

УДК 539.375

МОДЕЛЬ “ТРИЗУБЕЦЬ” ПЛАСТИЧНОЇ ЗОНИ В КІНЦІ ТРІЩИНИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ, ЩО ВИХОДИТЬ НА НЕГЛАДКУ МЕЖУ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

М. В. ДУДИК, Ю. В. ДІХТЯРЕНКО

Уманський державний педагогічний університет

За умов плоскої деформації методом Вінера–Гопфа в межах моделі “тризубець” розраховано маломасштабну пластичну зону у кутовій точці межі поділу двох різних пружно-пластичних матеріалів, з якої виходить тріщина нормального відриву. Зону змодельовано двома симетричними бічними лініями розриву дотичного переміщення і лінією розриву нормального переміщення на продовженні тріщини. Отримано аналітичні вирази для визначення розмірів зони і розкриття тріщини. На основі числових розрахунків проаналізовано залежності параметрів зони від кута розхилу межі поділу та пружних характеристик матеріалів.

Ключові слова: кутова точка межі поділу середовищ, тріщина нормального відриву, модель “тризубець” пластичної зони, розкриття тріщини.

Теоретичні та експериментальні дослідження показують, що пластична зона, яка виникає біля гострокінцевих концентраторів напружень у пружно-пластичному матеріалі, має складну структуру і містить досить розвинуту пластичну область, в якій переважають зсувні деформації, та прилеглу до вершини концентратора значно меншу за розмірами пластичну зону передруйнування з високим рівнем як зсувних, так і відривних деформацій. Враховуючи це та умови симетрії, для опису пластичної зони в кінці тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу середовищ, використали модель “тризубець” [1], згідно з якою зона розвивається у два етапи. На першому етапі з вершини тріщини під деяким кутом до її початкового напрямку в одному з матеріалів з’єднання симетрично поширюються дві вузькі бічні пластичні смуги, що моделюються відрізками розриву дотичного переміщення. Якщо їх поява не знімає концентрацію напружень в околі вершини, то на наступному етапі можливе утворення на продовженні тріщини пластичної зони передруйнування, що моделюється відрізком розриву нормального переміщення (рис. 1).

Розрахунок пластичної зони в межах моделі “тризубець” відповідно до двох етапів її розвитку передбачає розв’язання чотирьох задач (для кутів нахилу пласт-

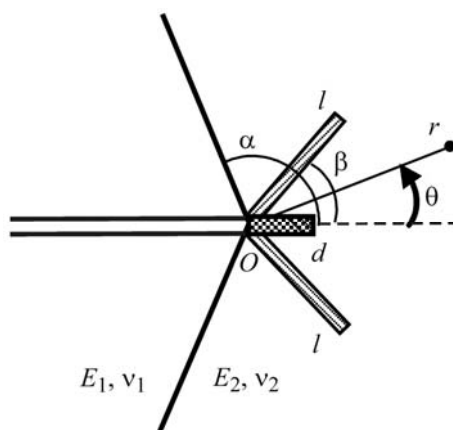


Рис. 1. Модель “тризубець” пластичної зони.

Fig. 1. The “trident” model of plastic zone.

тичних смуг β більше і менше половини кута розхилу межі поділу α) методом Вінера–Гопфа. Аналогічну задачу з пластичною смугою на межі з'єднання двох матеріалів розв'язано раніше [2].

Параметри початкової бічної пластичної зони. Нехай в умовах плоскої деформації в кусково-однорідному ізотропному пружно-пластичному тілі з кутової точки межі поділу виходить тріщина нормального відриву в матеріал з модулем Юнга E_1 і коефіцієнтом Пуассона ν_1 . Оскільки кутова точка межі поділу середовищ, з якої виходить тріщина нормального відриву, є концентратором напружень зі степеневою особливістю [3], це призводить до утворення в її околі пластичної зони. Припускаємо, що на початковій стадії розвитку пластичної зони в матеріалі з пружними сталими E_i, ν_i ($i = 1, 2$) з'являються дві вузькі бічні пластичні смуги однакової довжини, значно меншої за довжину тріщини (тут і нижче індексом i будемо позначати величини, які належать до пластичних смуг у i -му матеріалі). Згідно з гіпотезою локалізації [4], моделюватимемо їх двома нахиленими під кутом β_i до напрямку продовження тріщини прямолінійними відрізками розриву дотичного переміщення, на яких дотичне напруження рівне границі текучості i -го матеріалу τ_{is} .

