

УДК 539.375

РОЗВИТОК ПЛАСТИЧНИХ СМУГ ПІД ЧАС ЗСУВНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТІЛА З ВУЗЬКОЮ ПРЯМОКУТНОЮ ЩІЛИНОЮ

В. А. КРИВЕНЬ, А. Р. БОЙКО, А. В. КАПЛУН

Тернопільський національний університет ім. Івана Пулюя

Отримано аналітичні розв'язки антиплоских задач для тіла з напівбезмежною прямокутною щілиною в пружній та пружно-пластичній (односмугова модель зони) формуваннях. Навантаження задано асимптотикою напружень на нескінченності, рівною асимптотиці напівбезмежної тріщини поздовжнього зсуву, поданої через коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Встановлено, що розвиток пластичних смуг починається в напрямку продовження бісектрис кутів вирізу. Знайдено довжини пластичних смуг як функції КІН.

Ключові слова: *прямокутна щілина, антиплоска деформація, пластичні смуги, аналітичний розв'язок, конформне відображення.*

Для зменшення ризиків раптового руйнування та забезпечення надійної роботи механічної конструкції під високими навантаженнями досить часто застосовують матеріали, яким властиві пластичні деформації. Тому цікаво дослідити пружно-пластичний напружено-деформований стан (НДС) тіл та елементів конструкцій. На сьогодні основні зусилля механіки руйнування направлено на вивчення НДС тіл, ослаблених тріщинами, які зазвичай моделюють математичними розрізами. До навантаження віддалі між берегами тріщини вважають нульовою, а береги – як такі, що не взаємодіють. Вершину тріщини приймають за точку звороту. Важливим продовженням таких досліджень є визначення розподілів пружно-пластичних деформацій в околі прямокутних щілин, які за нескінченно малої ширини переходять у класичну тріщину [1, 2].

Нижче досліджено розвиток пластичних смуг від вершин вузької прямокутної щілини під впливом зсувного навантаження, прикладеного на великій віддалі від її торців. Для аналізу НДС в околі вершин щілини вважатимемо її напівнескінченною. Задачу про розвиток континуальних пластичних зон від вершини напівбезмежного прямокутного вирізу розв'язали раніше [2], де, зокрема, визначили форму пластичних зон і встановили, що на початковій стадії протяжність зони максимальна на продовженні бісектриси кута вирізу, а зі збільшенням навантаження її напрямок поступово наближається до осі вирізу.

Визначимо напрямок поширення одної пластичної смуги від вершин напівбезмежної щілини $x \leq 0, -b \leq y \leq b, -\infty < z < +\infty$ у необмеженому тілі та дослідимо її розвиток під квазістатично зростальним зсувним навантаженням (рис. 1). Матеріал тіла вважатимемо ідеально пружно-пластичним зі зсувною границею текучості k .

Початковий напрямок розвитку пластичних смуг. За малих навантажень довжина смуги набагато менша проти геометричних параметрів з розмірністю довжини. Тому початковим буде напрямок смуги для вирізу з кутом при вершині 90° , який у площині Oxy збігається з третім квадрантом. Поза вирізом та поза пластичною смугою (область D_1) тіло перебуватиме в пружному стані, а складена

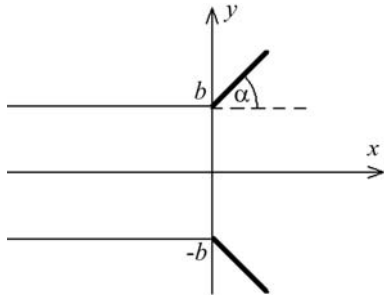


Рис. 1. Поперечний переріз тіла зі щілиною шириною $2b$. Потовщені лінії – пластичні смуги.

Fig. 1. Cross-section of a body with a flaw of width $2b$. Plastic bands are described by thickened lines.

