УДК 539.375

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНИ З ЧАСТКОВО ЗАЛІКОВАНОЮ ТРІЩИНОЮ

І. П. ШАЦЬКИЙ

Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Запропоновано модель частково залікованої тріщини в твердому тілі. В області відновлення суцільності поверхневу енергію вважають інакшою, ніж у непошкодженому матеріалі. Визначено ефективність різноманітних схем заліковування пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною для нормального відриву, поперечного зсуву, згину та комбінованого згину з розтягом. Враховано ефект закриття тріщини від згину. Розв'язано задачі про взаємодію частково залікованих дефектів.

Ключові слова: *пластина, частково залікована тріщина, гранична рівновага.*

Проблема реновації виробів, споруд та біологічних об'єктів залишається актуальною для сучасного матеріалознавства. Одним із продуктивних засобів відновлення конструкцій тривалого вжитку є ін'єкційна технологія заліковування дефектів [1–3]. Заповненням тріщиноподібної порожнини іншим матеріалом можна суттєво розвантажити її вершини. Вважають [3], що ця процедура має сенс, якщо новоутворений прошарок здатний витримати потрібний рівень напружень, а адгезія не порушується. У той же час для частково залікованих тріщин важче уникнути значної концентрації напружень на з'єднаних берегах, тому тут міцність конструкції слід аналізувати особливо ретельно.

Зазвичай задачі для тіл із заповненими податливим матеріалом тріщинами розглядають у межах моделі прошарку Вінклера і зводять їх до розв'язання інтегродиференціальних рівнянь щодо стрибків переміщень. Нижче запропоновано експрес-методику оцінки міцності тіла з частково залікованою тріщиною, придатну, наприклад, для моделювання заповнення щілини неконтрастним матеріалом з такими, як у пластини, пружними властивостями та з, можливо, нижчою тріщиностійкістю з'єднання. Спрощена розрахункова схема дає можливість будувати оцінки міцності, використовуючи відомі розв'язки задач механіки руйнування для тіл з колінеарними дефектами.

Модель частково залікованої тріщини. Розглянемо пружну ізотропну пластину $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$, послаблену прямолінійною наскрізною тріщиною $\Omega = L_0 \times [-h, h]$, розташованою вздовж відрізка осі абсцис $L_0 = (-l_0, l_0)$. Нехай на деякій ділянці тріщини $\Sigma = L_h \times [-h, h] \subseteq \Omega$, розташованій уздовж контуру L_h, у якийсь спосіб суцільність пластини відновлена, а на поверхні $\Omega \setminus \Sigma$ можливий розрив переміщень. У результаті дістаємо новий об'єкт – пластину із частково залікованою тріщиною, локалізованою вздовж контуру $L = L_0 \setminus L_h$ (загалом багатозв'язного). Для спрощення приймаємо гіпотезу, що пружні властивості тіла із залікованою тріщиною зберігаються (ігноруємо подробиці реології з'єднувального шару). Однак питома поверхнева енергія γ_h роз'єднання поверхонь на ділянці Σ

Контактна особа: І. П. ШАЦЬКИЙ, e-mail: ipshatsky@gmail.com

інша, ніж енергія γ_0 у суцільному тілі (зазвичай $\gamma_h \le \gamma_0$). Таким чином, приходимо до задачі механіки тріщин в однорідній за пружними властивостями та неоднорідній за тріщиностійкістю пластині. Необхідно встановити, яким повинен бути контур L_h, щоб за заданого співвідношення γ_h / γ_0 підвищити несучу здатність дефектної пластини.

Ступінь заліковування тріщини описуватимемо двома параметрами: відношенням тріщиностійкостей матеріалів пластини та заповнювача $\eta = \sqrt{\gamma_h / \gamma_0} = K_{1c,h} \big/ K_{1c,0}$, що характеризує якість процесу, а також відношенням розмірів залікованої ділянки та початкової тріщини $\psi = \mathrm{mes}\, L_h / \mathrm{mes}\, L_0 \in [0, 1]$, яке описує кількісну міру відновлення. Шукану ефективність заліковування подамо відношенням граничних значень навантаження для залікованої та первинної тріщини: $\chi = p_h / p_0$. Знайдемо залежності $\chi(\eta, \psi)$ для різних варіантів заліковування.