Розраховували довжини бічних пластичних смуг методом Вінера–Гопфа аналогічно задачі про пластичні смуги у з'єднувальному матеріалі [5, 6] і отримали такий вираз:

$$l_i = \left(\frac{|C|}{\tau_{is}} \right)^{-1/\lambda} R_i(\beta_i), \quad (1)$$

де C – стала, яка характеризує інтенсивність зовнішнього силового поля і вважається заданою за умовою задачі; λ – найменший на інтервалі $(-1, 0)$ корінь рівняння [3]:

$$D_0(-1-x) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} D_0(p) = & 4e^2[\kappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha] \cdot [p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha)] + \\ & + e \left\{ (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) \sin 2p\pi - 4[\kappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha][p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha)] - \right. \\ & \left. - (p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha)[(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) - 4(p^2 \sin^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 p(\pi - \alpha))] \right\} + \\ & + (p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha) \left\{ (1 + \kappa_1)^2 - 4[p^2 \sin^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 p(\pi - \alpha)] \right\}, \end{aligned}$$

$$\kappa_i = 3 - 4\nu_i, \quad e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1};$$

$$R_i(\theta) = \left[\frac{\sqrt{\pi} |F_i(\theta)| \Gamma(1 + \lambda) I_i(0, \theta)}{2\Gamma(1, 5 + \lambda) I_i(\lambda, \theta)} \right]^{-1/\lambda},$$

$$F_i(\theta) = \begin{cases} F_1(\theta), & \alpha \leq \theta \leq \pi, \\ F_2(\theta), & 0 \leq \theta \leq \alpha; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_1(\theta) = & \frac{(2\pi)^\lambda}{4\lambda\varphi_2} \left\{ (\lambda + 2)\varphi_1 \sin(\lambda + 2)(\pi - \theta) - \lambda\varphi_1 \sin \lambda(\pi - \theta) - \right. \\ & \left. - \lambda\varphi_2 \cos(\lambda + 2)(\pi - \theta) + \lambda\varphi_2 \cos \lambda(\pi - \theta) \right\}, \end{aligned}$$

$$F_2(\theta) = \frac{-(2\pi)^\lambda}{4\lambda\varphi_2 \cos \lambda\alpha} \times$$