із компонент напружень функція $\tau_1(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ аналітична у цій області. Сформулюємо задачу у напруженнях для функції $\tau_1(\zeta)$ в області D_1 :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\tau_1(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x + i0, -\infty < x < 0); \\ |\tau_1(\zeta)| &= k \quad (\zeta = \rho e^{i\alpha}, 0 \leq \rho \leq d); \\ \arg(\tau) &= -\alpha \quad (\zeta = d e^{i\alpha}); \\ \operatorname{Re}\tau_1(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = 0 + iy, -\infty < y < 0); \\ \tau_1(\zeta) &\rightarrow 0, \text{ якщо } \zeta \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

де α – кут, що визначає напрямок поширення смуги; d – довжина смуги. Перша й четверта умови свідчать про відсутність напружень на гранях вирізу, друга є умовою пластичності, а третя – умовою прямолінійності розвитку пластичної смуги і означає,

що в кінцевій точці смуги площа максимального дотичного напруження дотична до смуги [3], а остання описує асимптотичну рівність нулю напружень у нескінченно віддаленій точці.

Для визначення функції $\tau_1(\zeta)$ скористаємося здійснюваним нею конформним відображенням. Не описуючи його детально, зауважимо, що воно існує тільки для кута $\alpha = 45^\circ$. Отже, початковим напрямком розвитку смуг від вершин щілини є продовження бісектрис кутів при її вершинах. Розв'язок задачі (1), якщо $\alpha = 45^\circ$, дає формула

$$\tau_1(\zeta) = k \frac{\sqrt{2}d^{1/3}}{\sqrt{d^{2/3} - \sqrt{d^{4/3} - \zeta^{4/3} e^{-i\pi/3}} + i\sqrt{d^{2/3} + \sqrt{d^{4/3} - \zeta^{4/3} e^{-i\pi/3}}}}, \quad (2)$$

тут під $\sqrt{d^{4/3} - \zeta^{4/3} e^{-i\pi/3}}$ розумітимемо аналітичну в області D_1 функцію, що набуває дійсні додатні значення, коли ζ є дійсним та від'ємним. В околі нескінченно віддаленої точки функція $\tau_1(\zeta)$ володіє такою асимптотикою:

$$\tau_1(\zeta) = (-ike^{i\pi/3} / \sqrt{2})(d/\zeta)^{1/3} + o(1/\zeta)^{1/3}. \quad (3)$$

У задачі для напівбезмежної щілини сталої ширини напруження на нескінченності можна вважати асимптотично рівними напруженням на нескінченності для напівбезмежної тріщини [4]: $\tau(\zeta) = K_{III} / \sqrt{2\pi\zeta}$, K_{III} – коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) прямолінійної напівбезмежної тріщини поздовжнього зсуву.

Розвиток пластичних смуг від вершин торця щілини. Сформулюємо крайову задачу в напруженнях для функції $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ у верхній півплощині $\operatorname{Im}\zeta > 0$ без півсмуги $0 < \operatorname{Im}\zeta < b$, $-\infty < \operatorname{Re}\zeta < 0$, розрізаній уздовж пластичної смуги $y = x + b$, $0 \leq x^2 + (y - b)^2 \leq d^2$ (область D):

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x + ib, -\infty < x < 0); \quad |\tau(\zeta)| = k \quad (\zeta = \rho e^{i\pi/4}, 0 \leq \rho \leq d); \\ \arg\tau(\zeta) &= -\pi/4 \quad (\zeta = d e^{i\pi/4}); \quad \operatorname{Re}\tau(\zeta) = 0 \quad (\zeta = iy, 0 < y < b); \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0 \quad (\zeta = x, 0 < x < +\infty); \quad \tau(\zeta) = K_{III} / \sqrt{2\pi\zeta} + o(\zeta), \text{ якщо } \zeta \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Тут d – шукана залежна від КІН K_{III} довжина пластичної смуги. Внаслідок умов (4) функція $\tau(\zeta)$ конформно відображає верхню півплощину ζ без смуги ($x \leq 0$, $0 < y < b$) і без відповідного пластичній смугі відрізка $y = b + x$, $0 \leq x \leq d/\sqrt{2}$

(область D) на четверть круга $|\tau| < k$, $-\pi/2 < \arg \tau < 0$ (область G) (рис. 2). Нехай $\tau_0 = \min_{[-b;b]} \tau_{yz}(0, y)$ – координата точки D у площині τ . Відображення функції $\tau(\zeta)$ шукатимемо в параметричній формі

$$\tau = \tau(t), \zeta = \zeta(t) \quad (t \in H = \{\text{Im } t > 0\}), \quad (5)$$

увівши площину допоміжного комплексного параметра t так, щоб відповідним точкам межі областей D і G відповідала одна і та ж точка на межі області H (рис. 3).

