

УДК 539.3

ДИНАМІЧНІ КОЕФІЦІЄНТИ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У ПЛОЩИНІ З КОЛОВИМ ОТВОРОМ ЗА ДІЇ УДАРНИХ НЕОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Л. Й. ОНИШКО¹, М. М. СЕНЮК¹, О. Є. ОНИШКО²

¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

² Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Модифікованим методом скінченних різниць за часом та методом рядів Фур'є за кутовою координатою розв'язано плоску динамічну задачу теорії пружності про дію неосесиметричних ударних зусиль на краю колового отвору у нескінченній площині. Розраховано концентрацію напружень на отворі залежно від часу за різних коефіцієнтів Пуассона та параметрів навантаження. Встановлено, що дію зосереджених сил на отворі можна змоделювати параболічно розподіленими за кутовою координатою зусиллями.

Ключові слова: динамічна плоска задача, нескінченна пластина, коловий отвір, скінченні різниці, ряди Фур'є, неосесиметричне ударне навантаження, зосереджена сила.

Методами скінченних різниць за часом та рядів Фур'є за кутовою змінною розв'язана задача про дію довільних неосесиметрично розподілених зусиль на краю колового отвору у нескінченній пружній площині [1]. Цей підхід дає змогу розв'язати низку нових динамічних задач. Відзначимо, що раніше спроби розв'язати задачу вищезгаданими методами про дію ударних зосереджених сил (з використанням дельта-функції за кутовою координатою) на краю колового отвору призвели до неоднозначних розв'язків через погану збіжність рядів Фур'є, у які було розвинено дельта-функції Дірака. Нижче показано, що в результаті звуження ділянок параболічно розподіленого навантаження можна змоделювати дію зосереджених зусиль на краю отвору.

Постава задачі та метод розв'язування. Нехай у нескінченній пружній площині міститься коловий отвір радіуса R . Систему полярних координат (r, θ) вибрано з початком у центрі кола (рис. 1). На краю отвору прикладене ударне динамічне навантаження $p(\theta, t) = N(\theta)H(t)$, де $H(t)$ – функція Хевісайда, а $N(\theta)$ – параболічний розподіл нормальних напружень за кутом θ (рис. 1):

$$N(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 < \theta < \pi/2 - \alpha, \quad \pi/2 + \alpha < \theta < \pi, \\ -a\theta^2 + b\theta + c, & \pi/2 - \alpha < \theta < \pi/2 + \alpha, \quad 3\pi/2 - \alpha < \theta < 3\pi/2 + \alpha, \end{cases} \quad (1)$$

де 2α – кут розхилу навантажень, які охоплюють коловий отвір; a, b, c – константи.

Задачу розв'язано за нульових початкових умов на напруження та їхніх похідних за часом

$$\sigma_{rr}(r, \theta, t)|_{t=0} = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta, t)|_{t=0} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, t)|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{d}{dt} \sigma_{rr}(r, \theta, t) \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} \sigma_{r\theta}(r, \theta, t) \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{d}{dt} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, t) \right|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

і крайових умов:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = p(\theta, t), \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0. \quad (4)$$

Рис. 1. Параболічний розподіл ударних зусиль на краю колового отвору.

Fig. 1. Parabolic distribution of impact forces at the circular hole boundary.

Невідомі коефіцієнти (a, b, c) параболічної функції $N(\theta)$ (1) знаходимо за трьома точками ($N(\pi/2 \pm \alpha) = 0$, $N(\pi/2) = q$) зі системи трьох рівнянь:

$$\begin{cases} a(\pi/2 + \alpha)^2 - b(\pi/2 + \alpha) - c = 0, \\ a(\pi/2 - \alpha)^2 - b(\pi/2 - \alpha) - c = 0, \\ a(\pi/2)^2 - b\pi/2 - c = q. \end{cases} \quad (5)$$

Тоді функція зміни зовнішнього навантаження (1) від полярного кута θ для різних кутів розхилу параболі α (рис. 1) матиме вигляд

$$N(\theta) = \begin{cases} 0, & 0 < \theta < \pi/2 - \alpha, \quad \pi/2 + \alpha < \theta < \pi, \\ -q/\alpha^2 [\theta^2 - \pi\theta - (1/\alpha^2) + (\pi^2/4)], & \pi/2 - \alpha < \theta < \pi/2 + \alpha, \\ 0, & 3\pi/2 - \alpha < \theta < 3\pi/2 + \alpha. \end{cases} \quad (6)$$