$$\times \left\{ [(\lambda + 2)\psi_1\varphi_1 + \lambda\psi_2\varphi_2] \cos \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\theta + \lambda(\psi_3\varphi_1 + \psi_4\varphi_2) \sin \lambda\theta \right\},$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= -[(\lambda + 1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha], \\
\varphi_1 &= \varphi \left\{ (e-1)\lambda \sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) - [(e-1)(\lambda + 2) - e(1 + \kappa_2) + (1 + \kappa_1)] \sin \lambda(\pi - \alpha) \right\} - \\
&\quad - 2e(1 + \kappa_2)\lambda \cos \pi \lambda \sin(\lambda + 1)\alpha \sin \alpha, \\
\varphi_2 &= \varphi \left\{ [(e-1)(\lambda + 2) - e(1 + \kappa_2) + (1 + \kappa_1)] \cos \lambda(\pi - \alpha) - \right. \\
&\quad \left. - (e-1)(\lambda + 2) \cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha) \right\} - 2e(1 + \kappa_2) \sin \pi \lambda (\lambda \sin(\lambda + 1)\alpha \sin \alpha + \cos \lambda \alpha), \\
\psi_1 &= -2\lambda \cos(\pi \lambda - \alpha) \sin \alpha + 2 \sin(\lambda + 2)(\pi - \alpha) \cos \lambda \alpha, \\
\psi_2 &= -2\lambda \sin(\pi \lambda - \alpha) \sin \alpha + 2 \cos \lambda \pi - 2 \cos(\lambda + 2)(\pi - \alpha) \cos \lambda \alpha, \\
\psi_3 &= -\varphi \cos \lambda(\pi - \alpha) - 2 \sin \pi \lambda (\lambda \sin(\lambda + 1)\alpha \sin \alpha + \cos \lambda \alpha), \\
\psi_4 &= -\varphi \sin \lambda(\pi - \alpha) + 2\lambda \cos \pi \lambda \sin(\lambda + 1)\alpha \sin \alpha; \\
I_i(x, \theta) &= \exp \left[\frac{x+1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G_i(it, \theta)}{t^2 + (x+1)^2} dt \right], \quad G_i(p, \theta) = \frac{D_i(p, \theta) \cos p\pi}{D_0(p) \sin p\pi}, \\
D_1(p, \theta) &= 4(e-1)(\Delta_1\Delta_4 - \Delta_2\Delta_5)[e(1 + \kappa_2) \sin 2p\alpha - (e-1)\Delta_6] - \\
&\quad - 4(e-1)(1 + \kappa_1)\Delta_6[\sin 2p(\theta - \alpha)\Delta_1 + \sin^2 p(\theta - \alpha)\Delta_5] + \\
&\quad + e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)[4 \sin(p-1)\theta \sin(p+1)\theta \Delta_1 + (\Delta_6 - \Delta_3)\Delta_5] - (1 + \kappa_1)^2 \Delta_5 \Delta_6, \\
D_2(p, \theta) &= e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)[\Delta_3(\Delta_4 - \Delta_5) + 4(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_7) \sin(p-1)\theta \sin(p+1)\theta] + \\
&\quad + [4\Delta_2 \sin(p-1)\theta \sin(p+1)\theta - \Delta_3\Delta_4][(1 + \kappa_1)^2 + 4(e-1)(1 + \kappa_1) \sin^2 p(\pi - \alpha) - \\
&\quad - 4(e-1)^2 \Delta_7] + 4e^2(1 + \kappa_2)^2 \Delta_7 \sin(p-1)\theta \sin(p+1)\theta + 4(e-1)e(1 + \kappa_2)\Delta_7\Delta_8, \\
\Delta_1 &= p^2 \sin^2 \theta - \sin^2 p(\pi - \theta), \quad \Delta_2 = p^2 \sin^2(\theta - \alpha) - \sin^2 p(\theta - \alpha), \\
\Delta_3 &= p \sin 2\theta + \sin 2p\theta, \quad \Delta_4 = p \sin 2(\theta - \alpha) + \sin 2p(\theta - \alpha), \\
\Delta_5 &= p \sin 2\theta - \sin 2p(\pi - \theta), \quad \Delta_6 = p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha, \\
\Delta_7 &= p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha), \\
\Delta_8 &= p \sin 2\beta \sin 2p(\alpha - \theta) - 2 \sin^2 p(\alpha - \theta) \cos 2\theta + 2 \sin p(\alpha + \theta) \sin p(\alpha - \theta);
\end{aligned}$$

$\Gamma(p)$ – гамма-функція Ейлера.

Як критерій вибору напрямку поширення пластичної смуги використовують умову максимуму швидкості дисипації енергії [7], яка приводить до умов

$$\begin{aligned}
\frac{dW_i}{dt} &= \frac{8\tau_{is}^2(1 - v_i^2)}{\pi E_i(2 + \lambda)} \left(\frac{|C| \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda + 1)}{2\tau_{is} \Gamma(1, 5 + \lambda)} \right)^{-2/\lambda} w_i(\beta_i) \frac{1}{C} \frac{dC}{dt} \rightarrow \max, \\
w_i(\theta) &= \left[\frac{|F_i(\theta)| I_i(0, \theta)^{1+\lambda}}{I_i(\lambda, \theta)} \right]^{-2/\lambda}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Знайдено також розкриття тріщини в її вершині, обумовлене утворенням пластичних смуг, яке виражається через визначений під час розв'язання задачі стрибок дотичного переміщення в смугі

$$\delta_i^{pl} = 2 \langle u_r(0, \beta_i) \rangle \sin \beta_i = - \frac{16(1 - v_i^2) \tau_{is} l_i}{\pi E_i I_i(0, \beta_i) \sqrt{G_i(0, \beta_i)}} \frac{\lambda}{1 + \lambda} \sin \beta_i. \quad (4)$$

З розв'язку задачі отримали головні члени розвинень напружень у асимптотичні ряди в околі вершини тріщини після утворення пластичної зони, які визначають з коренів λ_i ($-1 < \lambda_i < 0$) рівняння

$$D_i(-x-1, \beta_i) = 0. \quad (5)$$

Відмінність коренів рівнянь (2) і (5) вказує на зміну напружено-деформованого стану в околі кутової точки внаслідок утворення початкової пластичної зони. На рис. 2 подані результати числових розрахунків залежності показників сингулярності напружень від кута розхилу межі поділу середовищ 2α за відсутності пластичної зони (λ , суцільні криві) та після утворення пластичної зони в першому (λ_1 , пунктирні криві) і другому (λ_2 , штрихові криві) матеріалах. Їх аналіз свідчить, що для деяких кутів розхилу концентрація напружень після утворення пластичної смуги зникає ($\lambda_i = 0$), для інших – спостерігали її послаблення після утворення пластичної зони ($\lambda_i > \lambda$), за винятком поширення пластичної смуги у другому матеріалі, коли $E_1/E_2 < 1$, $\alpha < 45^\circ$.