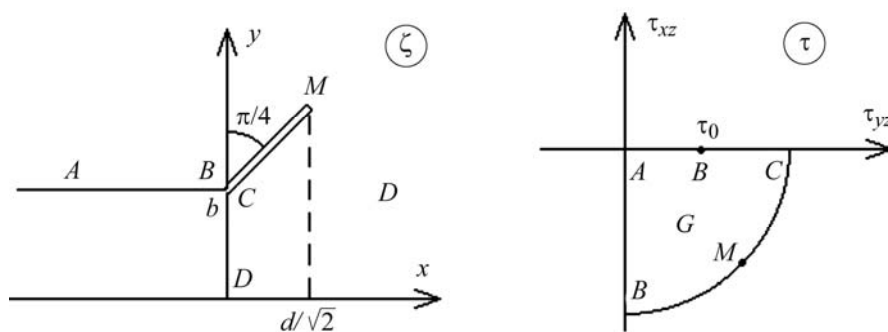


Рис. 2. Області у площинах ζ і τ для конформного відображення (пружно-пластичний розв'язок).

Fig. 2. Regions in the planes ζ and τ for conformal mapping (elastic-plastic solution).

Першу із функцій (5) знайдемо композицією елементарних відображень:

$$\tau(t) = k(\sqrt{t} - \sqrt{t-1}). \quad (6)$$

Тут і далі під $(t-p)^q$ (p, q – дійсні числа; q – неціле) розумітимемо аналітичну в області H функцію, що набуває дійсних додатних значень, коли параметр t дійсний та більший за значення p .

Тепер можемо виразити значення t_D через напруження τ_0 . Оскільки $\tau(t_D) = \tau_0$, то із формули (6) отримуємо:

$$t_D = (k^2 + \tau_0^2)^2 / (4k^2 \tau_0^2).$$

Функцію $\zeta(t)$ знайдемо за допомогою перетворення Крістофеля–Шварца [5]:

$$\zeta(t) = ib + \frac{b}{R} \int_0^t \frac{(\eta - t_M) d\eta}{4\sqrt{\eta(\eta-1)}\sqrt{\eta-t_D}}, \quad (7)$$

де $t_D = \frac{(k^2 + \tau_0^2)^2}{4k^2 \tau_0^2}$; $R = \int_1^{t_D} F(\eta) d\eta$; $F(\eta) = \frac{|\eta - t_M|}{4\sqrt{\eta(\eta-1)}\sqrt{t_D - \eta}}$; t_M – розв'язок рівняння

$$\int_0^{t_M} F(\eta) d\eta = \int_{t_M}^1 F(\eta) d\eta, \quad (8)$$

яке забезпечує рівність берегів BM та MC розрізу в області D (див. рис. 2).

Можна переконатися, що рівняння (8) відносно координати t_M має єдиний розв'язок на інтервалі $(0;1)$, який можна знайти методом послідовних наближень:

$$t_M^{(j+1)} = t_M^{(j)} - \frac{1}{20} \frac{BM^{(j)} - MC^{(j)}}{BM^{(j)} + MC^{(j)}} \quad (j = 0, 1, \dots), \quad (9)$$

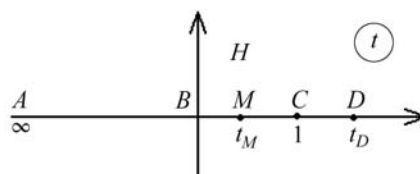


Рис. 3. Область H у площині t .

Fig. 3. Region H in the plane t .

де $t_M^{(0)} = 0,5$; $BM^{(j)} = \int_0^{t_M^{(j)}} F^{(j)}(\eta) d\eta$; $MC^{(j)} = \int_{t_M^{(j)}}^1 F^{(j)}(\eta) d\eta$; $F^{(j)}(\eta) = F(\eta)|_{t_M=t_M^{(j)}}$.

