

УДК 539.3

ДІЯ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА В ПІРОЕЛЕКТРИКУ З ТРІЩИНАМИ ЗА СТАЛОЇ ТЕМПЕРАТУРИ НА ЇХ БЕРЕГАХ

Я. М. ПАСТЕРНАК¹, Г. Т. СУЛИМ², Р. М. ПАСТЕРНАК¹

¹ Луцький національний технічний університет;

² Львівський національний університет імені Івана Франка

На основі раніше отриманих загальних інтегральних рівнянь термоелектропружності тіл із тонкими неоднорідностями побудовано аналітичний розв'язок плоскої задачі для піроелектричного тіла з тріщиною, береги якої мають сталу температуру, за дії зосередженого джерела тепла на продовженні її осі. З урахуванням принципу автомодельності з'ясовано умови, за яких встановиться стаціонарний режим теплопровідності. Подано компактні розв'язки для коефіцієнтів інтенсивності теплових потоків, напружень та електричних зміщень. Здійснено числовий аналіз результатів.

Ключові слова: тріщина, термоелектропружність, джерело тепла, коефіцієнти інтенсивності.

Задачі термопружності та термоелектропружності тіл із дефектами привертають щораз більшу увагу дослідників унаслідок своєї практичної важливості, адже вплив полів різної фізичної природи на розвиток тріщини, як виявилось, може бути доволі істотним. Зокрема, розглянуто [1–4] плоскі задачі термопружності ізотропних кусково-однорідних тіл з теплоізолюваними тріщинами. Також досліджено [5] термопружність кусково-однорідних тіл із тріщинами та тонкими деформівними включеннями і анізотропні термопружні середовища із тріщинами, береги яких мають сталі температури протилежного знаку [6].

Задачі термоелектропружності анізотропних тіл є значно складніші за суто термопружні, а врахування дії зосереджених чинників ще більше їх ускладнює. Як наслідок, на сьогодні отримано лише декілька замкнених аналітичних розв'язків найпростіших задач та здійснено невелику кількість числово-аналітичних досліджень дещо складніших прикладів. Зокрема, із використанням комплексних потенціалів типу Лехніцького виконали [7, 8] числове дослідження задач для піроелектричних тіл із тріщинами за певної сталої температури їх берегів і дії зосереджених джерел тепла. На основі розширеного формалізму Стро побудовано [9] окремі фундаментальні розв'язки для магнетоелектропружних тіл із неоднорідностями (тріщиною, глобулярним включенням та отвором) за дії зосереджених джерел тепла. Також отримано [10, 11] сингулярні інтегральні рівняння термоелектропружності анізотропних тіл, що не містять об'ємних інтегралів по зайнятій тілом області, а також для двовимірних задач побудовано низку числових розв'язків для піроелектричних тіл із тріщинами та тонкими деформівними включеннями за однорідних та змішаних теплових крайових умов на межі тіла чи неоднорідності.

Для якісного та кількісного аналізу особливо важливо отримати аналітичні розв'язки, що дають можливість не лише дуже просто кількісно та якісно оцінити ефекти взаємодії полів та їхній вплив на параметри, які характеризують руйнування тіла або розвиток дефекту, але й виявити способи оптимізації цих параметрів. Доцільно дати їм аналітичну оцінку за дії зосереджених чинників, зокрема джере-

ла чи стоку тепла, а також з'ясувати умови математичної та фізичної коректності поставлених задач з огляду на можливість використання таких розв'язків у ролі функцій Гріна. Нижче на основі загальних інтегральних рівнянь [10, 11] термоелектропружності анізотропних тіл побудовано компактний аналітичний розв'язок задач про дію зосередженого джерела тепла в термоелектропружному середовищі з тріщиною, береги якої мають сталу температуру, проаналізовано умови забезпечення його фізичної коректності, а також здійснено числовий аналіз отриманих результатів.

