield A. Mechanics of Elastic Contact. – Oxford: Butterworth–Heinemann, 1993. – 506 p.
2. Jager J. Half-planes without coupling under contact loading // Arch. Appl. Mech. – 1997. – **67**. – P. 247–259.
3. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I – Theory, II – Examples // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**. – P. 2349–2378.
4. Pauk V. Plane contact of hot flat-ended punch and thermoelastic half-space involving finite friction // J. App. Mech. – 2007. – **74**. – P. 1172–1177.
5. Urriolagoitia Sosa G. and Hills D. A. Origins of partial slip in fretting – a review of known and potential solutions // J. Strain Anal. Eng. Design. – 1999. – **34**. – P. 175–181.
6. Goryacheva I. G., Murthy H., and Farris T. N. Contact problem with partial slip for the inclined punch with rounded edges // Int. J. Fatigue. – 2002. – **24**. – P. 1191–1201.
7. Острик В. И. Улитко В. И. Метод Винера–Хопфа в контактних задачах теорії упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Роль історії нагруження в механіці контактного взаємодія при учете сил трення в зоні контакту // Механіка твердого тіла. – 2002. – № 4. – С. 16–25.
9. Джонсон К. Механіка контактного взаємодія: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
10. Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. С. Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 1. Повний контакт // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 2. – С. 39–44.
11. Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. С. Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 2. Неповний контакт // Там же. – 2006. – **42**, № 4. – С. 114–120.
12. Маланчук Н. І. Локальне проковзування тіл, зумовлене неоднорідним коефіцієнтом тертя // Там же. – 2010. – **46**, № 4. – С. 98–105.
13. Malanchuk N., Martynyak R., and Monastyrskyy B. Thermally induced local slip of contacting solids in vicinity of surface groove // Int. J Solids Struct. – 2011. – **48**. – P. 1791–1797.
14. Malanchuk N. I. and Martynyak R. M. Contact interaction of two solids with surface groove under proportional loading // Ibid. – 2012. – **49**. – P. 3422–3431.
15. Горячева И. Г., Маланчук Н. И., Мартыняк Р. М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // Прикл. математика и механика. – 2012. – **76**. – С. 695–709.
16. Мартиняк Р. М. Контакт півпростору з нерівною основою при заповненому ідеальним газом міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 144–149.
17. Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Мачишин И. М. Влияние газожидкостного заполнителя межконтактного пространства на напряженное состояние сопряженных тел // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 3. – С. 52–60.
18. Monastyrskyy B. and Kaczyński A. The elasticity problem for a stratified semi-infinite medium containing a penny-shaped crack filled with a gas // Acta Mech. et Automatica. – 2007. – **1**, № 1. – P. 63–66.
19. Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Просторова контактна задача для пружних півпросторів, зазор між якими заповнений газом // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2008. – **6**. – С. 183–186.
20. Мартиняк Р. М., Слободян Б. С. Контакт пружних півпросторів за наявності між ними еліптичного зазору з рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 1. – С. 62–66.

Одержано 16.03.2013