

УДК 536.12:621.891:539.3

## МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМУ ГАЛЬМІВНОЇ СИСТЕМИ З УРАХУВАННЯМ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ МАТЕРІАЛІВ

О. ЄВТУШЕНКО, М. КУЦЕЙ, Е. ОХ

*Білостоцька політехніка, Польща*

Отримано числово-аналітичний розв'язок теплової задачі тертя для двох напівобмежених тіл з урахуванням термічної чутливості матеріалів та зміни з часом швидкості відносного ковзання (гальмування зі сталим сповільненням). Лінеаризацію відповідної крайової задачі теплопровідності виконано за допомогою підстановки Кірхгофа та методу лінеаризувальних параметрів. Досліджено зміну температури робочих поверхонь накладки та диска під час гальмування для двох фрикційних пар із та без урахування залежності їхніх теплофізичних властивостей від температури.

**Ключові слова:** гальмування, фрикційне нагрівання, термочутливість, температура.

Експериментальні дослідження з використанням методу термопар показали, що під час короткотривалого одноразового гальмування (для чисел Фур'є менших десяти) вплив конвективного охолодження вільних поверхонь накладки та диска на температуру незначний [1, 2]. Також встановлено, що для високошвидкісних гальмівних процесів (з числами Пекле, більшими за  $10^4$  у початковий момент часу  $t = 0$ ), зміною градієнта температури на поверхні контакту можна нехтувати [3, 4]. На підставі цих результатів для визначення максимальної температури гальмівних систем типу накладка–диск використовують розв'язки лінійних (зі сталими теплофізичними властивостями) та нелінійних (із залежним від температури коефіцієнтом тертя) одновимірних теплових задач тертя для двох півпросторів [5–7], півпростору та плоскопаралельного шару [8, 9], двох [10] або трьох [11, 12] плоскопаралельних шарів.

Одним із чинників, що можуть впливати на розподіл температури в елементах фрикційної пари є термічна чутливість їхніх матеріалів [13]. Відомі числово-аналітичні методи розв'язування крайових задач теплопровідності із урахуванням залежності теплофізичних властивостей від температури [14, 15]. Досліджено еволюцію та просторовий розподіл нестационарного температурного поля, зумовленого тертям під час ковзання зі сталою швидкістю двох напівобмежених термочувливих тіл [16]. Мета роботи – вивчити вплив швидкості ковзання, що змінюється з часом (гальмування зі сталим сповільненням) на нагрівання термочувливої трибосистеми.

**Формулювання задачі.** Загальна інтенсивність теплових потоків, спрямованих по нормалі від поверхні тертя всередину накладки та диска, під час гальмування дорівнює питомій потужності тертя [17]:

$$q(t) = q_0 q^*(t), \quad q_0 = fVp, \quad q^*(t) = 1 - t/t_s, \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad (1)$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя;  $p$  – контактний тиск;  $V$  – початкова швидкість;  $t$  – час;  $t_s$  – тривалість гальмування. В результаті фрикційного нагрівання теплофізичні властивості співдотичних тіл можуть змінюватись. Вважаємо, що коефіцієнти тепло-

провідності  $K_l$  та питомої теплоємності  $c_l$  матеріалів накладки та диска лінійно залежать від температури  $T$ :

$$K_l(T) = K_{l,0} K_l^*(T), \quad c_l(T) = c_{l,0} c_l^*(T), \quad K_{l,0} \equiv K_l(T_0), \quad c_{l,0} \equiv c_l(T_0), \quad (2)$$

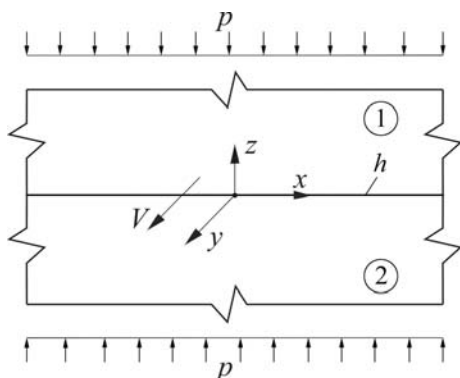


Рис. 1. Схема задачі.