Формулювання задачі. Розглянемо стаціонарні узагальнені плоске температурне поле та плоску деформацію анізотропного термоелектропружного середовища, що містить прямолінійну (тунельну) тріщину завдовжки $2a$, береги якої мають сталу температуру θ_c . Тепловий потік, напруження та електричні зміщення зникають на безмежності ($h_i(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0$, $\sigma_{ij}(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0$, $D_i(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0$). Береги тріщини вільні від механічних зусиль та поверхневих електричних зарядів, а сама тріщина непроникна для електричного поля. На продовженні тріщини на відстані d від її вершини діє зосереджене (лінійне рівномірно розподілене в напрямку фронту тріщини) джерело тепла інтенсивності q .

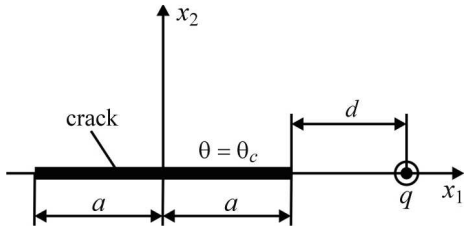


Рис. 1. Схема задачі.

Fig. 1. The scheme of the problem.

Тоді загальні інтегральні рівняння теплопровідності та термоелектропружності анізотропних тіл [10, 11] можна звести до такого вигляду:

$$\int_{-a}^a \ln |x_1 - x_0| \Sigma h_n(x_1) dx_1 = q \ln |\lambda a - x_0| + 2\pi k_t (\theta_c - \theta^\infty); \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\Delta \tilde{\mathbf{u}}(x_1)}{(x_1 - x_0)^2} dx_1 = 2\mathbf{L}^{-1} \text{Im}(\tilde{\gamma}_2^*) (\theta_c - \theta^\infty). \quad (2)$$

Тут $\Sigma(\cdot) = (\cdot)^+ + (\cdot)^-$, $\Delta(\cdot) = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$; $h_n = h_i n_i$; h_i ($i = 1, 2, 3$) – компоненти вектора теплового потоку; n_i – компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі (знаками “+” та “-” позначено величини, що стосуються верхнього і нижнього берегів тріщини відповідно); $\lambda = 1 + d/a$ – безрозмірний параметр розташування джерела тепла; $\tilde{\mathbf{u}}$ – розширений вектор переміщень та електричного потенціалу із компонентами $\tilde{u}_i = u_i$ та $\tilde{u}_4 = \phi$, де u_i – компоненти вектора переміщення у напрямку відповідних осей координат; ϕ – потенціал стаціонарного електричного поля; $k_t = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}$, а k_{ij} – коефіцієнти теплопровідності матеріалу у відповідних напрямках; \mathbf{L} , \mathbf{S} – дійсні тензори Барнет–Лоте (Barnett–Lothe) [12], котрі визначаються лише електропружними властивостями матеріалу; $\tilde{\gamma}_2^* = -\mathbf{Lc} + (\mathbf{S}^T - i\mathbf{I})\mathbf{d}$ – комплексний вектор [13], який обчислюють із використанням термоелектропружних сталих векторів \mathbf{c} , \mathbf{d} формалізму Стро [10, 12, 13]; θ^∞ – температура на

нескінченності. Оскільки у вирази (1) і (2) входить лише різниця температур $\theta_c - \theta^\infty$, то відлікова температура середовища не впливатиме на розв'язок задачі. Інтеграл у рівнянні (2) обчислюють в сенсі скінченної частини за Адамаром (Hadamard finite part).

Перед розв'язуванням задачі доцільно звернути увагу на три важливі речі. По-перше, рівняння (1) та (2) можна без будь-яких застережень використовувати як для аналізу анізотропних, так і ізотропних матеріалів, оскільки тензори \mathbf{L} , \mathbf{S} та вектор $\tilde{\gamma}_2^*$ не вироджуються за відповідної зміни характеристик матеріалу на відміну від констант формалізму Стро [10, 12, 13] чи аналогічних величин у підходах на основі комплексних потенціалів типу Лехніцького [7, 8]. По-друге, як виявиться нижче, термопружне розкриття тріщини та стрибок електричного потенціалу на ній у сформульованій задачі залежать лише від різниці заданої температури θ_c поверхні тріщини і температури θ^∞ , зумовленої дією зосередженого джерела тепла. Це пов'язано з тим, що термоелектропружні члени загальних інтегральних рівнянь [10, 11] для розглянутої задачі мають таку ж структуру, як і в рівняннях (1). По-третє, для задачі теплопровідності (1) у вигляді сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші (яке можна отримати шляхом безпосереднього диференціювання рівняння (1)) під час його розв'язування не вдається знайти константи θ^∞ , визначальної для коректності формулювання та розв'язування рівняння (2) задачі термоелектропружності.