Координата t_M , яка відповідає вершині пластичної смуги у площині t , є межею збіжної послідовності (9). Довжину пластичної смуги виразимо через мінімальне значення τ_0 напруження τ_{yz} на торці щілини

$$d = \frac{b}{R} \int_0^{t_M} F(\eta) d\eta \quad (10)$$

за умови, що для знайденого значення d виконується третя із умов (4) – умова прямолінійного розвитку смуги. Взявши її до уваги під час числового експерименту, визначили відхилення кута нахилу φ площини максимального дотичного напруження у вершині смуги під час її росту від початкового значення: $\Delta = \pi/4 - \varphi$.

Дослідимо асимптотику функції $\tau(\zeta)$ на нескінченності і встановимо залежність для величин τ_0 та K_{III} . Із формул (6), (7) для $t \rightarrow \infty$ отримуємо, що $\zeta = bt/R + o(t)$, $\tau = k/(2\sqrt{t}) + o(t^{-1/2})$, а отже, $\tau = (k\sqrt{b}/\sqrt{2R})\zeta^{-1/2} + o(\zeta^{-1/2})$, якщо $\zeta \rightarrow \infty$. Прирівнюючи асимптотики напружень для щілини і тріщини на нескінченності, знаходимо:

$$K_{III}/(k\sqrt{b}) = \sqrt{\pi}/(\sqrt{2R}). \quad (11)$$

Таким чином, довжину пластичної смуги d як функцію безрозмірного аргументу $K_{III}/(k\sqrt{b})$ можна визначити через параметр $\tau_0 \in [0; k]$ за формулами (10), (11).

Початкова стадія розвитку пластичних смуг. За малих навантажень для дослідження пластичних зон (зокрема, смуг) в околі гострокінцевого концентратора напружень придатна лінійна модель пластичної зони (ЛМПЗ) [6], в якій використовують пружний розв'язок. Для її застосування необхідні також два відповідні допоміжні розв'язки задач, що не містять параметрів розмірності довжини, у пружній та пружно-пластичній поставах. Згідно з ЛМПЗ пластичну зону визначають за допоміжним пружно-пластичним розв'язком, узгодженим з допоміжним пружним, котрий, у свою чергу, узгоджено з основним пружним розв'язком. Тоді допоміжними будуть задачі антиплоскої деформації тіла, поперечний переріз якого займає перший, другий і третій квадранти. У пружно-пластичній поставі розв'язок допоміжної задачі дає формула (2), у пружній – (3) без урахування другого доданку у правій частині:

$$\tau_1^{(e)}(\zeta) = -ie^{i\pi/3} (k/\sqrt{2})(d/\zeta)^{1/3}. \quad (12)$$

Розв'язки допоміжних задач у пружно-пластичній (2) та пружній (12) поставах асимптотично еквівалентні на нескінченності. Подамо розв'язок вихідної задачі у пружній поставі. Крайову задачу для функції напружень $\tau^{(e)}(\zeta)$ у верхній півплощині $\text{Im}\zeta > 0$ без півсмуги $0 < \text{Im}\zeta < b$, $-\infty < \text{Re}\zeta < 0$ (область $D^{(e)}$) отримуємо із рівностей (1), знехтувавши в них умови для пластичної смуги:

$$\text{Im}\tau^{(e)}(\zeta) = 0 \quad (\zeta = x + ib, -\infty < x < 0); \quad \text{Re}\tau^{(e)}(\zeta) = 0 \quad (\zeta = iy, 0 < y < b);$$

$$\text{Im}\tau^{(e)}(\zeta) = 0 \quad (\zeta = x, 0 < x < +\infty); \quad \tau^{(e)}(\zeta) = K_{III}/\sqrt{2\pi\zeta} + o(\zeta^{-1/2}), \quad \text{якщо } \zeta \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Функція $\tau^{(e)}(\zeta)$ конформно відображає область $D^{(e)}$ площини ζ на четвертий квадрант площини $\tau^{(e)}$ (область $G^{(e)}$) (рис. 4). Через $\tau_0^{(e)}$ позначено мінімальне напруження τ_{yz} на торці щілини. Знайдемо функцію $\tau^{(e)}(\zeta)$ у параметричному вигляді

ді $\tau = \tau^{(e)}(t)$, $\zeta = \zeta^{(e)}(t)$ ($t \in H = \{\text{Im } t > 0\}$), увівши допоміжну комплексну площину t (рис. 5).