Параметр q знаходимо з умови рівності константі головного вектора Y зовнішніх зусиль

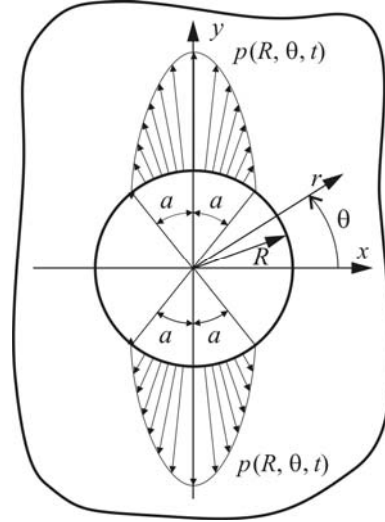
$$Y = - \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} N(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{4q}{\alpha} \left(\cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = \text{const}.$$

Використаємо формули розподілу напружень для загального випадку неосесиметрично навантаженого колового отвору динамічними зусиллями у нескінченній пружній площині [1] та знайдемо для навантаження (6) розподіл відносних напружень $\sigma_{\theta\theta}(R, \theta, t)/\sigma_0$ на контурі отвору за такими співвідношеннями:

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta, t)}{\sigma_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^j \left[\frac{\bar{P}_n^m}{\bar{L}_n(\bar{s}_{1m}, \bar{s}_{2m})} (\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2m}) \bar{L}_{5n}(\bar{s}_{1m}, \bar{s}_{1m}) - \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1m}) \bar{L}_{6n}(\bar{s}_{2m}, \bar{s}_{2m})) \right] w_{jm} \cos n\theta, \quad (7)$$

де

$$\bar{L}_n(\bar{s}_{1m}, \bar{s}_{2m}) = [\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2m}) \bar{L}_{1n}(\bar{s}_{1m}) - \bar{L}_{2n}(\bar{s}_{2m}) \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1m})],$$



$$\begin{aligned}
\bar{L}_{1n}(\tilde{s}_{1m}, \bar{s}_{1m}) &= \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) K_n''(\tilde{s}_{1m}) \bar{s}_{1m}^2 + \frac{\lambda}{\mu} K_n'(\tilde{s}_{1m}) \frac{R}{r} \bar{s}_{1m} - n^2 \frac{\lambda}{\mu} \frac{R^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{1m}), \\
\bar{L}_{1n}(\bar{s}_{1m}) &= \bar{L}_{1n}(\tilde{s}_{1m}, \bar{s}_{1m}) \Big|_{\tilde{s}_{1m}=\bar{s}_{1m}}, \quad \bar{L}_{2n}(\tilde{s}_{2m}, \bar{s}_{2m}) = 2n \left[\frac{R}{r} K_n'(\tilde{s}_{2m}) \bar{s}_{2m} - \frac{R^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{2m}) \right], \\
\bar{L}_{2n}(\bar{s}_{2m}) &= \bar{L}_{2n}(\tilde{s}_{2m}, \bar{s}_{2m}) \Big|_{\tilde{s}_{2m}=\bar{s}_{2m}}, \\
\bar{L}_{3n}(\tilde{s}_{1m}, \bar{s}_{1m}) &= 2n \left[-\frac{R}{r} K_n'(\tilde{s}_{1m}) \bar{s}_{1m} + \frac{R^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{1m}) \right], \quad \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1m}) = \bar{L}_{3n}(\tilde{s}_{1m}, \bar{s}_{1m}) \Big|_{\tilde{s}_{1m}=\bar{s}_{1m}}, \\
\bar{L}_{4n}(\tilde{s}_{2m}, \bar{s}_{2m}) &= -K_n''(\tilde{s}_{2m}) \bar{s}_{2m}^2 + \frac{R}{r} K_n'(\tilde{s}_{2m}) \bar{s}_{2m} - n^2 \frac{R^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{2m}), \\
\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2m}) &= \bar{L}_{4n}(\tilde{s}_{2m}, \bar{s}_{2m}) \Big|_{\tilde{s}_{2m}=\bar{s}_{2m}}, \\
\bar{L}_{5n}(\tilde{s}_{1m}, \bar{s}_{1m}) &= \frac{\lambda}{\mu} K_n''(\tilde{s}_{1m}) \bar{s}_{1m}^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{R}{r} \bar{s}_{1m} K_n'(\tilde{s}_{1m}) - n^2 \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{R^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{1m}), \\
\bar{L}_{5n}(\bar{s}_{1m}) &= \bar{L}_{5n}(\tilde{s}_{1m}, \bar{s}_{1m}) \Big|_{\tilde{s}_{1m}=\bar{s}_{1m}}, \quad \bar{L}_{6n}(\tilde{s}_{2m}, \bar{s}_{2m}) = 2n \left[\frac{R^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{2m}) - K_n'(\tilde{s}_{2m}) \frac{R}{r} \bar{s}_{2m} \right], \\
\bar{L}_{6n}(\bar{s}_{2m}) &= \bar{L}_{6n}(\tilde{s}_{2m}, \bar{s}_{2m}) \Big|_{\tilde{s}_{2m}=\bar{s}_{2m}}, \quad K_n'(\tilde{s}_{km}) = -K_{n+1}(\tilde{s}_{km}) + \frac{n}{\tilde{s}_{km}} K_n(\tilde{s}_{km}), \\
K_n'(\bar{s}_{km}) &= K_n'(\tilde{s}_{km}) \Big|_{\tilde{s}_{km}=\bar{s}_{km}}, \\
K_n''(\tilde{s}_{km}) &= -K_{n+1}'(\tilde{s}_{km}) + \frac{n}{\tilde{s}_{km}} K_n'(\tilde{s}_{km}) - \frac{n}{(\tilde{s}_{km})^2} K_n(\tilde{s}_{km}), \quad K_n''(\bar{s}_{km}) = K_n''(\tilde{s}_{km}) \Big|_{\tilde{s}_{km}=\bar{s}_{km}}.
\end{aligned}
\tag{8}$$

