

УДК 539.375

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЧАСТИЧНОМ КОНТАКТИРОВАНИИ  
БЕРЕГОВ ЩЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ***В. М. МИРСАЛИМОВ, А. Б. МУСТАФАЕВ**Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку*

Рассмотрено изменение температурного поля вблизи концов щели переменной ширины, сравнимой с упругими деформациями. Решение задачи о равновесии щели с частично контактирующими берегами при действии внешних растягивающих нагрузок, наведенного температурного поля и усилий на контактирующих поверхностях щели сведено к задаче линейного сопряжения аналитических функций. Считается, что на некоторой части контакта возникает сцепление берегов, а на остальной возможно проскальзывание.

**Ключевые слова:** *щель переменной ширины, температурное поле, контактные напряжения, контактная зона сцепления, зона проскальзывания.*

Создание надежных противоаварийных систем представляет собой жизненно важную задачу, особенно когда речь идет об уникальных сооружениях и безопасности людей. Одним из эффективных средств замедления распространения трещин (щелей) являются температурные и термоупругие поля [1–3]. В механике разрушения важное значение имеет проблема “залечивания” существующей в конструкции трещины. Как видно из результатов работ [3, 4], воздействие теплового источника уменьшает деформацию растягиваемой плоскости в направлении перпендикулярном трещине (щели), вследствие чего снижается коэффициент интенсивности напряжений (КИН) возле конца трещины. При некотором соотношении физических и геометрических параметров листового элемента и теплового источника в листовом элементе будут появляться зоны сжимающих напряжений, в которых берега трещины (щели) на некотором участке войдут в контакт и там возникнут контактные напряжения. Таким образом, создавая тепловое поле на пути роста трещины (щели) можно предотвратить разрушение конструкции. Создание тепловых полей оправдано легкостью их получения и многосторонним характером воздействия на процесс разрушения. Техническая простота получения в протяженном объекте любого по величине и распределению температурного и термоупругого поля создает широкие возможности изменения направления и торможения распространения трещины.

Пусть неограниченная упругая изотропная плоскость ослаблена прямолинейной щелью переменной ширины  $h(x)$ , сравнимой с упругими деформациями. На бесконечности плоскость подвергнута однородному растяжению вдоль оси ординат  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ . Берега щели свободны от внешних нагрузок. Нагреванием тепловым источником области  $S = S_1 + S_2$  до температуры  $T_0$  создается зона сжимающих напряжений на пути роста щели. Здесь  $S_1$  и  $S_2$  некоторые нагретые области возле концов щели (рис. 1). Приняты следующие допущения: все термоупругие характеристики материала плоскости не зависят от температуры; материал пластины представляет собой однородную изотропную среду. Считаем, что в началь-

---

*Контактная особа:* В. М. МИРСАЛИМОВ, e-mail: mir-vagif@mail.ru

ный момент  $t = 0$  произвольная область  $S = S_1 + S_2$  на пути роста щели в плоскости мгновенно нагревается до постоянной температуры  $T = T_0$ . Остальная часть плоскости в начальный момент имеет температуру  $T = 0$ .

Для многих металлических материалов (сталей, алюминиевых сплавов и др.) экспериментально установлено [5, 6], что в диапазоне изменения температуры до  $300^\circ \dots 400^\circ\text{C}$  термоупругие характеристики меняются слабо. Таким образом, для всех конструкционных материалов существует такой диапазон температур, в котором допущение о постоянстве характеристик материала является корректным, он устанавливается на основании зависимости модуля упругости от температуры. Опыты [1] показывают, что при нагреве трассы пути трещины до  $70 \dots 100^\circ\text{C}$  наблюдается замедление роста и торможение трещины. Наблюдали [7, 8] также эффект частичного закрытия трещины. Исследовано [8] поведение напряжений вблизи концов трещины и определены коэффициенты интенсивности напряжений. Установлено, что при некоторых параметрах задачи КИН оказываются отрицательными. Это означает, что берега трещины входят в контакт. Наличие отрицательных КИН, по крайней мере вблизи края трещины, приводит к необходимости учета частичного контакта берегов в некоторой области конца трещины.

