УДК.539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН БЕЗМЕЖНОГО ТІЛА З ЕЛІПТИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ДІЇ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ НА ЇЇ ПОВЕРХНЯХ

М. М. СТАДНИК

Національний лісотехнічний університет України, Львів

Отримано аналітичний розв'язок сингулярного інтегро-диференціального рівняння термопружної задачі для тривимірного тіла з еліптичною тріщиною. На поверхнях тріщини діють сталі теплові потоки протилежного напрямку. Одержано формулу для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень K_I на краю тріщини.

Ключові слова: *сингулярне інтегро-диференціальне рівняння, тепловий потік на поверхнях тріщини.*

Встановлення гранично-рівноважного стану для тіла з тріщиною за температурного навантаження базується на розв'язках відповідних термопружних задач, які виражають коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН). Задачу для кругової тріщини, на поверхнях якої діє сталий тепловий потік, досліджено раніше [1]. Нижче знайдено КІН K_I для еліптичної тріщини, на поверхнях якої діють сталі теплові потоки протилежного напрямку.

Формулювання задачі та її розв'язок. Розглянемо тривимірне пружне тіло, у якому виберемо систему прямокутних координат $Oxyz$. У площині $z = 0$ розглянемо еліптичну тріщину з центром у початку координат, яка обмежена контуром $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; $a \geq b$. Вважаємо, що тіло нагрівається через поверхні тріщини тепловими потоками $q = \text{const}$, які мають протилежні напрямки, тобто нормальні зміщення на цих поверхнях зазнають стрибка.

Вважаємо, що температура T_0 в однорідному тілі рівна нулю. Задача полягає у визначенні КІН K_I на краю тріщини.

На основі відомих результатів [2] сформульовану задачу зведемо до розв'язування сингулярного інтегро-диференціального рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint_S \frac{[\tilde{u}_z]_* \, d\xi d\eta}{R} = -\frac{2q\alpha_0 d_2}{\lambda_0}\iint_S \frac{d\xi d\eta}{R}, \quad (x,y)\in S \tag{1}$$

відносно стрибка нормальних зміщень $[\tilde{u}_z]_*$ поверхонь тріщини, α_0 – коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу тіла, λ_0 – коефіцієнт теплопровідності матеріалу тіла, $d_2 = 1 + \nu$, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу, S – еліптична область

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1;\ R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Розв'язок рівняння (1) можна записати у такому вигляді:

$$[\tilde{u}_z]_* = \frac{\alpha_0 d_2 q b^2}{\lambda_0 \pi E(k)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1-(bx\sin\theta - ay\cos\theta)^2/(a^2b^2)}{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta,\ (x,y)\in S, \tag{2}$$

де $E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha$; $k^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}$.

Контактна особа: М. М. СТАДНИК, e-mail: matematyka@i.ua

Користуючись рухомою локальною прямокутною системою координат O_1ntz з початком на контурі області S, одержимо асимптотичне подання для похідної за n від стрибка зміщення у малому околі межі еліпса

$$\frac{\partial[\tilde{u}_z]_*}{\partial n}=-\frac{q\alpha_0 d_2 b\sqrt{bf(\varphi)}}{\pi\lambda_0 E(k)\sqrt{-2an}}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\cos^2(\theta-\varphi)}{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta+C_1(n,\varphi), \qquad (3)$$

де $f(\varphi)=\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$; O_1n – зовнішня нормаль до контуру області S; φ – кут, що визначає параметричні координати точок еліпса ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $|n| << a,b$); $\lim\limits_{n\to -0} C_1(n,\varphi)=0$.

Щоб визначити КІН K_{I}, використаємо співвідношення [2]

$$K_{\mathrm{I}}=-\frac{G}{2d_1}\lim_{n\to -0}\sqrt{-2\pi n}\,\frac{\partial[\tilde{u}_z]_*}{\partial n}, \qquad (4)$$

де $d_1 = 1 - \nu$; G – модуль зсуву.

Підставивши вираз (3) у співвідношення (4), одержимо подання

$$K_{\mathrm{I}}=\frac{Gq\alpha_0 d_2 b\sqrt{bf(\varphi)}}{2d_1\lambda_0 E(k)\sqrt{\pi a}}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\cos^2(\theta-\varphi)}{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta \qquad (5)$$

для обчислення КІН K_{I} у тілі з еліптичною тріщиною.

Із формули (5) одержуємо вирази для визначення K_{I} відповідно для $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi/2$, тобто у точках $M_1(\pm a;0;0)$ і $M_2(0;\pm b;0)$

$$K_{\mathrm{I}|M_1}=\frac{2Gq\alpha_0 d_2 b^2\arcsin k}{k\,d_1\lambda_0 E(k)\sqrt{\pi a}}; \quad K_{\mathrm{I}|M_2}=\frac{Gq\alpha_0 d_2 b\sqrt{b}}{k\,d_1\lambda_0 E(k)\sqrt{\pi}}\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) \qquad (6)$$

Для кругової тріщини ($a = b$, $k = 0$, $E(k) = \pi/2$) на основі подань (6) матимемо такий вираз для знаходження КІН K_{I}:

$$K_{\mathrm{I}}=\frac{4Gq\alpha_0 d_2 a\sqrt{a}}{d_1\lambda_0\pi\sqrt{\pi}}. \qquad (7)$$

Задача для кругової тріщини також досліджена раніше [1].

Для тунельної тріщини ($a \to \infty$, $\varphi = \pi/2$, $b \neq 0$, $k \to 1$) $K_{\mathrm{I}} \to \infty$, оскільки у цьому разі збурений тепловий потік на безмежності (q = const) не дорівнює нулю.

РЕЗЮМЕ. Получено аналитическое решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения термоупругой задачи для трехмерного тела с эллиптической трещиной. На поверхностях трещины действуют постоянные противоположного направления тепловые потоки. Получены формулы для определения коэффициента интенсивности напряжений K_{I} на краю трещины.

SUMMARY. The analytical solution of a singular integrodifferential equation of thermoelastic problem for three-dimensional body with an elliptic crack has been obtained. The constant heat flows of opposite directions act on the crack surfaces. The formulae for determination of the stress intensity factors K_{I} on the elliptic crack contour are obtained.

1. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
2. *Стадник М. М.* Метод розв’язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – **30**, № 6. – С. 30–40.
   (*Stadnyk M. M.* A method for the solution of three-dimensional thermoelasticity problems for bodies with thin inclusions // Materials Science. – 1994. – **30**, № 6. – P. 643–652).

Одержано 25.07.2011