Тут $\bar{s}_{1m} = c_2 / (c_1 \Delta\tau_m)$, $\bar{s}_{2m} = 1 / \Delta\tau_m$, $\tilde{s}_{1m} = c_2 r / (R c_1 \Delta\tau_m)$, $\tilde{s}_{2m} = r / (R \Delta\tau_m)$, c_k – швидкості поздовжніх ($k = 1$) та поперечних ($k = 2$) хвиль, $\Delta\tau_m = c_2 \Delta t_m / R$ – безрозмірні скінченні різниці за часом [2], σ_0 – статичні колові напруження (у точках $\theta = 0, \pi$) для нескінченної пружної площини з коловим отвором, яка розтягується двома зосередженими силами, прикладеними в точках колового контуру $\theta = \pm\pi/2$, K_n, K_n', K_n'' – функції Макдональда n -го порядку та їхні похідні; λ, μ – сталі Ляме, $\lambda/\mu = 2\nu/(1-2\nu)$ (ν – коефіцієнт Пуассона).

Коефіцієнти w_{jm} визначаємо за відомими рекурентними співвідношеннями [2]:

$$\begin{aligned}
w_{jj} &= 1; \quad w_{j,j-1} = \Delta\tau_{j-1} / (\Delta\tau_{j-1} - \Delta\tau_j), \quad j = 2, 3, \dots; \\
w_{j,j-n} &= \frac{\Delta\tau_{j-n}^2}{\Delta\tau_{j-n}^2 - \Delta\tau_j^2} \left[\left(1 + \frac{\Delta\tau_j}{\Delta\tau_{j-1}} \right) w_{j-1,j-n} - \frac{\Delta\tau_j}{\Delta\tau_{j-1}} w_{j-2,j-n} \right]; \\
j &= 3, 4, \dots; \quad n = 2, 3, \dots, j-1.
\end{aligned}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів \bar{p}_n^m розкладемо навантаження (6) у ряд Фур'є

$$N(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n\theta$$

та знайдемо його коефіцієнти так [3]:

$$p_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} N(\theta) \cos n\theta d\theta = q \frac{8 \cos(n\pi/2)}{\pi n^2 \alpha} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} - \cos n\alpha \right). \quad (9)$$

Використовуючи формули (9), коефіцієнти \bar{p}_n^v визначаємо за рекурентними співвідношеннями [2]:

$$\bar{p}_n^m = p_n^m / \sigma_0 - \sum_{l=1}^{m-1} w_{ml}^n \bar{p}_n^l / \sigma_0, \quad (p_n^m = p_n). \quad (10)$$

Числові результати. Виконали числові розрахунки розподілу напружень (7) залежно від безрозмірного часу $\tau = c_2 t / R$ на коловому отворі, який навантажений розподіленими за параболічним законом (6) ударними зусиллями (рис. 2). Для різних кутів розхилу параболи α (див. рис. 1) максимальні відносні напруження $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_0$ отримали для точки $\theta = 0^\circ$ ($v = 0,3$) (рис. 2a). Для малих кутів $1^\circ < \alpha < 15^\circ$ та великих часів ($\tau > 10$) відносні колові напруження прямують до одиниці, тобто значення динамічних напружень наближаються до відповідних для статичної задачі за дії двох зосереджених сил, прикладених у протилежних точках контуру [4]. Отже, дію зосереджених сил можна моделювати параболічним розподілом ударних зусиль (6) для кутів $1^\circ < \alpha < 15^\circ$.