Fig. 1. Scheme of the problem.

причому  $K_l^*(T) \approx c_l^*(T)$ ,  $l=1,2$ , а  $T_0$  – початкова температура трибоз’єднання. Такі матеріали належать до класу матеріалів з простою нелінійністю – їхні коефіцієнти температуропровідності  $k_l$ ,  $l=1,2$  є сталими [18]. Для багатьох конструкційних матеріалів залежність коефіцієнта теплопровідності від температури є лінійною [19–21], а тому приймаємо, що  $K_l^*(T) = 1 + \lambda_l(T - T_0)$ . Тут і надалі усі величини та параметри, що відносяться до накладки (верхній півпростір) та диска (нижній півпростір), позначено нижніми індексами 1 та 2, відповідно (рис. 1).

Врахувавши залежності (1) і (2), розподіл нестационарного температурного поля  $T(z, t)$  в накладці та диску знайдемо із розв’язку такої теплової задачі тертя для двох напівобмежених тіл:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ K_1^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \right] = \frac{K_1^*(T^*)}{k^*} \frac{\partial T^*}{\partial \tau}, \quad \zeta > 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ K_2^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \right] = K_2^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \tau}, \quad \zeta < 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (4)$$

$$K_2^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^-} - K_0^* K_1^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^+} = q^*(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (5)$$

$$K_2^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^-} + K_0^* K_1^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^+} = \text{Bi}[T^*(0^+, \tau) - T^*(0^-, \tau)], \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (6)$$

$$T^*(\zeta, \tau) \rightarrow T_0^*, \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (7)$$

$$T^*(\zeta, 0) = T_0^*, \quad |\zeta| < \infty, \quad (8)$$

де

$$T^* = T/T_a, \quad T_0^* = T_0/T_a, \quad T_a = q_0 a / K_{2,0}, \quad \zeta = z/a, \quad \tau = k_2 t / a^2, \quad \tau_s = k_2 t_s / a^2, \quad (9)$$

$$K_0^* = K_{1,0} / K_{2,0}, \quad k^* = k_1 / k_2, \quad \text{Bi} = h a / K_{2,0},$$

$$K_l^*(T^*) = 1 + \Lambda_l (T^* - T_0^*), \quad \Lambda_l = \lambda_l T_a, \quad l=1,2, \quad (10)$$

$a = 1,73 \sqrt{k_2 t_s}$  – ефективна глибина прогрівання нижнього півпростору [22];  $h$  – контактна теплопровідність [23].

**Розв’язування задачі.** Скориставшись підстановкою Кірхгофа [24]

$$\Theta_l(\zeta, \tau) = \int_{T_0^*}^{T^*} K_l^*(T) dT, \quad l=1,2, \quad (11)$$

нелінійну крайову задачу теплопровідності (3)–(8) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k^*} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau}, \quad \zeta > 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau}, \quad \zeta < 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} - K_0^* \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = q^*(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} + K_0^* \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \text{Bi}[T^*(0^+, \tau) - T^*(0^-, \tau)], \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (15)$$

$$\Theta_l(\zeta, \tau) \rightarrow 0, \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad l=1,2, \quad (16)$$

$$\Theta_l(\zeta, 0) = 0, \quad |\zeta| < \infty, \quad l=1,2. \quad (17)$$

Підставивши залежності (2), (10) під знак інтеграла у співвідношенні (11), знаходимо:

$$T^*(\zeta, \tau) = \Lambda_l^{-1} [\sqrt{1 + 2\Lambda_l \Theta_l(\zeta, \tau)} - 1] + T_0^*, \quad l=1,2, \quad (18)$$

де для  $\Lambda_l < 0$  додатково повинна виконуватись нерівність  $\Theta_l(\zeta, \tau) > -0,5\Lambda_l^{-1}$ . Нехай для  $\zeta = 0$ :

$$\sqrt{1 + 2\Lambda_l \Theta_l(0, \tau)} = 1 + \kappa_l \Lambda_l \Theta_l(0, \tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad l=1,2, \quad (19)$$