Розв'язування задачі. Розв'язок інтегрального рівняння Карлемана

$$\int_{-a}^a \ln |x - x_0| f(x) dx = g(x_0) \quad (3)$$

має вигляд [14]

$$f(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \left[\int_{-a}^a \frac{g'(t) \sqrt{a^2 - t^2}}{t - x} dt + \pi \int_{-a}^a f(x) dx \right], \quad (4)$$

причому виконується умова

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{\pi \ln(a/2)} \int_{-a}^a \frac{g(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx. \quad (5)$$

Перший інтеграл рівняння (4) слід обчислювати в сенсі головного значення Коші.

Отже, на основі співвідношень (3)–(5) розв'язок рівняння (1) набуде такого вигляду:

$$\Sigma h_n(x_1) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x_1^2}} \left[q \frac{a \sqrt{\lambda^2 - 1}}{a \lambda - x_1} - q + \int_{-a}^a \Sigma h_n(x_1) dx_1 \right]; \quad (6)$$

$$\int_{-a}^a \Sigma h_n(x_1) dx_1 = q + \frac{1}{\ln(a/2)} \left[q \ln \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) + 2\pi k_t (\theta_c - \theta^\infty) \right]. \quad (7)$$

Із рівнянь (6) та (7) видно, що за довільно заданих значень температури θ_c берегів тріщини та усталеної на нескінченності температури θ^∞ розмірність розв'язку задачі не узгоджена через наявність у виразах логарифма довжини a тріщини, що суперечить принципу автомодельності. Тому температура θ^∞ не може бути довільною і її слід визначати за умови, що у формулі (7) величина у квадратних дужках дорівнює нулю, тобто

$$\theta^\infty = \theta_c + \frac{q \ln \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} \right)}{2\pi k_t}. \quad (8)$$

Підставляючи цей вираз для θ^∞ у формулу (7), отримаємо:

$$\int_{-a}^a \Sigma h_n(x_1) dx_1 = q. \quad (9)$$

Умова (9) є рівнянням глобального балансу теплоти у системі й означає, що все породжене джерелом тепло стікає через поверхні тріщини. А із залежності (8) випливає, що стаціонарний режим теплопровідності у попередньо розбалансованій системі “джерело тепла–тріщина” може встановитися лише тоді, коли температура середовища у віддаленій точці набуде заданого формулою (8) значення θ^∞ , унаслідок чого система збалансується. Причому неналежну залежність від одиниць вимірювання у співвідношенні (7), коли температура середовища не задовольняє умову (8), слід трактувати як відсутність передбаченого формулюванням задачі стаціонарного режиму теплопровідності.

У задачах суто теплопровідності, де за потреби визначають лише теплові потоки, температуру середовища можна встановлювати із точністю до довільної сталої, бо це не матиме впливу на ці потоки. Тому під час розв’язування задач теплопровідності не зважають на сталу θ^∞ , задовольняючи лише умову (9). Проте у задачах термопружності чи термоелектропружності це призводить до істотних помилок в обчисленні коефіцієнтів інтенсивності напружень та електричних зміщень (КІНЕЗ) для тріщин чи інших дефектів. Наприклад, розв’язок задачі теплопровідності середовища із тонким абсолютно теплопровідним включенням теж описується рівнянням (1). Проте для виконання умови (9) необхідно, щоб включення було і стоком тепла. Інакше розв’язок задачі хоч і буде математично коректним, проте фізично температура включення матиме невластиву розмірність. Тобто у задачах термопружності та термоелектропружності слід обов’язково задовольняти умови балансу тепла, щоб отриманий математично правильний розв’язок був фізично коректним.