Полагаем, что в процессе деформации берега щели возле вершин вступают в контакт на участках  $(a, \lambda_2)$  и  $(\lambda_1, b)$  (рис. 1). Принимаем, что каждая площадка контакта состоит из участков сцепления берегов  $(a, c)$  и  $(d, b)$  и участков  $(c, \lambda_2)$  и  $(\lambda_1, d)$ , на которых возможно проскальзывание. Обозначим через  $L_1$  и  $L_2$  – совокупность участков сцепления и проскальзывания, соответственно;  $L_3$  – участок берегов щели, свободный от нагрузки.

Граничные условия на берегах щели для рассматриваемой контактной задачи с исчезающими на бесконечности напряжениями записываются с учетом принципа суперпозиции в виде

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = -\sigma_0 \text{ на } L_3, \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p_y - ip_{xy} - \sigma_0 \text{ на } L_1, \quad (2)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = (1 - if)p_y - \sigma_0 \text{ на } L_2, \quad (3)$$

где  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$  – искомые контактные напряжения;  $f(x)$  – коэффициент трения. Принято, что на участках проскальзывания имеют место силы сухого трения (закон трения принимается в форме Кулона).

Основные соотношения поставленной задачи должны быть дополнены уравнениями для перемещений раскрытия берегов щели в зонах контакта

$$\frac{\partial}{\partial x}(v^+ - v^-) = -h'(x) \text{ на } L_1 + L_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u^+ - u^-) = 0 \text{ на } L_1,$$

где  $(u^+ - u^-)$  – касательная;  $(v^+ - v^-)$  – нормальная составляющие раскрытия берегов щели.

Размеры контактных зон заранее неизвестны и подлежат определению.

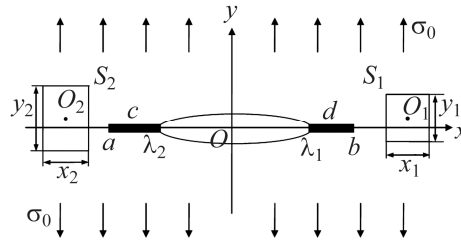


Рис. 1. Расчетная схема задачи.

Fig. 1. Calculation model of the problem.

Модель контакта с трением и сцеплением впервые рассмотрена Л. А. Галиным [9]. Обзор работ по контактному взаимодействию берегов трещин содержится в монографиях [10, 11]. Исследованы тела с трещинами с учетом сил сцепления между берегами и возможности их контакта [12–19].

Напряженное состояние в плоскости с щелью ищем в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1, \quad (4)$$

где  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  – решение задачи термоупругости для плоскости без щели;  $\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1$  – компоненты тензора напряжений в плоскости с щелью под действием нагрузок, приложенных только на поверхности щели.

Для определения  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  решаем задачу термоупругости для сплошной плоскости. Для этого вначале решаем задачу теории теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \quad T = \begin{cases} T_0 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \text{ при } t = 0,$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $a$  – коэффициент температуропроводности материала.

При определении температурного поля для упрощения задачи не учитывается возмущение температурного поля из-за наличия щели переменной толщины.