де  $\kappa_l, l=1,2$  – невідомі лінеаризувальні параметри [15]. Тоді з рівняння (19) знаходимо:

$$\Theta_l(0, \tau) = -\kappa_l^{-1} \chi_l, \quad \chi_l = 2(\kappa_l - 1)/(\kappa_l \Lambda_l), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad l=1,2. \quad (20)$$

Ураховуючи залежності (19) та (20), зведемо крайову умову (15) до вигляду

$$\left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} + K_0^* \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \text{Bi}(\chi_2 - \chi_1), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (21)$$

Розв'язок крайової задачі (12)–(14), (16), (17), (21), із урахуванням вигляду (1) функції  $q^*(\tau)$ , подамо так:

$$\Theta_l(\zeta, \tau) = \Theta_l^{(0)}(\zeta, \tau) - \tau_s^{-1} \Theta_l^{(1)}(\zeta, \tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad l=1,2, \quad (22)$$

де, згідно з формулою Дюамеля [18],

$$\Theta_l^{(1)}(\zeta, \tau) = \int_0^\tau s \frac{\partial}{\partial \tau} \Theta_l^{(0)}(\zeta, \tau - s) ds, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad l=1,2, \quad (23)$$

$\Theta_l^{(0)}(\zeta, \tau)$  – розв'язок цієї задачі для сталої ( $q^*(\tau) = 1$ ) потужності тертя [16]:

$$\Theta_l^{(0)}(\zeta, \tau) = A_l \sqrt{\tau} \text{ierfc}(0,5\zeta_l / \sqrt{\tau}), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad l=1,2, \quad (24)$$

$$A_1 = [1 + \text{Bi}(\chi_1 - \chi_2)]/\varepsilon, \quad A_2 = 1 + \text{Bi}(\chi_2 - \chi_1), \quad \zeta_1 = \zeta / \sqrt{k^*}, \quad \zeta_2 = -\zeta,$$

$\varepsilon = K_0^* / \sqrt{k^*}$ ,  $\text{ierfc}(x) = \pi^{-1/2} \exp(-x^2) - x \text{erfc}(x)$ ,  $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$ ,  $\text{erf}(x)$  – функція помилок Гаусса [25]. На поверхні тертя з формул (24) випливає, що

$$\Theta_l^{(0)}(0, \tau) = A_l \sqrt{\tau/\pi}, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad l = 1, 2. \quad (25)$$

Підставивши у формулу (23) функції  $\Theta_l^{(0)}(\zeta, \tau)$ ,  $l = 1, 2$  (24), після інтегрування отримуємо:

$$\begin{aligned} \Theta_l^{(1)}(\zeta, \tau) = A_l \tau \sqrt{\tau} \{ [ (1 + \zeta_l^2 / (6\tau)) \text{ierfc}(0, 5\zeta_l / \sqrt{\tau}) - \\ - \exp(-0, 25\zeta_l^2 / \tau) / (3\sqrt{\pi}) \}, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (26)$$

Поклавши тут  $\zeta = 0$ , одержимо:

$$\Theta_l^{(1)}(0, \tau) = (2/3) A_l \tau \sqrt{\tau/\pi}, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad l = 1, 2. \quad (27)$$

Підставивши розв'язки (25) та (27) у формулу (22), знаходимо:

$$\Theta_l(0, \tau) = A_l \varphi(\tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad l = 1, 2, \quad (28)$$

де  $\varphi(\tau) = [1 - 2\tau/(3\tau_s)] \sqrt{\tau/\pi}$  – функція Фазекаша [26].

Приврівнявши співвідношення (20) та (28), отримуємо систему двох нелінійних алгебричних рівнянь відносно лінеаризувальних параметрів  $\kappa_l$ ,  $l = 1, 2$ :

$$F_l(\kappa_1, \kappa_2) = 0, \quad l = 1, 2, \quad (29)$$

де

$$\begin{aligned} F_1(\kappa_1, \kappa_2) = \varepsilon(1 - \kappa_1)\kappa_2\Lambda_2 - \kappa_1 \{ 0, 5\kappa_1\kappa_2\Lambda_1\Lambda_2 + \\ + \text{Vi}[\kappa_1(1 - \kappa_2)\Lambda_1 - \kappa_2(1 - \kappa_1)\Lambda_2] \} \varphi(\tau), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} F_2(\kappa_1, \kappa_2) = \kappa_1(1 - \kappa_2)\Lambda_1 - \kappa_2 \{ 0, 5\kappa_1\kappa_2\Lambda_1\Lambda_2 - \\ - \text{Vi}[\kappa_1(1 - \kappa_2)\Lambda_1 - \kappa_2(1 - \kappa_1)\Lambda_2] \} \varphi(\tau). \end{aligned} \quad (31)$$