Відтак, з урахуванням фізичних принципів, які задаються рівняннями (8), (9), остаточний розв’язок поставленої задачі набуде вигляду

$$\Sigma h_n(x_1) = \frac{q\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\pi(\lambda - x_1/a)\sqrt{a^2 - x_1^2}}. \quad (10)$$

Ввівши узагальнений коефіцієнт інтенсивності теплових потоків залежністю [15]

$$K_{h2} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma h_n(s), \quad (11)$$

де s – відстань до вершини неоднорідності, на основі виразу (10) отримаємо:

$$K_{h2}^\pm = K_{h2}(\pm a) = -\frac{q}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{\lambda \pm 1}{\lambda \mp 1}}. \quad (12)$$

Перейдемо до розв’язування інтегрального рівняння (2). Після інтегрування частинами зведемо його до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\Delta \tilde{\mathbf{u}}'(x_1)}{x_1 - x_0} dx_1 = 2\mathbf{L}^{-1} \text{Im}(\tilde{\gamma}_2^*)(\theta_c - \theta^\infty). \quad (13)$$

При отриманні рівняння (13) враховано умову нерозривності переміщень та електричного потенціалу у вершинах тріщини

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}(-a) = \Delta \tilde{\mathbf{u}}(a) = \mathbf{0}, \quad \int_{-a}^a \Delta \tilde{\mathbf{u}}'(x_1) dx_1 = \Delta \tilde{\mathbf{u}}(a) - \Delta \tilde{\mathbf{u}}(-a) = \mathbf{0}. \quad (14)$$

Розв’язок рівняння (13) за умов (14) має вигляд [14]

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}(x) = -2\mathbf{L}^{-1} \operatorname{Im}(\tilde{\gamma}_2^*)(\theta_c - \theta^\infty) \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (15)$$

Оскільки матриця \mathbf{L}^{-1} , вектор $\tilde{\gamma}_2^*$ та величини θ_c і θ^∞ сталі, то формула (15) гарантує знакосталість розкриття тріщини.

Вектор $\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = [K_{II}, K_I, K_{III}, K_D]^T$ КІНЕЗ $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV} \equiv K_D$ для тріщини введемо залежність [10]

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{u}}(s), \quad (16)$$

де s – відстань до вершини тріщини. Підставивши вираз (15) у залежність (16), отримаємо:

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = -\operatorname{Im}(\tilde{\gamma}_2^*)(\theta_c - \theta^\infty) \sqrt{\pi a}. \quad (17)$$

Звідси випливає, що в обох вершинах КІНЕЗ є однаковими, незважаючи на несиметричність геометрії задачі, оскільки її компенсує несиметричність розподілу (10) теплового потоку на берегах тріщини від стікання тепла всередину неї.

Підставивши вираз (8) у формулу (17) для тріщини за дії зосередженого джерела тепла на її продовженні, остаточно отримаємо таку компактну залежність:

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \frac{q}{2\pi k_t} \ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) \operatorname{Im}(\tilde{\gamma}_2^*) \sqrt{\pi a}. \quad (18)$$

Зокрема, для ізотропного матеріалу, коли [13]

$$\tilde{\gamma}_2^* = \frac{E\alpha}{2(1-\nu)} [-1; i; 0; 0]^T, \quad (19)$$

єдиною ненульовою складовою КІНЕЗ є КІН типу I нормального відриву:

$$K_I = \frac{qE\alpha}{4(1-\nu)\pi k_t} \ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) \sqrt{\pi a}. \quad (20)$$

Тут E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона; α – коефіцієнт теплового розширення матеріалу.

Для ортотропних (трансверсально-ізотропних) піроелектриків тетрагонального, тригонального та гексагонального класів симетрії, таких, як титанат барію, селенід кадмію, PZT тощо, ненульовим КІНЕЗ, окрім K_I , буде ще й K_D , на що вказує структура вектора $\tilde{\gamma}_2^*$.

Важливо, що коефіцієнти інтенсивності теплових потоків (12) та КІНЕЗ (18) тріщини явно не залежать від температури θ_c її берегів. Це пов'язано з тим, що для встановлення режиму стаціонарної теплопровідності у системі “джерело тепла–тріщина” необхідно, щоб середовище набуло у віддалених точках окресленої формулою (8) температури θ^∞ . І хоча, згідно з формулою (17), КІНЕЗ залежать від різниці цих двох температур, однак у стаціонарному режимі теплопровідності θ^∞ визначає лише інтенсивність джерела тепла та його відстань до тріщини.