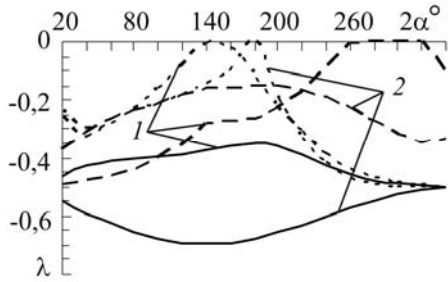


Рис. 2. Залежність показників сингулярності напружень від кута розхилу межі поділу середовищ 2α ($\nu_1 = \nu_2 = 0,25$): 1 – $E_1/E_2 = 0,2$; 2 – $E_1/E_2 = 5$.

Fig. 2. Dependence of stress singularity index on the interface spread angle 2α ($\nu_1 = \nu_2 = 0.25$): 1 – $E_1/E_2 = 0.2$; 2 – $E_1/E_2 = 5$.

Параметри пластичної зони передруйнування на продовженні тріщини.

За концентрації напружень в околі кутової точки пластична зона зі зростанням навантаження розвиватиметься не лише внаслідок збільшення геометричних розмірів пластичних смуг, але й через появу нової смуги. В результаті симетрії передбачають утворення на продовженні тріщини вторинної пластичної смуги – пластичної зони передруйнування довжини d_i , значно меншої, ніж довжина початкових пластичних смуг. Моделюючи цю вузьку пластичну зону передруйнування відрізком розриву нормального переміщення, на якому нормальне напруження рівне заданій сталій другого матеріалу σ_2 , знайдемо аналогічно [2] її довжину:

$$d_i = \left(\frac{\tau_{is}}{\sigma_2 \tilde{X}_i} \right)^{-1/\lambda_i} l_i, \quad (6)$$

$$\tilde{X}_i = \frac{\tilde{I}_i(\lambda_i) I_i(0, \beta_i)}{\tilde{I}_i(0) I_i(\lambda_i, \beta_i) |S_i(-1 - \lambda_i, \beta_i)|}, \quad \tilde{I}_i(x) = \exp \left[\frac{x+1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln \tilde{G}_i(it)}{t^2 + (x+1)^2} dt \right],$$

$$\tilde{G}_1(p) = -\frac{2D_3(p, \beta_1) \cos p\pi}{D_1(p, \beta_1) \sin p\pi}, \quad \tilde{G}_2(p) = -\frac{2D_4(p, \beta_2) \cos p\pi}{D_2(p, \beta_2) \sin p\pi},$$

$$D_3(p, \theta) = 2(1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2)(\Delta_1\Delta_{24} - \Delta_5\Delta_{26}) - (1 + \kappa_1)^2\Delta_5\Delta_{25} + 4(e-1)(1 + \kappa_1)(\Delta_1 \sin 2p(\alpha - \theta) - \Delta_5 \sin^2 p(\alpha - \theta))\Delta_{25} +$$

$$+(\Delta_1\Delta_4 - \Delta_2\Delta_5)[e^2(1 + \kappa_2)^2 - 4(e-1)e(1 + \kappa_2)\sin^2 p\alpha - 4(e-1)^2\Delta_{25}],$$

$$D_4(p, \theta) = 2(1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2)[(\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_7)\Delta_3 + (\Delta_4 - \Delta_5)\Delta_{23}] +$$

$$+2[\Delta_2\Delta_3 - \Delta_4\Delta_{23}]\{(1 + \kappa_1)^2 + 4(e-1)(1 + \kappa_1)\sin^2 p(\pi - \alpha) - 4(e-1)^2\Delta_7\} +$$

$$+2e^2(1 + \kappa_2)^2\Delta_3\Delta_7 - 4(e-1)e(1 + \kappa_2)\Delta_7(2\Delta_3 \sin^2 p(\alpha - \theta) - 2\Delta_{23} \sin 2p(\alpha - \theta)),$$