Розв'язували систему рівнянь (29) методом Ньютона–Рафсона [27], попередньо знайшовши зі співвідношень (30) і (31) елементи матриці Якобі  $F_{l,m} \equiv \partial F_l / \partial \kappa_m$ ,  $l, m = 1, 2$ :

$$F_{1,1}(\kappa_1, \kappa_2) = -\varepsilon\kappa_2\Lambda_2 - \{ \kappa_1\kappa_2\Lambda_1\Lambda_2 + \text{Vi}[2\kappa_1(1 - \kappa_2)\Lambda_1 - (1 - 2\kappa_1)\kappa_2\Lambda_2] \} \varphi(\tau),$$

$$F_{1,2}(\kappa_1, \kappa_2) = \varepsilon(1 - \kappa_1)\Lambda_2 - \kappa_1 \{ 0, 5\kappa_1\Lambda_1\Lambda_2 - \text{Vi}[\kappa_1(\Lambda_1 - \Lambda_2) + \Lambda_2] \} \varphi(\tau),$$

$$F_{2,1}(\kappa_1, \kappa_2) = (1 - \kappa_2)\Lambda_1 - \kappa_2 \{ 0, 5\kappa_2\Lambda_1\Lambda_2 - \text{Vi}[\kappa_2(\Lambda_2 - \Lambda_1) + \Lambda_1] \} \varphi(\tau),$$

$$F_{2,2}(\kappa_1, \kappa_2) = -\kappa_1\Lambda_1 - \{ \kappa_1\kappa_2\Lambda_1\Lambda_2 + \text{Vi}[2\kappa_2(1 - \kappa_1)\Lambda_2 - \kappa_1(1 - 2\kappa_2)\Lambda_1] \} \varphi(\tau).$$

Обчислювали на кожному часовому кроці  $\tau_j = j\Delta\tau$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $\Delta\tau = \tau_s / n$  за такою ітеративною схемою:

1) задаємо початкове ( $i = 0$ ) наближення значення лінеаризувальних параметрів

$$\kappa_l = \kappa_l^{(0)} = 1, \quad l = 1, 2;$$

2) прирости  $\Delta\kappa_l^{(i)} \equiv \kappa_l - \kappa_l^{(i)}$  знаходимо за формулами:  $\Delta\kappa_l^{(i)} = W_l^{(i)} / W^{(i)}$ ,  $W^{(i)} =$

$$= F_{1,2}^{(i)} F_{2,1}^{(i)} - F_{1,1}^{(i)} F_{2,2}^{(i)}, \quad W_1^{(i)} = F_1^{(i)} F_{2,2}^{(i)} - F_2^{(i)} F_{1,2}^{(i)}, \quad W_2^{(i)} = F_2^{(i)} F_{1,1}^{(i)} - F_1^{(i)} F_{2,1}^{(i)},$$

де  $F_l^{(i)} \equiv F_l(\kappa_1^{(i)}, \kappa_2^{(i)})$ ,  $l = 1, 2$ ;

- 3) перевіряємо умову збіжності  $\sqrt{(\Delta\kappa_1^{(i)} / \kappa_1^{(i)})^2 + (\Delta\kappa_2^{(i)} / \kappa_2^{(i)})^2} \leq 10^{-6}$ ;
- 4) якщо ця умова виконується, то приймаємо, що  $\kappa_l = \kappa_l^{(i)} + \Delta\kappa_l^{(i)}$  і переходимо до наступного часового кроку та розпочинаємо обчислення з першого пункту. Якщо ж задана точність обчислень не досягається, то знаходимо наближення  $\kappa_l^{(i+1)} = \kappa_l^{(i)} + \Delta\kappa_l^{(i)}$ ,  $l=1,2$  і повторюємо обчислення, починаючи з другого пункту.