Пусть для определенности нагретая тепловым источником область  $S = S_1 + S_2$  представляет собой совокупность двух прямоугольников. После решения задачи термоупругости методом термоупругого потенциала перемещений имеем:

$$\sigma_y^0 = \sum_{k=1}^2 \sigma_{y_k}^0, \quad \tau_{xy}^0 = \sum_{k=1}^2 \tau_{xy_k}^0, \quad (5)$$

$$\sigma_{y_k}^0 = -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{4\sqrt{\pi}} \left\{ 4\sqrt{\pi}A(x, y) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ \arctg\left(\frac{y-b_k+y_k}{x-L_k+x_k}\right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \arctg\left(\frac{y_k+b_k-y}{x_k+L_k-x}\right) + \arctg\left(\frac{y_k+b_k-y}{x-L_k+x_k}\right) + \arctg\left(\frac{y-b_k+y_k}{x_k+L_k-x}\right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \int_0^t \frac{1}{\tau\sqrt{a\tau}} \left[ (x-L_k+x_k) \exp\left(-\frac{(x-L_k+x_k)^2}{4a\tau}\right) + (x_k+L_k-x) \exp\left(-\frac{(x_k+L_k-x)^2}{4a\tau}\right) \right] \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left[ \operatorname{Erf}\left(\frac{y-b_k+y_k}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \operatorname{Erf}\left(\frac{y_k+b_k-y}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] d\tau \right\};$$

$$\tau_{xy_k}^0 = -\frac{\mu(1+\nu)\alpha T_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{(x-x_k-L_k)^2 + (y-b_k+y_k)^2}{(x-x_k-L_k)^2 + (y-y_k-b_k)^2} + \right.$$

$$\left. + \ln \frac{(x-L_k+x_k)^2 + (y-y_k-b_k)^2}{(x-L_k+x_k)^2 + (y-b_k+y_k)^2} - \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[ \exp\left(-\frac{(x-L_k+x_k)^2}{4a\tau}\right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \exp\left(-\frac{(x_k+L_k-x)^2}{4a\tau}\right) \right] \left[ \exp\left(-\frac{(y-b_k+y_k)^2}{4a\tau}\right) - \exp\left(-\frac{(y_k+b_k-y)^2}{4a\tau}\right) \right] d\tau \right\},$$

где  $A(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y \in S_k) \\ 0 & (x, y \notin S_k) \end{cases}$  ( $k = 1, 2$ );  $\mu$  – модуль сдвига материала пластины;  $\nu$  –

коэффициент Пуассона;  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения.

С учетом формул (4), (5) граничные условия задачи для напряжений на берегах щели будут

$$\begin{aligned} \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= -\sigma_0 - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \text{ на } L_3, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= p_y - ip_{xy} - \sigma_0 - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \text{ на } L_1, \\ \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= (1 - if)p_y - \sigma_0 - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) \text{ на } L_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений [20] выразим через две кусочно-аналитические функции комплексного переменного  $z = x + iy$   $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$

$$\begin{aligned} \sigma_y^1 - i\tau_{xy}^1 &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\kappa$  – постоянная Мусхелишвили.

Учитывая результаты [20], на основании граничных условий (6) с учетом формул (7) приходим к задаче линейного сопряжения граничных значений функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$

$$\begin{aligned} [\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2f_0(t), \\ [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{где } f_0(t) = \begin{cases} -\sigma_0 - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_3; \\ p_y - ip_{xy} - \sigma_0 - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_1; \\ (1 - if)p_y - \sigma_0 - (\sigma_y^0 - i\tau_{xy}^0) & \text{на } L_2. \end{cases}$$

Решение задачи (8) в классе всюду ограниченных функций запишем в виде

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_0(t)dt}{\sqrt{(z-a)(z-b)(t-z)}}. \quad (9)$$

При  $z \rightarrow \infty$   $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} = z + O(1/z)$ . Корень под знаком интеграла представляет собой значение ветви соответствующей функции, выделяемой приведенным условием на верхнем берегу щели.

Для определения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеем два соотношения, являющиеся условиями разрешимости краевой задачи (8) в классе всюду ограниченных функций [20]

$$\int_a^b \frac{f_0(t)dt}{X^+(t)} = 0, \quad \int_a^b \frac{if_0(t)dt}{X^+(t)} = 0. \quad (10)$$

В соотношения (9) и (10) входят неизвестные контактные напряжения  $p_y(x), p_{xy}(x)$ .