$$S_i(p, \theta) = \frac{f_i(p, \theta)}{D_i'(p, \theta)} \frac{\lambda}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}, \quad D_i'(p, \theta) = \frac{\partial D_i(p, \theta)}{\partial p},$$

$$f_1(p, \theta) = \{2(e-1)[2\Delta_1\Delta_9 + \Delta_5(p \sin \alpha \Delta_{11} + \sin p \alpha \Delta_{12}) + 2\Delta_{10}(p \sin \alpha \Delta_{13} + \sin p \alpha \Delta_{14})] + (1 + \kappa_1)(\Delta_5\Delta_{15} + 2\Delta_{10}\Delta_{16}) - e(1 + \kappa_2)(\Delta_5\Delta_{17} + 2\Delta_{10}\Delta_{18} + 2\Delta_1 \sin(p+1)\beta)\}(1 + \kappa_1),$$

$$f_2(p, \theta) = e(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)[\sin(p+1)\theta(\Delta_2 - \Delta_1 + \Delta_7) + p \sin \theta \Delta_{19} - \sin p \theta \Delta_{20}] + 2e(1 + \kappa_2)(e-1)\Delta_7\Delta_{21} - e^2(1 + \kappa_2)^2 \Delta_7 \sin(p+1)\theta -$$

$$-(p-1)[(1 + \kappa_1)^2 - 4(e-1)^2 \Delta_7 + 4(1 + \kappa_1)(e-1) \sin^2 p(\pi - \alpha)]\Delta_{22},$$

$$\Delta_9 = p \sin \alpha \cos[(p+1)(\alpha - \theta) + p\alpha] + \sin p \alpha \cos[p(\alpha - \theta) - \theta],$$

$$\Delta_{10} = p \sin^2 \theta - \sin^2 p(\pi - \theta),$$

$$\Delta_{11} = p \sin(\alpha - \theta) \cos p(2\alpha - \theta) - \sin p(\alpha - \theta) \cos(p\alpha + \alpha - \theta),$$

$$\Delta_{12} = p \sin(\alpha - \theta) \cos[p(\alpha - \theta) - \alpha] - \sin p(\alpha - \theta) \cos \theta,$$

$$\Delta_{13} = p \sin(\alpha - \theta) \sin p(2\alpha - \theta) + \sin p(\alpha - \theta) \sin(p\alpha + \alpha - \theta),$$

$$\Delta_{14} = p \sin(\alpha - \theta) \sin[p(\alpha - \theta) - \alpha] - \sin p(\alpha - \theta) \sin \theta,$$

$$\Delta_{15} = p \sin \alpha \sin(p\theta + \alpha - \theta) - \sin p \alpha \sin(p(\alpha - \theta) + \theta),$$

$$\Delta_{16} = p \sin \alpha \cos(p\theta + \alpha - \theta) + \sin p \alpha \cos(p(\alpha - \theta) + \theta),$$

$$\Delta_{17} = p \sin(\alpha - \theta) \sin(p\theta + \alpha) - \sin p(\alpha - \theta) \sin(p\alpha + \theta),$$

$$\Delta_{18} = p \sin(\alpha - \theta) \cos(p\theta + \alpha) + \sin p(\alpha - \theta) \cos(p\alpha + \theta),$$

$$\Delta_{19} = p \sin \alpha \sin(p\theta + 2\theta - \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \sin p(\pi + \alpha - \theta),$$

$$\Delta_{20} = p \sin \alpha \sin(\alpha - \theta) - \sin p(\pi - \alpha) \sin[p(\pi + \alpha - 2\theta) - \theta],$$

$$\Delta_{21} = (p-1) \sin \theta \cos p(2\alpha - \theta) + \sin(p+1)\theta,$$

$$\Delta_{22} = p \sin \alpha \sin(\alpha - \theta) \sin p\theta - \sin p \alpha \sin p(\alpha - \theta) \sin \theta,$$

$$\Delta_{23} = p^2 \sin^2 \theta - \sin^2 p\theta, \quad \Delta_{24} = p \sin \alpha \cos(\alpha - 2\theta) + \sin p \alpha \cos p(\alpha - 2\theta),$$

$$\Delta_{25} = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p \alpha, \quad \Delta_{26} = p^2 \sin \alpha \cos \theta \sin(\theta - \alpha) - \sin p \alpha \cos p \theta \sin p(\theta - \alpha).$$