Для відомих лінеаризувальних параметрів  $\kappa_l$ ,  $l=1,2$  безрозмірну температуру  $T^*(\zeta, \tau)$  трибосистеми розраховуємо за формулою (18), в якій функції Кірхгофа  $\Theta_l(\zeta, \tau)$ ,  $l=1,2$  знаходимо зі співвідношень (22), (24), (26) і (28).

**Числовий аналіз.** Досліджували зміну впродовж однократного гальмування безрозмірної температури  $T^*$  на поверхні тертя  $\zeta = 0$  для двох фрикційних пар, в кожній з яких одним із матеріалів (накладка) був титан ВТ-14 ( $K_{2,0} = 7,83$  W/(mK),  $k_2 = 3,68 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s,  $\lambda_2 = 1,18 \cdot 10^{-3}$  °C) [13]. Гальмівний диск першої пари виготовлено із алюмінію А 315 ( $K_{1,0} = 128,65$  W/(mK),  $k_1 = 59,552 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s,  $\lambda_1 = 0,914 \cdot 10^{-3}$  °C) [20], а другої – із залізного сплаву серії ФЦД 50 ( $K_{1,0} = 27,54$  W/(mK),  $k_1 = 7,63 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s,  $\lambda_1 = -0,54 \cdot 10^{-3}$  °C) [21]. Значення інших вхідних параметрів (9) такі:  $q = 1$  MW/m<sup>2</sup>,  $t_s = 1,36$  s,  $a = 10^{-3}$  m,  $T_0 = 20$  °C,  $Bi = 5$  [22]. Суцільні криві на рис. 2 відповідають числовим результатам, отриманим із урахуванням термочутливості матеріалів, а штрихові побудовано на основі розв'язку теплової задачі тертя під час гальмування для двох півпросторів зі сталими теплофізичними властивостями [28].

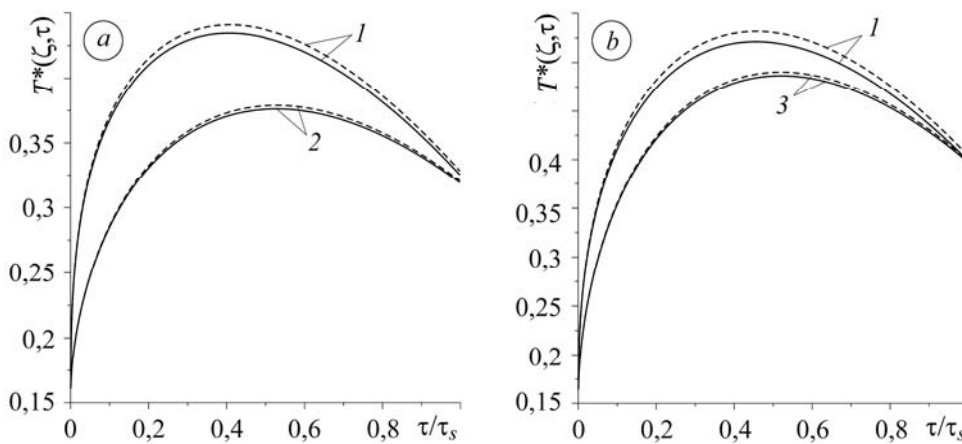


Рис. 2. Еволюція безрозмірної температури на робочих поверхнях пар титан ВТ-14–алюміній А 315 (а) і титан ВТ-14–залізний сплав ФЦД 50 (б): 1 – ВТ-14; 2 – А 315; 3 – ФЦД 50.

Fig. 2. Evolution of the dimensionless temperature on the working surface of the VT-14 titanium–A 315 aluminum (a) and VT-14 titanium–ФЦД 50 iron alloy (b) couples: 1 – VT-14; 2 – A 315; 3 – ФЦД 50.