Тріщина нормального відриву. Нехай пластина навантажена зусиллями розтягу $N_y^\infty = 2hp$, рівномірно розподіленими на безмежності.

1. Нехай іще $L_h = \varnothing$, $L = L_0$. Для незалікованої тріщини завдовжки $2l_0$ граничне навантаження знаходимо за формулою Ґріффітса [4]:

$$p_0 = \sqrt{2E\gamma_0 / (\pi l_0)}, \tag{1}$$

E – модуль Юнґа; γ_0 – питома поверхнева енергія непошкодженого матеріалу.

2. Нехай тріщина залікована поблизу вершин: $L_h = (-l_0, l) \cup (l, l_0)$, $L = (-l, l)$, $\psi = 1 - l / l_0$.

Для новоутвореної укороченої тріщини завдовжки $2l$

$$p_h = \sqrt{2E\gamma_h / (\pi l)}. \tag{2}$$

Звідси

$$\chi = p_h / p_0 = \eta \big/ \sqrt{1-\psi}. \tag{3}$$

3. Нехай тріщина залікована посередині відрізка: $L_h = (-l, l)$, $L = (-l_0, -l) \cup (l, l_0)$, $\psi = l / l_0$.

Скориставшись відомими розв’язками задач механіки руйнування для колінеарних тріщин [5–7], знайдемо граничне навантаження

$$p_h = \min\left\{ \sqrt{\frac{2E\gamma_h}{\pi(l_0 - l)}\,\frac{\sqrt{2}}{F^-(\lambda)}},\ \sqrt{\frac{2E\gamma_0}{\pi(l_0 - l)}\,\frac{\sqrt{2}}{F^+(\lambda)}} \right\}, \tag{4}$$

де $F^\pm(\lambda) = \pm\left(1 \pm \lambda - E(\lambda)/K(\lambda)\right) \big/ (\lambda\sqrt{1 \pm \lambda})$, $\lambda = (l_0 - l)/(l_0 + l)$, $K(\lambda)$, $E(\lambda)$ – повні еліптичні інтеграли першого та другого роду.

Оскільки $F^+(\lambda) < F^-(\lambda)$ завжди, а $\gamma_h < \gamma_0$ за домовленістю, то небезпечними є внутрішні вершини, де

$$p_h = \sqrt{\frac{2E\gamma_h}{\pi(l_0 - l)}\,\frac{\sqrt{2}}{F^-(\lambda)}}, \tag{5}$$

тоді із формул (1), (5)

$$\chi = \frac{\eta}{\sqrt{1-\psi}}\,\frac{\sqrt{2}}{F^-\left((1-\psi)/(1+\psi)\right)}. \tag{6}$$

4. Нехай тріщина залікована на багатьох дрібних ділянках завдовжки $d-2l$ з кроком $d=2l_0/N$ (N – кількість ділянок). Тоді $\psi=1-2l/d$.

Прийнявши за великих N справедливими результати періодичної задачі [7, 8], отримаємо:

$$p_h \approx \sqrt{\frac{2E\gamma_h}{d}\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{d}} \, . \tag{7}$$

Як наслідок співвідношень (3), (8)

$$\chi \approx \eta\sqrt{\frac{\pi N}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi\psi}{2}} \, . \tag{8}$$

Для розглянутих тактик заліковування підрахували ефективність відновлення несучої здатності пластини (рис. 1). Очевидно, що інтерес викликають значення $\chi>1$. За однакових не надто малих ψ варіант заліковування тріщини посередині (особливо для багатозв’язного контуру L_h) ефективніший, ніж поблизу вершин. Цей висновок здобутий для неконтрастного заповнювача з обмеженою тріщиностійкістю і відрізняється від результатів [1, 3] для тріщини, частково ін’єктованої низькомодульним заповнювачем. Зі зменшенням параметра η, відповідального за якість з’єднання берегів, істотно знижується ефективність відновлення роботоздатності пластини загалом. Якщо $\eta<1$, то $\lim\limits_{\varphi\to+0}\chi(\eta,\varphi)\neq 1$ внаслідок стрибкоподібної зміни γ_0 на γ_h .