Используя вторую формулу (7) и граничные значения функций  $\Phi(z), \Omega(z)$ , получим на отрезке  $a \leq x \leq b$  следующее равенство

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu}{1 + \kappa} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(u^+ - u^-) + i \frac{\partial}{\partial x}(v^+ - v^-) \right]. \quad (11)$$

Используя формулы Сохоцкого–Племеля [20], с учетом формулы (9) находим:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{i\sqrt{(x-a)(b-x)}}{\pi} \int_a^b \frac{f_0(t)dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-x)}}. \quad (12)$$

Подставив выражение (12) в левую часть уравнения (11) с учетом соотношений (2), (3) после некоторых преобразований получаем два сингулярных интегральных уравнения относительно неизвестных функций  $p_y(x)$ ,  $p_{xy}(x)$

$$-\frac{X_1^+(x)}{\pi} \left[ \int_{L_1+L_2} \frac{p_y(t)dt}{X_1^+(t)(t-x)} - \int_a^b \frac{(\sigma_0 + \sigma_y^0)dt}{X_1^+(t)(t-x)} \right] = -\frac{2\mu}{1+\kappa} h'(x), \quad (13)$$

$$\int_{L_1} \frac{p_{xy}(t)dt}{X_1^+(t)(t-x)} + \int_{L_2} \frac{fp_y(t)dt}{X_1^+(t)(t-x)} - \int_a^b \frac{\tau_{xy}^0(t)dt}{X_1^+(t)(t-x)} = 0, \quad (14)$$

где  $X_1^+(t) = \sqrt{(t-a)(b-t)}$ .

Решение интегральных уравнений (13) и (14) можно получить путем решения соответствующей задачи Римана [20]. Решая интегральное уравнение (13) с учетом ограниченности контактных напряжений на концах площадок контакта, найдем формулу для подсчета нормальных напряжений  $p_y(x)$ :

$$p_y(x) = \frac{X_1^+(x)X_2^+(x)}{\pi^2} \int_{L_1+L_2} \frac{f_*(\tau)d\tau}{X_2^+(x)(\tau-x)}, \quad (15)$$

где  $X_2^+(t) = \sqrt{(x-a)(\lambda_1-x)(x-\lambda_2)(b-x)}$ ;  $f_*(\tau) = f_y(\tau) + \frac{2\pi\mu}{1+\kappa} \frac{h'(\tau)}{X_1^+(\tau)}$ ;

$$f_y(\tau) = -\int_a^b \frac{(\sigma_0 + \sigma_y^0)dt}{X_1^+(t)(t-\tau)}.$$

Аналогично, решая интегральное уравнение (14), получаем формулу для подсчета касательных напряжений на участке сцепления берегов щели:

$$p_{xy}(x) = \frac{X_1^+(x)X_3^+(x)}{\pi^2} \int_{L_1} \frac{f_{xy}(\tau)d\tau}{X_3^+(x)(\tau-x)}, \quad (16)$$

где  $X_3^+(t) = \sqrt{(x-a)(c-x)(x-d)(b-x)}$ ;  $f_{xy}(x) = \int_{L_2} \frac{fp_y(t)dt}{X_1^+(t)(t-x)} - \int_a^b \frac{\tau_{xy}^0(t)dt}{X_1^+(t)(t-x)}$ .

Для определения параметров  $c$  и  $d$  имеем следующие уравнения:

$$\int_{L_1} \frac{t^{k-1}f_{xy}(t)dt}{X_3^+(\tau)} = 0 \quad k = 1, 2. \quad (17)$$

Необходимые интегралы, содержащие функции  $X^+(t)$ ,  $X_1^+(t)$ ,  $X_2^+(t)$  и  $X_3^+(t)$ , вычисляем приемом, предложенным Н. И. Мусхелишвили [20, §110].