Із початком гальмування температура швидко збільшується і досягає свого максимального значення для  $t \approx 0,4 \div 0,5 t_s$ , після чого починається охолодження співдотичних поверхонь (рис. 2). Така еволюція температури характерна для гальмівної системи накладка–диск. Температура робочої поверхні накладки під час гальмування вища, ніж поверхні тертя диска. Це зумовлено значно меншою

тепловой проводимости титану порівняно з теплопроводимістю алюмінію та залізного сплаву. Врахування термочутливості досліджуваних матеріалів спричиняє незначне зменшення температури робочих поверхонь як накладки, так і диска. Найчіткіше цей ефект виражений для фрикційного елемента з найвищою температурою – титанової накладки.

## ВИСНОВКИ

Досліджували вплив термічної чутливості матеріалів накладки та диска на температуру під час гальмування. Для цього сформульовано крайову задачу теплопроводимості для двох півпросторів з урахуванням нестационарного теплоутворення від тертя на поверхні контакту та лінійної залежності коефіцієнта теплопроводимості фрикційних елементів від температури. Числово-аналітичний розв'язок цієї задачі отримано із використанням підстановки Кірхгофа та методів лінеаризувальних параметрів та інтегрального перетворення Лапласа.

Числовий аналіз проведено для титанової накладки, що ковзає по поверхні диска, виготовленого із алюмінію А 315 або залізного сплаву ФЦД 50. Коефіцієнти теплопроводимості титану та алюмінію лінійно збільшуються зі зростанням температури, а залізного сплаву – лінійно зменшуються. Показано, що вплив термічної чутливості матеріалів обох фрикційних пар на температуру робочих поверхонь є найбільшим тоді, коли температура досягає максимального значення поблизу середини гальмівного шляху. Отже, оцінюючи температурний режим гальмівного вузла, термочутливість матеріалів слід враховувати, насамперед, для визначення максимальної температури. Натомість для розрахунку температури на початку та наприкінці гальмівного процесу можемо користуватися розв'язками відповідних лінійних теплових задач тертя.

*РЕЗЮМЕ.* Получено численно-аналитическое решение тепловой задачи трения для двух полуограниченных тел с учетом термической чувствительности материалов и изменения со временем скорости относительного скольжения (торможение с постоянным замедлением). Линеаризацию соответствующей краевой задачи теплопроводности выполнено с помощью подстановки Кирхгофа и метода линеаризирующих параметров. Исследовано изменение температуры рабочих поверхностей накладки и диска при торможении для двух фрикционных пар с и без учета зависимости их теплофизических свойств от температуры.

*SUMMARY.* The numerically-analytical solution of a thermal problem of friction for two semi-infinite bodies with account of thermal sensitivity of materials and changes with time of the relative sliding speed (braking with constant deceleration) is obtained. Linearization of the corresponding boundary-value problem of heat conduction was done by means of the Kirchhoff substituting and the method of linearizing parameters. The change of the temperature of the working surfaces of the pad and disc during braking for two friction couples with and without account of the dependence of their thermophysical properties on temperature is investigated.

*Роботу виконано в межах гранту № 2011/01/B/ST8/07446 Національного центру науки Польщі.*

1. *Analysis of automotive disc brake cooling characteristics / G. P. Voller, M. Tirovic, R. Morris, and P. Gibbens // Proc. Inst. Mech. Engng. P. D: J. of Automobile Engng. – 2003. – 217, № 8. – P. 657–666.*
2. *Adamowicz A. and Grzes P. Influence of convective cooling on a disc brake temperature distribution during repetitive braking // Appl. Ther. Engng. – 2011. – 31, № 14–15. – P. 2177–2185.*
3. *Переверзева О. В., Балакин В. А. Выбор тепловых схем и граничных условий при расчете нестационарных температурных полей в высокоскоростных и тяжело нагруженных узлах трения // Трение и износ. – 1993. – 14, № 3. – С. 487–497.*
4. *Гурский Б. Э., Чичинадзе А. В. Тепловая задача трения и ее развитие. Часть I. Модель Блока и ее совершенствование // Там же. – 2007. – 28, № 3. – С. 311–324.*