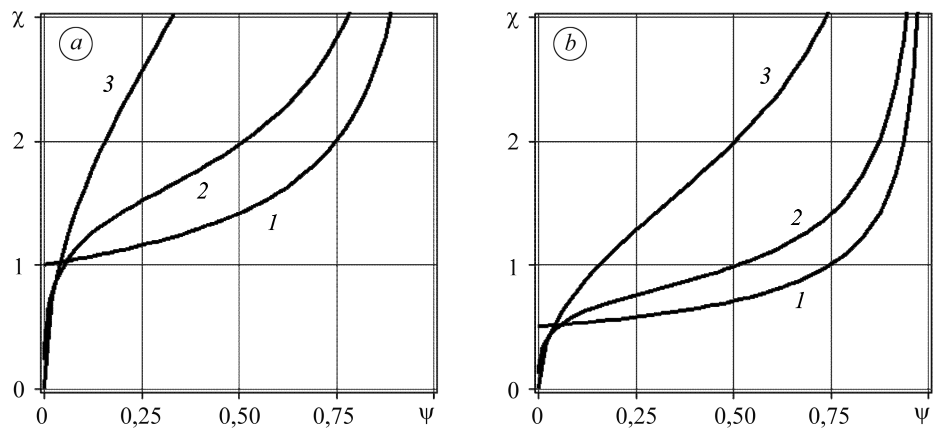

Рис. 1. Ефективність часткового заліковування тріщини: *1* – поблизу вершин (ф-ла (3)); *2* – посередині розрізу (ф-ла (6)); *3* – множинне заліковування (ф-ла (8), якщо N = 10); *a* – η = 1; *b* – 0,5.

Fig. 1. Efficiency of partial healing of cracks: *1* – at the tips (Eq. (3)); *2* – in the middle of cut (Eq. (6)); *3* – multiple healing (Eq. (8) for N = 10); *a* – η = 1; *b* – 0.5.

Взаємодія колінеарних тріщин нормального відриву. Розглянемо пластину з двома колінеарними тріщинами завдовжки $2l_0$, розташованими на віддалі d між їхніми центрами. Тоді $L_0=(-b,-a)\cup(a,b)$, $a=-l_0+d/2$, $b=l_0+d/2$.

1. Для первинних незалікованих тріщин ($L_h=\varnothing$, $L=L_0$)

$$p_0=\sqrt{\frac{2E\gamma_0}{\pi l_0}}\frac{1}{F^{-}(\lambda_0)}, \tag{9}$$

де $\lambda_0=(b-a)/(b+a)=2l_0/d$, а $F^{-}(\lambda_0)$ таке, як і у формулі (4).

2. Нехай тріщини заліковано поблизу внутрішніх вершин: $L_h = (-c,\, a) \cup (a,\, c)$, $L = (-b,\, -c) \cup (c,\, b)$. Подібно до виразів (4), (5)

$$p_h = \sqrt{\frac{2E\gamma_h}{\pi(b-c)}\frac{\sqrt{2}}{F^-(\lambda)}}\,, \tag{10}$$

де $\lambda = (b-c)/(b+c)$.

Враховуючи, що для новоутвореної конфігурації

$$\psi = (c-a)/(b-a)\,, \quad (b-c)/2 = l_0(1-\psi)\,, \quad \lambda = \lambda_0\,(1-\psi)/(1+\lambda_0\psi)\,,$$

та порівнюючи вирази (10) і (9), знайдемо:

$$\chi = \frac{\eta}{\sqrt{1-\psi}}\frac{F^-(\lambda_0)}{F^-\left(\lambda_0\,(1-\psi)/(1+\lambda_0\psi)\right)}\,. \tag{11}$$

3. Нехай тепер колінеарні тріщини заліковані поблизу дальніх вершин: $L_h = (-b,\, -c) \cup (c,\, b)$, $L = (-c,\, -a) \cup (a,\, c)$. Тоді

$$p_h = \min\left\{\sqrt{\frac{2E\gamma_0}{\pi(c-a)}\frac{\sqrt{2}}{F^-(\lambda)}},\ \sqrt{\frac{2E\gamma_h}{\pi(c-a)}\frac{\sqrt{2}}{F^+(\lambda)}}\right\}, \tag{12}$$

де $\lambda = (c-a)/(c+a)$.