Розв'язуючи задачу, знайдемо додатковий вклад у розкриття тріщини при вершині внаслідок утворення пластичної зони передруйнування як стрибок нормального переміщення, який дорівнює

$$\delta_i^{pf} = -u_\theta(0, \pi) + u_\theta(0, -\pi) = -\frac{64\pi\sigma_2 e(1 + \kappa_2)(1 - \nu_1^2) J_i \sqrt{\tilde{G}_i(0)} d_i \lambda_i}{E_1 \tilde{J}_i \tilde{I}_i(0)(1 + \lambda_i)}, \quad (7)$$

$$J_1 = g_1[e(1 + \kappa_2)g_2 - (1 + \kappa_1)g_3], \quad J_2 = g_4[e(1 + \kappa_2)g_5 - (1 + \kappa_1)g_2],$$

$$g_1 = (\pi - \beta) \cos \beta - \sin \beta, \quad g_2 = \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta) \cos \beta,$$

$$g_3 = \sin \alpha \cos(\alpha - \beta) + \alpha \cos \beta, \quad g_4 = \sin \beta + \beta \cos \beta,$$

$$g_5 = \sin \alpha \cos(\alpha - \beta) - (\pi - \alpha) \cos \beta;$$

$$\tilde{J}_1 = \lim_{p \rightarrow 0} p^{-3} D_3(p), \quad \tilde{J}_2 = \lim_{p \rightarrow 0} p^{-3} D_4(p).$$

Загальне розкриття тріщини δ_i визначають як суму розкриттів, обумовлених утворенням бічної пластичної зони (4) і пластичної зони передруйнування (7): $\delta_i = \delta_i^{pl} + \delta_i^{pf}$. Прирівнявши розкриття тріщини до його критичного значення, можна знайти граничне навантаження, за якого відбувається зрушення тріщини.

Після утворення пластичної зони передруйнування поле напружень біля кутової точки характеризуватимуть корені рівнянь $D_3(-1-x, \beta_1) = 0$ або $D_4(-1-x, \beta_2) = 0$, які для $-1 < \operatorname{Re} x < 0$ визначають показник сингулярності напружень. Розрахунки показують, що в широкому інтервалі пружних параметрів з'єднаних матеріалів та кутів розхилу межі поділу ці рівняння не мають коренів у смугі $-1 < \operatorname{Re} x < 0$, а отже, концентрація напружень у кутовій точці зникає.

Аналіз отриманих результатів. Згідно з формулами (1) і (6) пластичні смуги нелінійно ростуть зі збільшенням зовнішнього навантаження, яке входить у вирази для довжин через множник C . Крім цього, довжина бічної пластичної зони тим більша, що менша границя текучості матеріалу σ_1 , а довжина пластичної зони передруйнування тим більша, що менша стала σ_2 . З формули (6) впливає також, що розміри пластичних смуг синхронно ростуть із збільшенням навантаження.

Якщо в досліджуваному кусково-однорідному тілі лише один з матеріалів є пружно-пластичним, то бічні пластичні смуги розвиватимуться в ньому у напрямках, визначених з відповідної умови (3). Проте, якщо пружно-пластичними є обидва матеріали з'єднання, то необхідно додатково порівняти максимальні швидкості дисипації енергії у смугах у кожному з матеріалів. Відношення цих швидкостей, а також довжин пластичних смуг такі:

$$\frac{dW_1/dt}{dW_2/dt} = \left(\frac{\tau_{2s}}{\tau_{1s}} \right)^{-2(\lambda+1)/\lambda} Z, \quad \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\tau_{2s}}{\tau_{1s}} \right)^{-1/\lambda} X, \quad (8)$$

$$Z = \frac{1-\nu_1}{e(1-\nu_2)} \left[\frac{|F_1(\beta_1)| I_1(0, \beta_1)^{1+\lambda} I_2(\lambda, \beta_2)}{|F_2(\beta_2)| I_2(0, \beta_2)^{1+\lambda} I_1(\lambda, \beta_1)} \right]^{-2/\lambda},$$

$$X = \left[\frac{|F_1(\beta_1)| I_1(0, \beta_1) I_2(\lambda, \beta_2)}{|F_2(\beta_2)| I_2(0, \beta_2) I_1(\lambda, \beta_1)} \right]^{-1/\lambda}.$$