Числовий аналіз задачі. Абсолютні значення коефіцієнтів інтенсивності визначимо через безрозмірні величини K_0^+, K_0^-, K_0^θ так:

$$K_{h2}^\pm = -\frac{q}{2\sqrt{\pi a}} K_0^\pm, \quad \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \frac{qK_0^\theta}{2\pi k_t} \operatorname{Im}(\tilde{\gamma}_2^*) \sqrt{\pi a}. \quad (21)$$

Тоді обчислення залежності безрозмірних нормованих коефіцієнтів інтенсивності теплових потоків, напружень та електричних зміщень від відстані джерела тепла до середини тріщини засвідчує, що безрозмірний коефіцієнт K_0^+ інтенсивності теплового потоку у правій вершині тріщини має вертикальну асимптоту для $\lambda = 1$

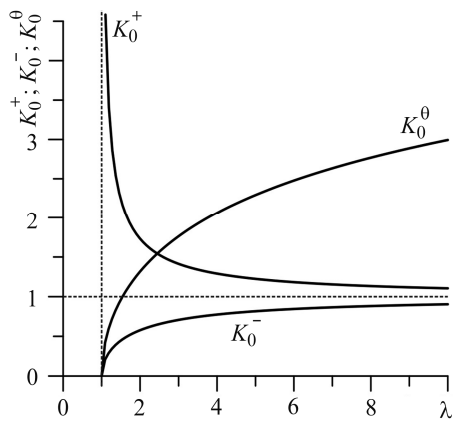


Рис. 2. Залежність безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності теплових потоків, напружень та електричних зміщень від λ .

Fig. 2. Dependence of the dimensionless intensity factors of heat flux, stress and electric displacement on λ .

Нормований КІНЕЗ K_0^θ зростає зі збільшенням відстані між джерелом тепла та тріщиною. Це пов'язано з тим, що чим далі розташоване джерело тепла, тим більше воно має нагріти середовище для виходу на режим стаціонарної теплопровідності системи “джерело тепла–тріщина”. Оскільки КІНЕЗ в обох вершинах тріщини однакові, то завжди можна підібрати знак джерела (стоку) тепла так, щоб забезпечити розкриття тріщини. Зокрема, згідно з виразом (20), для ізотропного матеріалу розкриття берегів тріщини відбуватиметься за додатної інтенсивності q джерела тепла (те саме стосується і ортотропних піроелектриків). З іншого боку, джерело тепла від'ємної інтенсивності (стік тепла) дає можливість забезпечити термопружне змикання берегів тріщини. Щоправда, при цьому на лінії контакту берегів тріщини має відбуватися належне тепловиділення, інакше треба змінювати формулювання задачі.

ВИСНОВКИ

Серед математично коректних розв'язків задач термоелектропружності фізично коректним буде той, що отриманий за виконання умови глобального балансу теплоти. У розглянутій задачі для цього необхідно, щоб у нескінченно віддаленій точці середовище набуло окресленої тут температури θ^∞ . Вперше отримано просту аналітичну залежність цієї температури від відносної відстані джерела тепла до вершини тріщини. Окреслену цією формулою температуру слід враховувати не тільки в аналітичних дослідженнях, а й під час застосування прямих числових методів (методи скінченних чи граничних елементів) для аналізу відповідних задач, оскільки неврахування цих умов призводить до фізично неправильних розв'язків. Записано формули для визначення коефіцієнтів інтенсивності теплових потоків, напружень та електричних зміщень. З'ясовано, що, незважаючи на очевидну відмінність коефіцієнтів інтенсивності теплових потоків у правій та лівій вершинах тріщини, КІНЕЗ у них однакові, оскільки вони зумовлені лише різницею $\theta_c - \theta^\infty$. Також виявлено, що розрахункові залежності для коефіцієнтів інтенсивності теплових потоків та КІНЕЗ тріщини у розглянутій задачі явно не залежать від температури берегів дефекту.