Беручи до уваги, що для цієї конфігурації

$$\psi = (b-c)/(b-a)\,, \quad (c-a)/2 = l_0(1-\psi)\,, \quad \lambda = \lambda_0\,(1-\psi)/(1-\lambda_0\psi)\,,$$

із виразів (9), (12) отримаємо:

$$\chi = \frac{F^-(\lambda_0)}{\sqrt{1-\psi}}\min\left\{\frac{1}{F^-\left(\lambda_0\,(1-\psi)/(1-\lambda_0\psi)\right)},\ \frac{\eta}{F^+\left(\lambda_0\,(1-\psi)/(1-\lambda_0\psi)\right)}\right\}. \tag{13}$$

Порівнюючи результати (11) і (13) (рис. 2), дійшли висновку, що заліковування колінеарних тріщин поблизу ближніх вершин ефективніше, аніж біля дальніх. Цей результат узгоджується із висновками праць [1–3], отриманими для колінеарних тріщин, частково заповнених низькомодульним матеріалом. Зі зменшенням параметра η тактика заліковування втрачає визначальний вплив: криві *2* та *3* зближуються.

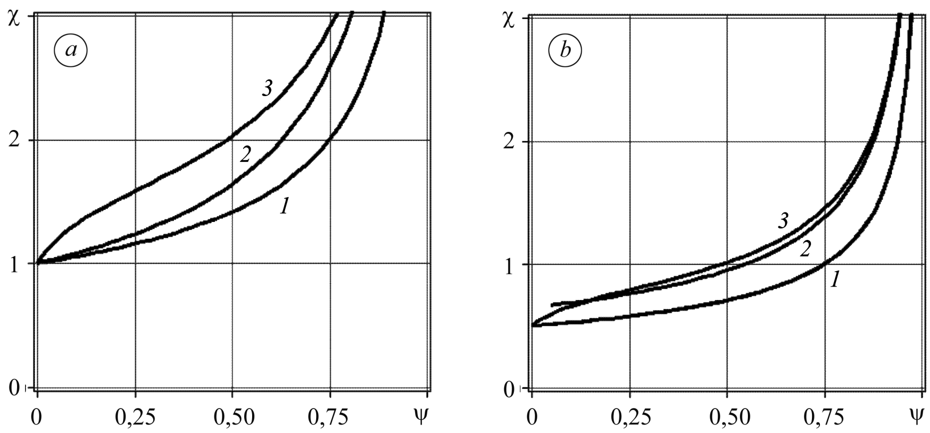

Рис. 2. Ефективність часткового заліковування колінеарних тріщин: *1* – ізольований розріз ($\lambda_0 = 0$); *2, 3* – заліковування дальніх та ближніх вершин ($\lambda_0 = 0{,}9$); *a* – $\eta = 1$; *b* – 0,5.

Fig. 2. Partial healing efficiency of collinear cracks: *1* – isolated cut ($\lambda_0 = 0$); *2, 3* – healing of remote and neighbour tips ($\lambda_0 = 0.9$); *a* – $\eta = 1$; *b* – 0.5.

Тріщини поперечного зсуву. Нехай пластина з прямолінійною тріщиною зазнає рівномірного зсуву розподіленими на безмежності зусиллями $N_{xy}^{\infty} = 2h\tau$.