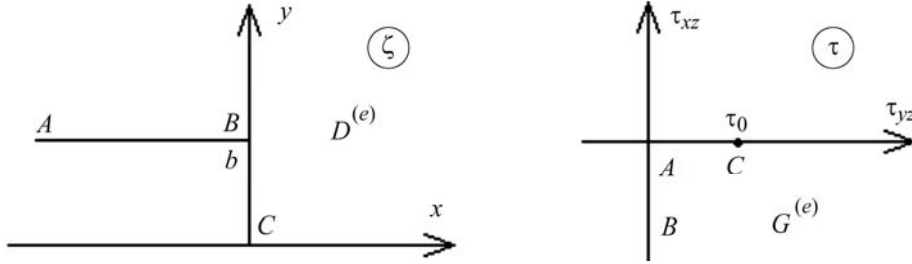


Рис. 4. Области $D^{(e)}$ і $G^{(e)}$ у площинах ζ і τ для конформного відображення (пружний розв'язок).

Fig. 4. Regions $D^{(e)}$ and $G^{(e)}$ in the planes ζ and τ for conformal mapping (elastic solution).

Обидві функції можна відшукати композицією елементарних відображень:

$$\zeta^{(e)}(t) = ib + (2b/\pi) \left(\sqrt{t^2 - 1} + \ln(\sqrt{1-t} - \sqrt{-t}) \right); \quad (14)$$

$$\tau^{(e)}(t) = \tau_0^{(e)} / \sqrt{t}. \quad (15)$$

Тут під $\ln(\sqrt{1-t} - \sqrt{-t})$ розуміємо аналітичну в область H функцію, що набуває дійсних значень, якщо аргумент логарифма є дійсним і додатним.

Знайдемо асимптотику функції $\tau^{(e)}(\zeta)$ на нескінченності і виразимо напруження $\tau_0^{(e)}$ через КІН K_{III} .

Із формул (14), (15) випливає, що $\tau^{(e)} = \tau_0^{(e)} \sqrt{2b/(\pi\zeta)} + o(1/\sqrt{\zeta})$, коли $\zeta \rightarrow \infty$.

Тому для виконання останньої умови (13) слід прийняти $\tau_0^{(e)} = K_{III}/(2\sqrt{b})$. Отже,

$$\tau^{(e)}(t) = K_{III}/(2\sqrt{bt}). \quad (16)$$

Пружний розв'язок задачі дають формули (14), (16). Визначимо його асимптотику у вершині вирізу. Якщо $t \rightarrow 0$, $\zeta^{(e)}(t) - ib = (4b/(3\pi i))t^{3/2} + o(t^{3/2})$.

Звідси та з формули (14) маємо:

$$\tau^{(e)} = K_{III}^V / (\sqrt[6]{b} \sqrt[3]{b + i\zeta}) + o((\zeta - ib)^{-1/3}),$$

$$K_{III}^V = K_{III} / \sqrt[3]{6\pi}. \quad (17)$$

За формулами (12), (17) отримуємо довжину пластичної смуги на початковій стадії розвитку на основі ЛМПЗ: $d_0 = (b\sqrt{2}/\pi)(K_{III}/(k\sqrt{b}))^3$.

Для напівбезмежної прямолінійної тріщини $\tau^{(e)} = K_{III}^0 / \sqrt{\zeta}$, $K_{III}^0 = K_{III} / \sqrt{2\pi}$, а отже, КІН тріщини і прямокутного вирізу

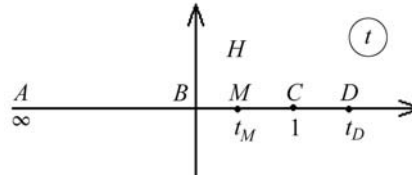


Рис. 5. Допоміжна комплексна площина для пружного розв'язку.

Fig. 5. Additional complex plane for elastic solution.

