

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ПІВБЕЗМЕЖНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ТРИКОМПОНЕНТНОГО СТРИЖНЯ ЗА КОНВЕКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ

Б. В. ПРОЦЬЮК, О. П. ГОРУН

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Запропоновано числово-аналітичний підхід для визначення термопружного стану півбезмежного термочутливого трикомпонентного стрижня, який взаємодіє з середовищем через конвективно-променевий теплообмін. Підхід передбачає використання перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функцій Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трикомпонентного простору та лінійних сплайнів. Досліджено вплив термочутливості і параметрів теплообміну на розподіли температури, напружень та переміщень.

Ключові слова: *теплопровідність, термочутливість, термопружність, шаруваті тіла, конвективно-променевий теплообмін.*

Шаруваті елементи конструкцій широко застосовують у різноманітних галузях промисловості. В умовах високотемпературної дії для точнішого дослідження їх термопружного стану необхідно використовувати моделі, які враховують залежність фізико-механічних характеристик від температури та конвективно-променевий теплообмін. Числові та числово-аналітичні підходи до розв'язання задач теплопровідності та термопружності для одно- та багатошарових термочутливих тіл за різних способів нагрівання, в тому числі конвективно-променевого, висвітлені раніше [1–6].

Нижче запропоновано підхід для розв'язання квазістатичних задач термопружності для півбезмежних трикомпонентних термочутливих тіл, які нагріваються внаслідок конвективно-променевого теплообміну. При цьому передбачається використання перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функцій Гріна лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трикомпонентного простору, які подаються у вигляді функціональних рядів, та лінійних сплайнів.

Формулювання задачі. Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z півбезмежний трикомпонентний стрижень (рис. 1). На поверхнях поділу $z = z_1 = 0$ та $z = z_2 = h$ виконуються умови ідеального термомеханічного контакту, а поверхня $r = R$ теплоізолювана та гладко закріплена (відсутні радіальні переміщення і дотичні напруження). Через обмежувальну поверхню $z = z_3$, на якій відсутні нормальні та дотичні напруження, відбувається конвективно-променевий теплообмін з середовищем тем-

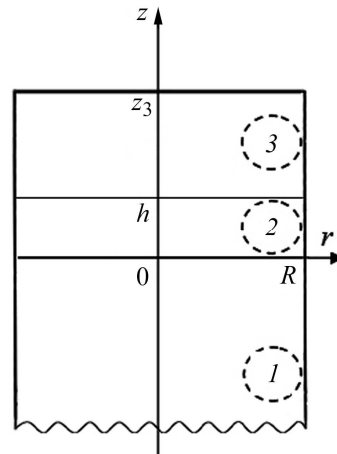


Рис. 1. Півбезмежний трикомпонентний стрижень.

Fig. 1. A half-infinite three-part rod.

ператури t_c . Початкові температури компонент є нульові. Визначимо в такому тілі нестационарне температурне поле та зумовлені ним напруження і переміщення з врахуванням залежності фізико-механічних характеристик від температури.

Розв'язання задачі теплопровідності. Для визначення температурного поля маємо рівняння теплопровідності, умови контакту, крайові та початкові умови:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial z} \right] = c_V^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tau} \quad (i = \overline{1,3}); \quad (1)$$

$$t_i(z, \tau) = t_{i+1}(z, \tau), \quad \lambda_t^{(i)} \frac{\partial t_i(z, \tau)}{\partial z} = \lambda_t^{(i+1)} \frac{\partial t_{i+1}(z, \tau)}{\partial z} \quad \text{при } z = z_i \quad (i = 1, 2); \quad (2)$$

$$\left[\lambda_t^{(3)} \frac{\partial t_3}{\partial z} + \varepsilon \sigma [T(t_3) - T(t_c)] + \alpha(t_3 - t_c) \right]_{z=z_3} = 0, \quad t_1(z, \tau)|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad t_i|_{\tau=0} = 0, \quad (3)$$

де $t_i(z, \tau)$ – температура в i -му шарі, $T(\eta) = (\eta + 273)^4$; ε – ступінь чорноти; σ – стала Стефана–Больцмана; α – коефіцієнт теплообміну; індексу $i = 1$ відповідають величини, які належать першій компоненті $-\infty < z < 0$, $i = 2$ – другій (проміжковому шару) $0 < z < z_2$, $i = 3$ – третій $z_2 < z < z_3$.