1. Застосуємо до незалікованої тріщини, наприклад, σ_{θ}-критерій крихкого руйнування [6]. Тріщина завдовжки $2l_0$ розповсюджуватиметься під кутом $\theta_* = -2\,\mathrm{arctg}(1/\sqrt{2})$ до осі x за критичного навантаження

$$\tau_0 = (\sqrt{3}/2)\sqrt{2E\gamma_0/(\pi l_0)}\,.$$

2. Нехай тріщина залікована поблизу вершин ($L_h = (-l_0, l) \cup (l, l_0)$, $L = (-l, l)$). Для укороченої тріщини можливі два сценарії руйнування: розвиток під кутом θ_* з граничним напруженням

$$\tau_h = (\sqrt{3}/2)\sqrt{2E\gamma_0/(\pi l)}$$

або уздовж залікованого контуру, коли

$$\tau_h = \sqrt{2E\gamma_h/(\pi l)}\,.$$

Вибравши менше з цих значень, знайшли:

$$\chi = \tau_h / \tau_0 = \min\{1,\, 2\eta/\sqrt{3}\}\big/\sqrt{1-\psi}\,. \tag{14}$$

Формулу (14) можна отримати із (3) заміною η на $\min\{1,\, 2\eta/\sqrt{3}\}$. Оскільки вплив взаємного розташування колінеарних тріщин за поперечного зсуву такий самий, як і за нормального відриву [7], то стверджуємо, що і для інших тактик заліковування тріщин поперечного зсуву ефективність відновлення слід підраховувати за формулами (6), (8), (11), (13), виконавши таку саму заміну. Оскільки $\min\{1,\, 2\eta/\sqrt{3}\} \geq \eta$, то ефективність заліковування для тріщин поперечного зсуву є не меншою, ніж для тріщин нормального відриву.

Згин пластини з прямолінійною тріщиною. Нехай дефектна пластина зазнає згину рівномірно розподіленими моментами $M_y^{\infty} = m$ перпендикулярно до лінії розташування тріщини. Опираючись на класичні теорії плоского напруженого стану та згину пластин, врахуємо закриття тріщини від згину за моделлю контакту вздовж лінії [9].

1. Для незалікованої тріщини завдовжки $2l_0$ граничне навантаження [9, 10]

$$|m_0| = 2h^2\sqrt{(1+\kappa)/\kappa}\,\sqrt{2E\gamma_0/(\pi l_0)}\,,$$

де $\kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu)$, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу.

2. Під час заліковування поблизу вершин ($L_h = (-l_0, l) \cup (l, l_0)$, $L = (-l,\, l)$) для укороченої тріщини

$$|m_h| = 2h^2\sqrt{(1+\kappa)/\kappa}\,\sqrt{2E\gamma_h/(\pi l)}\,.$$

Для відношення $\chi = |m_h| / |m_0|$ справедлива формула (3).

3. Оскільки взаємне розташування колінеарних тріщин під час згину з урахуванням контакту берегів так само впливає на граничну рівновагу пластини, як і за розтягу [11], то твердимо, що для інших варіантів заліковування слід без змін застосовувати формули (6), (8), (11), (13).

Комбінований розтяг–згин пластини з прямолінійною тріщиною. Нехай на безмежності заданий рівномірний розтяг зусиллями $N_y^{\infty} = n$ та рівномірний згин моментами $M_y^{\infty} = m$.

1. Двопараметричне граничне навантаження для незалікованої тріщини з урахуванням контакту її берегів буде [12, 13]:

$$c(n_0,\, m_0) = 2h\sqrt{2E\gamma_0/(\pi l_0)}\,,$$

де

$$c(n,\, m) = \begin{cases} \sqrt{n^2 + \kappa\left(|\,m\,|/h\right)^2}, & n \ge \kappa\,|\,m\,|/h \\ \left(n+|\,m\,|/h\right)\sqrt{\kappa/(1+\kappa)}, & n \le \kappa\,|\,m\,|/h \end{cases},$$

причому перший рядок відповідає переважному розтягові пластини без контакту берегів тріщини, а другий враховує закриття тріщини за переважного згину.

2. У разі заліковування поблизу вершин для укороченої тріщини завдовжки $2l$ граничне навантаження

$$c(n_h,\, m_h) = 2h\sqrt{2E\gamma_h/(\pi l)}\,.$$

Відносна характеристика ефективності заліковування $\chi = c(n_h, m_h)\,/\,c(n_0, m_0)$ така, як і в формулі (3).

3. Зважаючи на те, що вплив взаємного розташування колінеарних тріщин за комбінованого розтягу–згину такий, як і для тріщин нормального відриву [14], для інших тактик заліковування без змін застосовуємо формули (6), (8), (11), (13) та відповідні висновки.