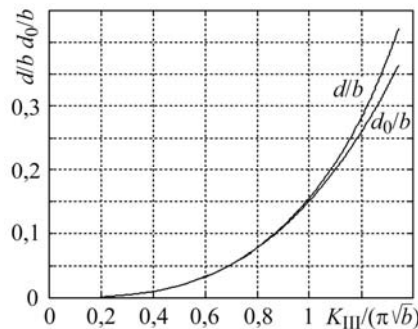


Рис. 6. Залежності довжини пластичних смуг, визначені за точним розв'язком (d) та за ЛМПЗ (d_0) від КІН K_{III} .

Fig. 6. Dependences of the plastic bands length determined by exact solution (d) and by LMPZ (d_0) on the stress intensity factor K_{III} .

сталої ширини пропорційні: $K_{III}^y / K_{III}^0 = \sqrt[6]{2\pi/9} = 0,94$, що практично збігається із результатом, одержаним іншим способом [4] (рис. 6).

ВИСНОВКИ

Отримано аналітичні розв'язки антиплоских задач для тіла з напівбезмежною прямокутною щілиною в пружній та пружно-пластичній (односмугова модель зони) поставах. Навантаження задано асимптотикою напружень на нескінченності пружного поля напружень для напівбезмежної тріщини поздовжнього зсуву, поданою через КІН. Пластичні смуги розвиваються у напрямку продовження бісектрис кутів вирізу. Під час розвитку кут їх нахилу до осі симетрії щілини поволі зменшується, що узгоджується із відомою властивістю форми континуальних пластичних зон для такого ж концентратора напружень. Однак ця тенденція не досить чітка і поки довжини смуг не перевищують 30% півширини щілини, зміна кута напрямку не досягає 5°. На початковій стадії розвитку пластичні смуги ростуть пропорційно третьому степеню КІН напівбезмежної тріщини, а результати для довжин пластичних смуг, знайдені за лінійною моделлю пластичної зони, практично збігаються з точними, поки довжини пластичних смуг не перевищують 20% півширини щілини. Також знайдено довжини пластичних смуг як функції КІН.

РЕЗЮМЕ. Получены аналитические решения антиплоских задач для тела с полубесконечной прямоугольной щелью в упругой и упругопластической (однополосная модель зоны) постановках. Нагрузка задана асимптотикой напряжений на бесконечности, равной асимптотике упругого поля напряжений для полубесконечной трещины продольного сдвига, представленной коэффициентом интенсивности напряжений (КИН). Выявлено, что развитие пластических полос начинается в направлении продолжения биссектрис углов выреза. Найдены их длины как функции КИН.

SUMMARY. An analytical solution of antiplane problems for a body with a semi-infinite rectangular slot in the elastic and elastic-plastic (one-plane model of zone) formulation is given. Load is given as stress asymptotic at infinity equal to the asymptotic of the elastic stress field of a semi-infinite crack of longitudinal shear represented by the stress intensity factor. It is found that the development of plastic bands starts in the direction of extension of the notch angles. Their length as a function of SIF is found.

1. *Кривень В. А., Валяшек В. Б., Яворська М. І.* Розвиток пластичних зон у тілі з прямокутною щілиною за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44, №4. – С. 13–20.
(*Kryven V. A., Valiashek V. B., and Yavorska M. I.* Development of plastic zones in a body with a rectangular slot under antiplane deformation // Material Science. – 2008. – 44, № 4. – P. 792–798.)
2. *Кривень В. А., Яворська М. І.* Пластичні зони при зсуві біля прямокутного і закругленого вирізів сталої ширини // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2001. – 47, № 2. – С. 138–144.
3. *Кривень В. А.* Непрерывное и разрывное решения упругопластической задачи об антиплоской деформации тела с трещиной // Физ.-хим. механика материалов. – 1985. – № 6. – С. 10–16.
4. *Саврук М. П., Казберук А.* Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами. Механіка руйнування та міцність матеріалів. Довідн. пос. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – Т. 14. – 384 с.
5. *Иванов В. И., Попов В. Ю.* Конформные отображения и их приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2002 – 324 с.
6. *Кривень В. А.* Лінійна модель пластичної зони біля гострокінцевого концентратора напружень за поздовжнього зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 4. – С. 41–46.
(*Kryven' V. A.* Linear model of a plastic zone in the vicinity of a sharp notch under the conditions of longitudinal shear // Material Science. – 2004. – 40, № 4. – P. 475–483.)

Одержано 11.11.2013