(рис. 2), тобто прямує до нескінченності із наближенням джерела до цієї вершини. Натомість його відповідник K_0^- у лівій вершині та КІНЕЗ K_0^θ в обох вершинах при $\lambda = 1$ дорівнюють нулю. Це означає, що все тепло, виділене джерелом безпосередньо біля правого вістря (коли $\lambda = 1+0$), буде відразу ж повністю стікати поруч (у правій вершині тріщини ($\lambda = 1-0$)) і джерело не збудуватиме поля температур у тілі. Тоді необхідно, щоб на нескінченності $\theta^\infty = \theta_c$.

Із віддаленням джерела тепла від вершини тріщини безрозмірні коефіцієнти інтенсивності теплових потоків K_0^+ , K_0^- прямують до одиниці відповідно з боку більших та менших значень, оскільки тріщина зі збільшенням параметра λ починає перебувати у щораз одноріднішому полі теплового потоку.

РЕЗЮМЕ. На основе ранее полученных общих интегральных уравнений термоэлектроупругости тел с тонкими неоднородностями построено аналитическое решение плоской задачи для пьезоэлектрического тела с трещиной, берега которой имеют постоянную температуру, при действии сосредоточенного источника тепла на продолжении ее оси. С учетом принципа автомодельности выяснены условия, при которых установится стационарный режим теплопроводности. Представлены компактные решения для коэффициентов интенсивности тепловых потоков, напряжений и электрических смещений. Проведен численный анализ результатов.

SUMMARY. Based on the previously obtained general boundary integral equations of thermoelectroelasticity of solids containing thin inhomogeneities the analytic solution is derived for a plane problem for pyroelectric solid with a crack, which faces are maintained at a constant temperature, and a heat source is applied at the continuation of crack axis. Accounting for the similarity principle, the conditions are obtained, which satisfaction leads to the stationary thermal conductivity. Compact closed-form solutions are obtained for heat flux, stress and electric displacement intensity factors. The numerical analysis of the results is done.

1. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Саврук М. П., Зеленьяк В. М. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр-7, 2009. – 212 с.
3. Зеленьяк В. М. Температурні напруження в круглій пластині з центральною тріщиною, зумовлені джерелом тепла // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – **30**, № 2. – С. 125–127. (Zelenyak V.M. Temperature stresses in a circular plate with a central crack induced by a heat source // Materials Science. – 1994. – **30**, № 2. – P. 272–275.)
4. Зеленьяк В. М. Термопружна взаємодія для двокомпонентного кругового включення і тріщини в пластині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 3. – С. 40–45. (Zelenyak V. M. Thermoelastic interaction of a two-component circular inclusion with a crack in the plate // Materials Science. – 2012. – **48**, № 3. – P. 301–307.)
5. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
6. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во БГУ, 1972. – 200 с.
7. Калоеров С. А., Хоросhev К. Г. Термоэлектроупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. – 2005. – **41**, № 11. – С. 116–126. (Kaloerov S. A. and Khoroshev K. G. Thermo-electroelastic state of a multiply connected anisotropic plate // Int. Applied Mechanics. – 2005. – **41**, № 11. – P. 1306–1315.)
8. Калоеров С. А., Хоросhev К. Г. Термоэлектроупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 124–133.
9. Qin Q. H. 2D Green's functions of defective magneto-electroelastic solids under thermal loading // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2005. – **29**. – P. 577–585.
10. Pasternak Ia., Pasternak R., and Sulym H. A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2013. – **37**, № 2. – P. 419–433.
11. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пастернак Р. М. Узагальнена тотожність Сомільяни для термомагнітоелектропружних анізотропних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 158–169. (Pasternak Ya. M., Sulym H. T., and Pasternak R. M. Generalized somigliana identity for thermomagneto-electroelastic anisotropic bodies // J. Mathemat. Sci. – 2015. – **205**, № 5. – P. 677–690.)
12. Qin Q. H. Green's function and boundary elements of multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 254 p.
13. Hwu C. Anisotropic elastic plates. – London: Springer, 2010. – 674 p.
14. Carrier G. F., Krook M., and Pearson C. E. Functions of a complex variable: theory and technique. – New York: McGraw-Hill, 1966. – 438 p.
15. Pasternak Ia., Pasternak R., and Sulym H. Boundary integral equations and Green's functions for 2D thermoelectroelastic bimaterial // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2014. – **48**. – P. 87–101.

Одержано 19.01.2015