ВИСНОВКИ

Запропонована модель частково залікованої тріщини дає можливість оцінювати результати відновлення дефектних конструкцій тіла за розв’язками задач механіки руйнування для однорідного за пружними властивостями та неоднорідного за тріщиностійкістю тіла. Ключовими параметрами, які визначають ефективність часткового відновлення, є розмір новоутвореної суцільної ділянки, її тріщиностійкість, а також розташування відносно вершин дефекту. Для усіх типів навантаження заліковування поодинокої тріщини посередині за не надто малих ψ ефективніше, ніж поблизу вершин, а заліковування колінеарних дефектів біля ближніх вершин доцільніше, аніж поблизу дальніх. Зі зменшенням параметра η ефективність відновлення несучої здатності істотно знижується.

РЕЗЮМЕ. Предложена модель частично залеченной трещины в твердом теле. В области восстановления сплошности поверхностная энергия отличается от таковой для неповрежденного материала. Определена эффективность различных схем частичного залечивания пластины с прямолинейной сквозной трещиной для случаев нормального отрыва, поперечного сдвига, изгиба, а также комбинированного растяжения и изгиба. Учтен эффект закрытия трещины от изгиба. Решены задачи о взаимодействии частично залеченных коллинеарных дефектов.

SUMMARY. The model of partially healed crack in a solid is proposed. On the recovered area of the crack the surface energy differs from that in an undamaged body. The effectiveness of different schemes of partial healing of a plate with a rectilinear through crack is determined for cases of opening mode, transversal shear, bending and combined tension and bending. The crack closure effect under bending is considered. The problems of interaction of partially healed collinear defects are solved.

1. *Силованюк В., Маруха В., Онищак Н.* Ресурс міцності відновлених за ін'єкційними технологіями пошкоджених елементів споруд тривалої експлуатації // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 115–123.
2. *Онищак Н.* Оцінки зміцнення тіла з двома тріщинами, "залікованими" за ін'єкційними технологіями // Там же. – С. 561–564.
3. *Механіка* руйнування та міцність матеріалів: Довідн. пос. / За ред. В. В. Панасюка. Т. 12: Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації / В. І. Маруха, В. В. Панасюк, В. П. Силованюк. – Львів: Сполом, 2009. – 262 с.
4. *Griffith A. A.* The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Society. Ser. A. – 1920. – № 221. – P. 163–198.
5. *Панасюк В. В., Лозовий Б. В.* Визначення руйнуючих напружень для пластини з двома тріщинами рівної довжини // Доп. АН УРСР. – 1961. – № 7. – С. 876–880.
6. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
7. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
8. *Westergaard H. M.* Bearding pressures and cracks // J. Appl. Mech. – 1939. – **6**, № 2. – P. 191–198.
9. *Шацький І. П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
10. *Young M. J. and Sun C. T.* Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution // Int. J. Fract. – 1992. – **55**. – P. 81–93.
11. *Шацкий И. П.* Взаимодействие коллинеарных разрезов с контактирующими кромками в изгибаемой пластине // Физ.-хим. механика материалов. – 1990. – **26**, № 3. – С. 70–75.

    (*Shatskii I. P.* Interaction of collinear sections with contacting edges in a bent plate // Sov. Mater. Sci. – 1990. – **26**, № 3. – P. 311–316.)
12. *Шацкий И. П.* О контакте берегов разреза в пластине при комбинированном растяжении и изгибе // Там же. – 1989. – **25**, № 2. – С. 46–50.

    (*Shatskii I. P.* Contact of the edges of the slit in the plate in combined tension and bending // Sov. Mater. Sci. – 1989. – **25**, № 2. – P. 160–165.)
13. *Shatsky I. P.* A cracks closure in combined tension and bending of plates // Fracture from detects. Proc. 12th Bien. Conf. of Fract. – ECF-12. (Sheffield, 14–18 Sept. 1998) / Ed. M. W. Brown e.a. – **2**. – P. 733–738.
14. *Шацький І. П.* Гранична рівновага пластинки з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 62–64.

Одержано 05.02.2013