5. *Євтушенко О. О., Пир'єв О. О.* Розв'язок системи рівнянь теплової динаміки тертя під час гальмування // Доп. НАН України. – 1997. – № 10. – С. 71–77.
6. *Olesiak Z., Pyryev Yu., and Yevtushenko A.* Determination of temperature and wear during braking // *Wear*. – 1997. – **210**, № 1–2. – P. 120–126.
7. *Yevtushenko A. A., Ivanyk E. G., and Yevtushenko O. O.* Exact formulae for determination of meat temperature and wear during braking // *Heat Mass. Trans.* – 1999. – **35**, № 2. – P. 163–169.
8. *Носко А. Л., Беляков Н. С., Носко А. П.* Применение обобщенного граничного условия для решения тепловых задач трения // *Трение и износ*. – 2009. – **30**, № 6. – С. 615–625.
9. *Yevtushenko A. A., Kuciej M., and Yevtushenko O. O.* Influence of the pressure fluctuations on the temperature in pad/disc tribosystem // *Int. Comm. Heat Mass. Trans.* – 2010. – **37**, № 8. – P. 978–983.
10. *Pyryev Yu. and Yevtushenko A.* The influence of the brakes friction elements thickness on the contact temperature and wear // *Heat Mass. Trans.* – 2000. – **36**, № 4. – P. 319–323.
11. *Євтушенко О. О., Пир'єв О. О.* Розв'язок рівнянь теплової динаміки тертя для тришарової гальмівної трибосистеми // Доп. НАН України. – 2000. – № 4. – С. 51–56.
12. *Євтушенко О. О., Пир'єв О. О.* Температура та знос поверхні тертя металокерамічної накладки і металевого диска під час гальмування // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2000. – **36**, № 2. – С. 55–59.  
(*Evtushenko O. O. and Pyr'ev Yu. O.* Temperature and wear of the friction surfaces of a cermet patch and metal disk in the process of braking // *Materials Science*. – 2000. – **36**, № 2. – P. 218–223.)
13. *Чичинадзе А. В., Матвеевский Р. М., Браун Э. Д.* Материалы в триботехнике нестационарных процессов. – М.: Наука, 1986. – 248 с.
14. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 228 с.
15. *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович.* – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.
16. *Євтушенко О., Куцєй М., Ох Е.* Вплив термочутливості матеріалів на температуру під час тертя // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2014. – **50**, № 1. – С. 117–122.
17. *Kuciej M.* Analytical models of transient frictional heating. – Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, 2012. – 236 p.
18. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
19. *Gundlach R. B.* The effects of alloying elements on the elevated temperature properties of gray irons. // *Trans. American Foundrymen's Soc.* – 1983. – **91**. – P. 389–422.
20. *Overfelt R. A.* Thermophysical properties of 319 aluminum, compacted graphite iron and inconel 713 // *Ibid.* – 2001. – **109**. – P. 1–9.
21. *Thermophysical properties of automotive metallic brake disk materials / S. W. Kim, K. Park, S. H. Lee et al.* // *Int. J. Thermophys.* – 2008. – **29**, № 6. – P. 2179–2188.
22. *Расчет, испытание и подбор фрикционных пар / А. В. Чичинадзе, Э. Д. Браун, А. Г. Гинзбург, З. В. Игнатъева.* – М.: Наука, 1979. – 268 с.
23. *Грилицький Д. В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: Ін-т змісту і методів навчання Міністерства освіти України, 1996. – 204 с.
24. *Kirchhoff G. R.* Vorlesungen über die Theorie der Wärme. – Leipzig: Teubner, 1894. – 226 p.
25. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
26. *Fazekas G. A. G.* Temperature gradient and heat stresses in brakes drums // *SAE. Trans.* – 1953. – **61**, № 1. – P. 279–284.
27. *Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д.* Численные методы. Использование MATLAB (3-е изд). – М.: Изд. дом “Вильямс”, 2001. – 720 с.
28. *Євтушенко О., Куцєй М., Євтушенко Ол.* Моделювання фрикційного нагрівання під час гальмування // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2012. – **48**, № 5. – С. 27–33.  
(*Evtushenko O., Kuciej M., and Yevtushenko Ol.* Modeling of frictional heating in the process of braking // *Materials Science*. – 2013. – **48**, № 5. – P. 582–590.)

Одержано 18.12.2013