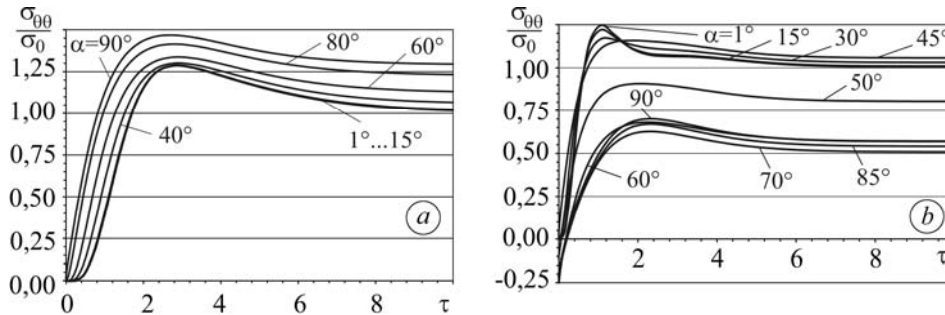


Рис. 2. Залежність напружень $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_0$ на краю колового отвору від часу для різних кутів α в точці $\theta = 0^\circ$ (a) та $\theta = 45^\circ$ (b).

Fig. 2. Time dependence of stresses $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_0$ at the circular hole boundary for various angles α at point $\theta = 0^\circ$ (a), $\theta = 45^\circ$ (b).

У точці $\theta = 45^\circ$ змінюється якісна картина залежності напружень $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_0$ від часу у всьому діапазоні значень кута α (рис. 2b).

У початковий момент часу спостерігали динамічний ефект – наявні ненульові стискальні напруження $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_0$ для точок контуру, які знаходяться в зоні дії навантаження ($45^\circ < \theta < 90^\circ$). Максимальні напруження досягаються у точках контуру, які розташовані на вільній від навантаження поверхні ($1^\circ < \theta < 45^\circ$).

Коефіцієнт Пуассона матеріалу площини ν суттєво впливає на зміну напружень $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_0$ в часі (рис. 3). Розглянули випадки, коли контур отвору навантажений по всій поверхні ($\alpha = 90^\circ$) (рис. 3a) та вздовж малих ділянок ($\alpha = 15^\circ$) (рис. 3b). Для великих часів ($\tau > 10$) напруження $\sigma_{\theta\theta} / \sigma_0$ прямують до свого статичного значення і не залежать від коефіцієнта Пуассона.

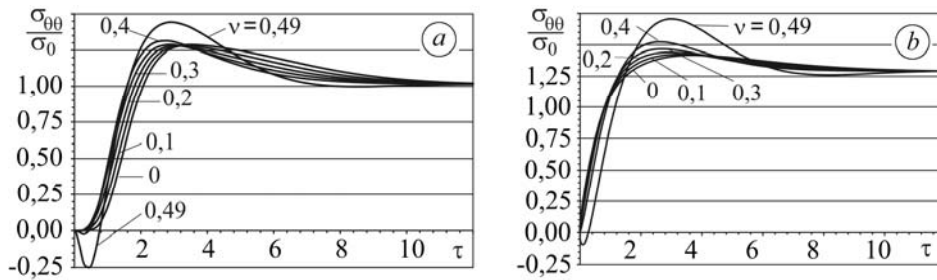


Рис. 3. Вплив коефіцієнта Пуассона на відносні напруження $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ на краю отвору ($\theta = 0^\circ$) для кутів $\alpha = 15^\circ$ (a) та $\alpha = 90^\circ$ (b).

Fig. 3. The influence of Poisson's ratio on relative stresses $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ at the circular hole boundary ($\theta = 0^\circ$) for $\alpha = 15^\circ$ (a), $\alpha = 90^\circ$ (b).