З використанням перетворення Кірхгофа $\theta_i = \frac{1}{\lambda_{0i}} \int_0^{t_i} \lambda_t^{(i)}(x) dx$, за припущен-

ня, що коефіцієнти теплопровідності лінійно залежать від температури $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{0i}(1 + \beta_i t_i)$, коефіцієнти об'ємної теплоємності мають вигляд $c_V^{(i)}(t_i) = c_{0i} c_i(t_i)$ ($i = 1, 2, 3$), а коефіцієнти температуропровідності a_i в межах кожної компоненти є сталими $\frac{\lambda_t^{(i)}(t_i)}{c_V^{(i)}(t_i)} \approx a_i = \frac{\lambda_{0i}}{c_{0i}}$, що характерно для низки матеріалів [7], задачу теплопровідності (1)–(3) зведено до одного рівняння з узагальненими за z похідними та крайових і початкових умов [5]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = c_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} F_{j+1}(\tau) \delta'(z - z_j); \quad (4)$$

$$\lambda_{0,3} \frac{\partial \theta_3}{\partial z} \Big|_{z=z_3} + F_1(\tau) = 0, \quad \theta_1(z, \tau)|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad \theta_i|_{\tau=0} = 0, \quad (5)$$

де $F_1(\tau) = \varepsilon \sigma [T(\theta_3^*(z_3, \tau)) - T(t_c)] + \alpha(\theta_3^*(z_3, \tau) - t_c)$; $F_{i+1}(\tau) = \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_{i+1}} \right) \times$
 $\times [\theta_{i+1}(z_i, \tau) - \beta_{i+1}^{-1} (\sqrt{1 + 2\beta_{i+1} \theta_{i+1}(z_i, \tau)} - 1)]$; $\theta_3^*(\tau) = \beta_3^{-1} (\sqrt{1 + 2\beta_3 \bar{\theta}_3(\tau)} - 1)$; $\bar{\theta}_3(\tau) =$
 $= \theta_3(z_3, \tau)$; $\theta(z, \tau) = \theta_1(z, \tau) + \sum_{k=1}^2 [\theta_{k+1}(z, \tau) - \theta_k(z, \tau)] S(z - z_k)$; $S(z)$ – функція Гевісайда; $\delta'(z)$ – похідна від дельта-функції Дірака; $\lambda_0(z)$ та $c_0(z)$ мають вигляд

$$p_0(z) = p_{0,1} + \sum_{i=1}^2 (p_{0,i+1} - p_{0,i}) S(z - z_i). \quad (6)$$

За допомогою функцій Гріна $G(z, \zeta, \tau)$ лінійної нестационарної задачі теплопровідності для трикомпонентного простору [8] розв'язок задачі (4), (5) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \theta(z, \tau) = & \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^{\tau} \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' - \\ & - \int_0^{\tau} \left\{ G(z, \zeta, \tau - \tau') F_1(\tau') + \lambda_{0,3} \bar{\theta}_3(\tau') \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial z} \right\} \Big|_{z=z_3} d\tau'. \end{aligned} \quad (7)$$

Для визначення $\theta_{j+1}(z_j, \tau)$ ($j=1,2$) та $\theta_3(z_3, \tau)$, які входять у відповідні підінтегральні функції співвідношення (7), апроксимуємо [5] кожен з функцій $F_i(\tau)$, $\theta_3^*(\tau)$ та $\bar{\theta}_3(\tau)$ лінійним сплайном такого вигляду:

$$g(\tau) = s_1^{(1)}(g)\tau + s_1^{(0)}(g) + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} (s_{k+1}^{(1)}(g)\tau + s_{k+1}^{(0)}(g) - s_k^{(1)}(g)\tau - s_k^{(0)}(g))S(\tau - \tau_k), \quad (8)$$

де $s_1^{(1)}(\zeta) = [\zeta(\tau_i) - \zeta(\tau_{i-1})] / \Delta\tau_i$; $s_1^{(0)}(\zeta) = [-\zeta(\tau_i)\tau_{i-1} + \zeta(\tau_{i-1})\tau_i] / \Delta\tau_i$; $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ($i = \overline{1, K_\tau}$); $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_{K_\tau}$; K_τ – кількість вузлів сплайна.