У таблиці подано результати числових розрахунків залежності параметрів зон від кута розхилу межі поділу середовищ 2α для відношень модулів Юнга середовищ $E_1/E_2 = 0,2$ та $E_1/E_2 = 5$ і однакових коефіцієнтів Пуассона ($\nu_1 = \nu_2 = 0,25$) та рівності границь текучості з'єднаних матеріалів ($\tau_{1s} = \tau_{2s}$). Їх аналіз свідчить, що для $E_1 < E_2$ і кутів розхилу межі поділу середовищ $2\alpha \leq 180^\circ$ маємо $dW_1/dt > dW_2/dt$ ($Z > 1$), що, згідно з прийнятим енергетичним критерієм, передбачає утворення двох симетричних бічних пластичних смуг у першому матеріалі, тоді як для $180^\circ < 2\alpha < 360^\circ$ $dW_1/dt < dW_2/dt$, тому перевагу слід надати утворенню двох бічних смуг у другому матеріалі. Коли $E_1 > E_2$ і кути розхилу $2\alpha \leq 40^\circ$, маємо $dW_1/dt > dW_2/dt$, тобто дві симетричні пластичні смуги утворюються в першому матеріалі; для кутів розхилу від $2\alpha \approx 60^\circ$ до деякого кута $2\alpha_1 \approx 120^\circ$, який визначають з умови $dW_1/dt = dW_2/dt$, пластична смуга поширюватиметься вздовж межі поділу середовищ у першому або другому матеріалі ($\beta_1 = \beta_2 = \alpha$) залежно від їх границі текучості. Для кутів $2\alpha > 120^\circ$ і $E_1 > E_2$ маємо $dW_1/dt < dW_2/dt$, тому передбачаємо утворення двох симетричних бічних

смуг у другому матеріалі. Коли $\tau_{1s} \neq \tau_{2s}$, напрям поширення смуг, згідно з умовою (8), залежатиме також від відношення границь текучості матеріалів. За з'єднання однакових матеріалів кут нахилу пластичних смуг дорівнює $75,8^\circ$, що близько до знайденого [8] значення $\approx 72^\circ$; їх відмінність зумовлена використанням у праці [8] умови максимуму довжини смуг. Порівняння відношень довжин смуг (X) і швидкостей дисипації енергії (Z) у різних матеріалах показує, що умови їх максимуму для певних параметрів з'єднання ($E_1/E_2 < 1$, $\alpha \approx 90^\circ$ та $E_1/E_2 > 1$, $\alpha \approx 70^\circ \div 90^\circ$) можуть призводити до різних висновків щодо орієнтації смуг.

Розміри пластичної зони передруйнування наведено у таблиці множниками \tilde{X}_i , які визначають відношення довжин пластичної зони передруйнування і бічної пластичної зони у відповідному матеріалі (відсутні значення відповідають зникненню концентрації напружень на етапі утворення початкових пластичних смуг). Зауважимо, що покладена у формулюванні задачі умова $d_i \ll l_i$ вимагає виконання нерівності $\tilde{X}_i \gg \tau_{is} / \sigma_2$, яка може бути порушена за малих значень \tilde{X}_i .

Параметри зони передруйнування в межах моделі “тризубець”

$2\alpha^\circ$	$E_1/E_2 = 0,2$						$E_1/E_2 = 5$					
	β_1°	β_2°	X	Z	\tilde{X}_1	\tilde{X}_2	β_1°	β_2°	X	Z	\tilde{X}_1	\tilde{X}_2
20	99,1	10	7,336	78,09	3,869	0,169	69,4	10	5,649	6,045	0,233	0,134
40	110,6	20	3,635	23,09	10,591	0,284	61,5	20	1,984	1,345	0,275	0,226
60	114,5	30	4,960	44,68	6,302	0,259	30	30	1,009	1	0,296	0,296
80	115,3	40	16,797	504,2	2,152	0,149	40	40	1,009	1	0,344	0,344
100	115,6	40,5	341,66	$4,1 \cdot 10^5$	0,861	0,042	50	50	1,009	1	0,367	0,366
120	116,1	60	115,86	$2,2 \cdot 10^4$	0,274	0,061	60	60	1,009	1	0,358	0,357
140	116,8	70	12,67	254,1	–	0,122	70	67,1	1,060	0,996	0,305	0,323
160	117,5	80	4,159	26,20	–	0,118	80	70,6	1,091	0,958	0,191	0,284
180	117,6	65,1	0,854	3,121	0,121	0,317	90	73,9	1,063	0,877	–	0,232
200	115,9	61,2	0,168	0,128	0,135	0,439	100	77,0	0,984	0,747	0,169	0,185
220	110	61,6	0,053	0,011	0,106	0,448	110	80,0	0,861	0,574	0,258	0,165
240	120	63,9	0,024	$2,1 \cdot 10^{-3}$	0,079	0,264	120	83,0	0,707	0,387	0,277	0,184
260	130	66,7	0,011	$4,9 \cdot 10^{-4}$	0,052	–	130	85,8	0,547	0,228	0,253	0,241
280	140	69,5	$4,7 \cdot 10^{-3}$	$9,0 \cdot 10^{-5}$	0,032	–	140	87,6	0,397	0,116	0,212	0,329
300	150	72,1	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	0,017	–	150	87,4	0,248	0,045	0,164	0,418
320	160	74,1	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$5,5 \cdot 10^{-7}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	–	160	83,5	0,096	$7,1 \cdot 10^{-3}$	0,105	0,469
340	170	75,4	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-9}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$	0,109	170	78,2	0,010	$8,9 \cdot 10^{-5}$	0,036	0,458