Вплив коефіцієнта Пуассона на динамічні напруження $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ у точці переходу від вільного краю отвору до навантаженого ($\theta = 75^\circ = 90^\circ - \alpha$) найвідчутливіший для малих часів $0 < \tau < 2$ (рис. 4). Динамічний ефект у початковий момент часу посилюється зі збільшенням коефіцієнта Пуассона, а для великих часів отримано відомий статичний розв'язок задачі про дію зосереджених сил [4].

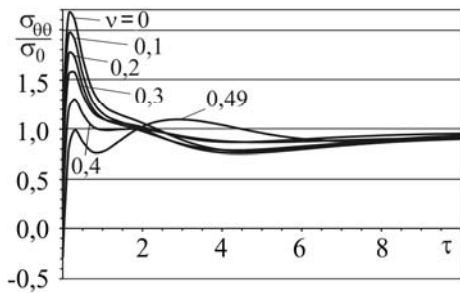


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Залежність напружень $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ на краю колового отвору від часу за різних коефіцієнтів Пуассона в точці $\theta = 75^\circ$ для кута $\alpha = 15^\circ$.

Fig. 4. Time dependence of stresses $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ at the circular hole boundary for various Poisson's ratio values at point $\theta = 75^\circ$ for $\alpha = 15^\circ$.

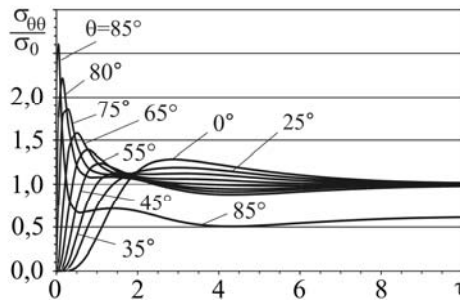


Рис. 5. Fig. 5.

Рис. 5. Часова залежність напружень $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ на краю колового отвору для різних кутів θ ($\alpha = 5^\circ$, $\nu = 0,3$).

Fig. 5. Time dependence of stresses $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ at the circular hole boundary for various angles θ ($\alpha = 5^\circ$, $\nu = 0.3$).

Для вузьких ділянок навантаженого отвору ($\alpha = 5^\circ$) швидкість зростання напружень $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ у часі суттєво залежить від кутової координати θ ($0^\circ < \theta < 85^\circ$) (рис. 5). Для точок контуру $\theta \geq 85^\circ$, що знаходяться під навантаженням, залежність напружень від часу якісно змінюється і для цієї ділянки контуру отримані результати вже не моделюють дію зосередженої сили.

ВИСНОВКИ

Розв'язано динамічну плоску задачу для нескінченної площини з коловим отвором за дії на його краю неосесиметричних зусиль, розподілених згідно з параболічним законом за кутовою координатою. Запропоновано підхід до розв'язу-

вання задачі про дію двох симетрично розташованих на краю колового отвору у нескінченній пружній площині ударних зосереджених сил. Встановлено параметри задачі, за яких дію зосереджених сил на краю колового отвору можна змоделювати параболічно розподіленим ударним зусиллям. Досліджено поведінку динамічних колових напружень на краю отвору для різних коефіцієнтів Пуассона та кутових розхилів ділянок навантаження.

РЕЗЮМЕ. Модифицированным методом конечных разностей по времени и методом рядов Фурье по угловой координате решена плоская задача теории упругости о действии неосесимметричных ударных усилий на краю кругового отверстия в бесконечной плоскости. Рассчитана концентрация напряжений на отверстии в зависимости от времени для различных коэффициентов Пуассона и геометрических параметров нагружения. Показано, что действие сосредоточенной силы можно смоделировать параболически распределенными усилиями.

SUMMARY. Using the modified finite difference method with respect to time and the Fourier series method with respect to angular variable the plane elastic theory problem on the action of nonaxisymmetrical impact forces at the circular hole boundary in an infinite plane is solved. The stress concentration at the hole depending on time for different Poisson's ratios and geometrical parameters of the loading is calculated. The action of concentrated force can be simulated by parabolic distributed forces.

1. *Онишко Л. Й., Сенюк М. М., Біда Н. М.* Дія неосесиметричного динамічного навантаження на коловий отвір у пружній нескінченній площині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – № 2. – С. 55–61.
2. *Саврук М. П.* Новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 4. – С. 194–198.
(*Savruk M. P.* New Method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics // *Materials Science.* – 2003. – 39, № 4. – P. 465–471.)
3. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.

Одержано 10.07.2014