Підставивши у рівняння (7) вирази для функцій Гріна та знайшовши відповідні інтеграли з урахуванням (8), отримуємо співвідношення для змінних Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \theta_i(\bar{z}, \text{Fo}) = & \eta_{i,1} \gamma_{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}, F_2) + \eta_{i,2} \gamma_{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}, F_3) - \\ & - \eta_{i,3} \left[\gamma_{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}, F_4) - \frac{a_{i3}^*}{2a_{i0}} \gamma_{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}, \theta_3(\bar{z}_3, \text{Fo})) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}, \zeta) = & s_1^{(0)}(\zeta) \psi_1^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) + s_1^{(1)}(\zeta) \psi_2^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) + \\ & + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left[(s_{k+1}^{(0)}(\zeta) - s_k^{(0)}(\zeta)) \psi_3^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) + \right. \\ & \left. + (s_{k+1}^{(1)}(\zeta) - s_k^{(1)}(\zeta)) \psi_4^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \right], \end{aligned}$$

$$F_4(\text{Fo}) = \sigma^*(T(\theta^*(\bar{z}_3, \text{Fo})) - T(t_c)) + \text{Bi}(\theta^*(\bar{z}_3, \text{Fo}) - t_c),$$

$$\eta_{1,3} = \frac{2\delta_2 \lambda_{0,3}}{\sqrt{a_0}(\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)}, \quad \eta_{2,3} = \frac{\lambda_{0,3}}{\sqrt{a_0}(\delta_2 + \delta_3)}, \quad \eta_{3,3} = \frac{\lambda_{0,3}}{2\sqrt{a_0}\delta_3},$$

$$\psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) = l_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo}) \quad (j=1,2), \quad \psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}) = \vartheta_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo}),$$

$$\psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}) = \vartheta_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo}) \quad \text{при } \rho=1,2;$$

$$\psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) = l_\rho^{i,j}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \quad (j=1,2), \quad \psi_\rho^{i,3}(\bar{z}, \text{Fo}) = \vartheta_{\rho,\chi}^{i,1}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k),$$

$$\psi_\rho^{i,4}(\bar{z}, \text{Fo}) = \vartheta_{\rho,\varphi}^{i,2}(\bar{z}, \text{Fo} - \text{Fo}_k) \quad \text{при } \rho=3,4;$$

$$\vartheta_{\rho,y}^{1,p}(\bar{z}, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,1}^1 (a_{12}^* (1+2n)\bar{h} + a_{13}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) - \bar{z}, \xi),$$