ВИСНОВКИ

За умов плоскої деформації в межах моделі “тризубець” розраховано мало-масштабну пластичну зону в кінці тріщини нормального відриву, яка виходить на кутову точку межі поділу двох різних пружно-пластичних матеріалів. Виявлена можливість передбачення напрямку поширення бічних пластичних смуг. Встановлено, що утворення пластичної зони передруйнування на продовженні тріщини після поширення початкових бічних пластичних смуг усуває концентрацію напружень у вершині тріщини в широкому інтервалі параметрів з'єднання. Ви-

значено розкриття тріщини у її вершині, придатне для розрахунку граничних навантажень.

РЕЗЮМЕ. В условиях плоской деформации методом Винера–Хопфа в рамках модели “трезубец” рассчитана маломасштабная пластическая зона в угловой точке границы раздела двух различных упруго-пластических материалов, из которой выходит трещина нормального отрыва. Зона моделируется двумя симметричными боковыми линиями разрыва касательного смещения и линией разрыва нормального смещения на продолжении трещины. Получены аналитические выражения для определения размеров зоны и раскрытия трещины. На основе числовых расчетов проанализированы зависимости параметров зоны от угла раствора границы раздела сред и упругих характеристик материалов.

SUMMARY. The calculation of the small scale plastic zone within the framework of “trident” model for the plain strain conditions at the corner point of the interface of two dissimilar elasto-plastic materials from which the mode I crack goes out is done by the Wiener–Hopf method. This zone is modeled by two symmetric side lines of tangential displacement jump and by the line of normal displacement jump on the crack elongation. The analytic expressions for definition of the zone dimensions and crack opening are obtained. The dependences of zone parameters on the interface spread angle and elastic material characteristics are analyzed on the basis of numerical calculations.

Автори виражають глибоку вдячність проф. Л. А. Кіпнісу за цінні поради і зауваження по статті.

1. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. Расчет пластической зоны в конце трещины в рамках модели “трезубец” // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 5. – С. 70–76.
2. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Дудик М. В. О начальном развитии зоны предразрушения вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред // Там же. – 2004. – **40**, № 2. – С. 74–81.
3. О поведении напряжений вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред / А. А. Каминский, М. В. Дудик, В. Н. Дякон, Н. И. Затула // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 103–108.
4. Панасюк В. В., Саврук М. П. Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 1. – С. 49–68.
(Panasyuk V. V. and Savruk M. P. Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics // Materials Science. – 1992. – **28**, № 1. – P. 41–57.)
5. Дудик М. В., Кипнис Л. А., Павленко А. В. Расчет пластических линий скольжения в конце трещины, выходящей на границу раздела различных сред // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 2. – С. 90–95.
6. Камінський А. О., Дудик М. В., Кіпніс Л. А. Напруження біля кінців тріщини на межі розділу двох середовищ за наявності пластичних смуг // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 3. – С. 71–76.
(Kamins'kyi A. O., Dudyk M. V., and Kipnis L. A. Stresses near crack tips on the boundary of two media in the presence of plastic strips // Materials Science. – 2001. – **37**, № 3. – P. 447–455.)
7. Черепанов Г. П. К общей теории разрушения // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – **22**, № 1. – С. 36–44.
(Cherepanov G. P. General theory of failure // Materials Science. – 1986. – **22**, № 1. – P. 32–39.)
8. Черепанов Г. П. Пластические линии разрыва в конце трещины // Прикл. математика и механика. – 1976. – **40**, № 4. – С. 720–728.

Одержано 07.10.2013