Анализ частичного закрытия щели переменной ширины сводится к параметрическому исследованию согласно формулам (15) и (16) при различных законах распределения температурных полей и напряжений в плоскости, геометрических параметрах, а также механических постоянных материала. Непосредственно с помощью вычислений по полученным формулам определяют нормальные и касательные напряжения в контактной области, а также размеры зон сцепления и проскальзывания.

Установлена зависимость распределения контактных напряжений вдоль левой контактной зоны для щели, ширина которой изменяется по линейному зако-

ну (рис. 2). При расчетах использовали безразмерные координаты  $x = \frac{a + \lambda_2}{2} + \frac{a - \lambda_2}{2} x'$ . При этом были приняты следующие свободные параметры:  $f = 0,2$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $t_* = 4at / L_2^2 = 10$ ;  $x_2 / L_2 = 0,5$ ;  $y_2 / L_2 = 0,2$ ;  $b_2 / L_2 = 0,1$ , где  $L_2$  и  $b_2$  координаты центра области  $S_2$ ;  $(b - a)/R = 0,05$ ;  $(b - a)/R = 0,02$  (кривые 1, 2, соответственно), где  $R$  – характерный линейный размер среды.

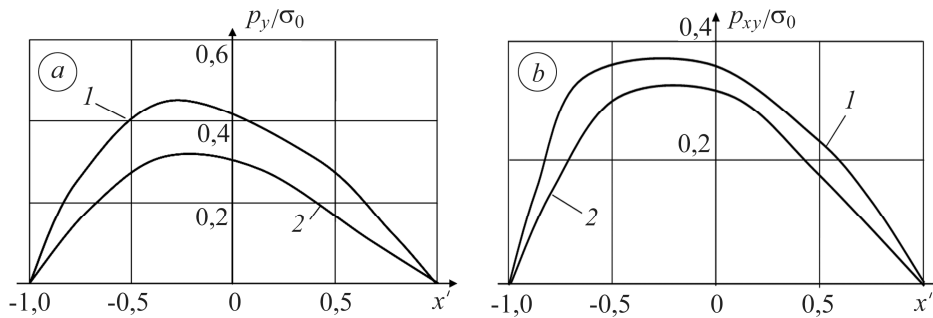


Рис. 2. Распределение нормальных (а) и касательных (б) контактных напряжений вдоль левой контактной зоны: 1 –  $(b - a)/R = 0,05$ ; 2 –  $(b - a)/R = 0,02$ .

Fig. 2. Distribution of normal (a) and tangential (b) contact stresses along the left contact zone: 1 –  $(b - a)/R = 0.05$ ; 2 –  $(b - a)/R = 0.02$ .

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что температурное поле, созданное в течение некоторого ограниченного времени с целью торможения и частичного закрытия щели, является непреодолимым барьером [1] на пути ее роста. Последующее снятие температурного поля ( $t \rightarrow \infty$ ) будет постепенно снижать сжимающие напряжения и эффект частичного закрытия щели. Коэффициенты интенсивности напряжений, достигнув при закрытии щели нулевого значения, постепенно будут возрастать до значений, обусловленных механической нагрузкой.

Под действием температурного поля максимальное растягивающее напряжение уменьшается и поворачивается по направлению к тепловому источнику. Это приводит [1, 21] к наблюдаемому в опытах смещению плоскости разрыва. После снятия температурного поля это будет способствовать увеличению внешней нагрузки необходимой для роста щели.

### ВЫВОДЫ

Предложена эффективная схема расчета частично закрытой щели переменной ширины в плоскости под действием внешних растягивающих нагрузок. На основании полученных результатов можно считать, что созданное возле вершины щели температурное поле является барьером на пути ее распространения. Учет возмущенного температурного поля будет усиливать тормозящий эффект наведенного температурного поля напряжений.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто зміну температурного поля поблизу кінців щілини змінної ширини, порівнянної з пружними деформаціями. Розв'язок задачі про рівновагу щілини з частково контактними берегами за дії зовнішніх розтягувальних навантажень, наведеного температурного поля і зусиль на контактних поверхнях щілини зведено до задачі лінійного спряження аналітичних функцій. Вважається, що на деякій частині контакту виникає зчеплення берегів, а на інших можливе проковзування.

**SUMMARY.** The changes of temperature field near the variable-length slit end, comparable to the elastic deformation, are considered. The problem on equilibrium of a slit with partially

contacting faces under the action of external tensile loads, effect of the temperature field and forces on the contacting surfaces of the slit is reduced to the problem on linear conjugation of analytic functions. It is assumed that on some part of the contact zone the faces cohesion occurs and on other part of the contact zone the slip is possible.

1. *Финкель В. М.* Физические основы торможения разрушения. – М.: Металлургия, 1977. – 360 с.
2. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
3. *Мирсалимов В. М., Кадиев Р. И.* Закрытие трещины со связями между берегами в листовом элементе при воздействии наведенного температурного поля // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2004. – С. 51–56.
4. *Кадиев Р. И., Мирсалимов В. М.* Влияние теплового источника на динамику роста трещины // Вестник Даг. гос. ун-та. – 2001. – № 4. – С. 69–73.
5. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур* / Под ред. И. И. Гольденבלата. – М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.
6. *Тимошенко С. П.* Сопrotивление материалов. – М.: Наука, 1965. – Т. 2. – 480 с.
7. *Беленький В. Д.* Об одном случае закрытия трещины в термоупругом поле // Физ.-хим. механика материалов. – 1982. – **18**, № 5. – С. 57–61.
8. *Кадиев Р. И.* Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника // Вестник ДНЦ РАН. – 2003. – № 14. – С. 15–18.
9. *Галин Л. А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // Прикл. мат. и мех. – 1945. – **9**, Вып. 5. – С. 413–424.
10. *Кит Г. С., Кривицун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 278 с.
11. *Толоконников Л. А., Пеньков В. Б.* Метод граничных представлений в двумерных задачах механики. – Тула: ТВАИУ, 1998. – 378 с.
12. *Мирсалимов В. М.* Моделирование частичного закрытия трещин в среде с пустотами // Математическое моделирование. – 2008. – **20**, № 2. – С. 32–42.
13. *Мирсалимов В. М.* Моделирование закрытия трещины со связями между берегами во втулке контактной пары // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 2. – С. 78–92.
14. *Kovtunen V. A.* Nonconvex problem for crack with nonpenetration // Z. angew Math. Mech. – 2005. – **85**, Fasz. 4. – S. 242–251.
15. *Гасанов Ш. Г.* Когезионная трещина с частично контактирующими берегами в сечении дорожного покрытия // Механика машин, механизмов и материалов. – 2012. – **19**, № 2. – С. 58–64.
16. *Мир-Салим-заде М. В.* Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Прикл. мех. и техн. физика. – 2010. – **51**, № 2. – С. 148–159.
17. *Мирсалимов В. М., Вагари А. Р.* Часткове закриття тріщин у перфорованому масиві, що виділяє тепло // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 6. – С. 39–44.  
(*Mirsalimov V. M., Vaghari A. R.* Partial crack closure in a perforated body with heat release // Materials Science. – 2011. – **47**, № 6. – P. 757–763.)
18. *Мирсалимов В. М.* Частичное закрытие трещиновидной полости в изотропной среде // Деформация и разрушение материалов. – 2013. – № 1. – С. 16–20.
19. *Мирсалимов В. М., Рустамов Б. Э.* Моделирование частичного закрытия трещиновидной полости со связями между берегами в изотропной среде // Прикл. мех. и техн. физика. – 2013. – **54**, № 6. – С. 181–190.
20. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
21. *Морозов Е. М.* О расчете на прочность по стадии разрушения // Деформация и разрушение при термических и механических воздействиях. – 1969. – Вып. 3. – С. 87–90.

Получено 30.01.2014