$$\vartheta_{\rho,y}^{2,p}(\bar{z}, \xi) = y_{\rho,2}^1 (a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + \bar{h} - \bar{z}, \xi) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,2}^1 (a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + 2n\bar{h} - \bar{z} + \bar{h}, \xi) - \\
& - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,2}^1 (a_{23}^* (\bar{z}_3 - \bar{h}) + (1+2n)\bar{h} + \bar{z}, \xi), \\
\vartheta_{\rho,y}^{3,p}(\bar{z}, \xi) & = y_{\rho,3}^1(\bar{z}_3 - \bar{z}, \xi) + (-1)^{\delta_{p2}} v_2 y_{\rho,3}^0(2\bar{h} - \bar{z}_3 - \bar{z}, \xi) + \\
& + v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,3}^1(2n\bar{h}a_{32}^* + \bar{z}_3 + \bar{z} - 2\bar{h}, \xi) - \\
& - v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n y_{\rho,3}^1(2(1+n)\bar{h}a_{32}^* + \bar{z}_3 + \bar{z} - 2\bar{h}, \xi), \\
\chi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi) & = (S(\xi))^{\delta_{p3}} \left(2 \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0}\xi} \right] - \frac{\zeta}{\sqrt{a_i}} \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}\sqrt{\xi}} \right) \right) \right) \text{ при } \rho=1,3; \\
\chi_{2,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo}) & = \frac{\sqrt{\text{Fo}}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0} \text{Fo}} \right] \times \\
& \times \left(\frac{4}{3} \text{Fo} + \frac{\zeta^2}{3a_{i0}} \right) - \frac{\zeta}{2\sqrt{a_{i0}}} \left(\frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo} \right) \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}\sqrt{\text{Fo}}} \right) \right), \\
\chi_{4,i}^{\rho'}(\zeta, \text{Fo} - \text{Fo}_k) & = S(\text{Fo} - \text{Fo}_k) \left(\frac{\sqrt{\text{Fo} - \text{Fo}_k}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[\frac{-\zeta^2}{4a_{i0}(\text{Fo} - \text{Fo}_k)} \right] \left(-\frac{2}{3} (\text{Fo} - \text{Fo}_k)^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo} \right) - \frac{\zeta}{2\sqrt{a_{i0}}} \left(\frac{\zeta^2}{3a_{i0}} + 2\text{Fo} \right) \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}\sqrt{\text{Fo} - \text{Fo}_k}} \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

де $\text{Fo} = \frac{a_0 \tau}{l_0^2}$; $\text{Fo}_k = \frac{a_0 \tau_k}{l_0^2}$; $\text{Bi} = \frac{\alpha l_0}{\lambda_{0,3}}$; $\sigma^* = \frac{\varepsilon \sigma l_0}{\lambda_{0,3}}$; δ_{ij} – символ Кронекера; l_0 – деякий лінійний розмір; a_0 – величина з розмірністю коефіцієнта теплопровідності; $a_{ij}^* = \sqrt{\frac{a_i}{a_j}}$; $\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{a_i}}$; $v_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$; $v_2 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\delta_3 + \delta_2}$; $\bar{z} = \frac{z}{l_0}$; $\bar{z}_i = \frac{z_i}{l_0}$; $\bar{h} = \frac{h}{l_0}$; $a_{ij} = \frac{a_i}{a_j}$; функціям $y_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi)$ відповідають функції $\chi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi)$ або $\varphi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta, \xi)$, якщо індекс “y” в $\vartheta_{\rho,y}^{i,p}$ набуває значення відповідно φ або χ ; $\varphi(\zeta, \xi)$ і решта позначень збігаються з наведеними у праці [6].

Поклавши у співвідношеннях (9) в $\theta_i(\bar{z}, \text{Fo})$ ($i=2,3$) відповідно $\bar{z} = \bar{z}_j + 0$ ($j=1,2$), $\bar{z} = \bar{z}_3$ і $\text{Fo} = \text{Fo}_k$ ($k=1, K_\tau$), отримаємо рекурентну систему трьох нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\theta_2(\bar{z}_1, \text{Fo}_k)$, $\theta_3(\bar{z}_2, \text{Fo}_k)$ та $\theta_3(\bar{z}_3, \text{Fo}_k)$. Розв'язавши її, знайдемо вирази для змінних Кірхгофа, а температурне поле $t_i(\bar{z}, \text{Fo})$ визначимо зі співвідношення $t_i(\bar{z}, \text{Fo}) = \beta_i^{-1}(\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(\bar{z}, \text{Fo})} - 1)$.

Розв'язок задачі термопружності. У тілі ненульовими будуть радіальні та кільцеві напруження [5, 9]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_0(\bar{z}, Fo) = -\frac{\bar{E}(\bar{z}, Fo)}{1 - \bar{\nu}(\bar{z}, Fo)} \bar{\Phi}(\bar{z}, Fo). \quad (10)$$

При цьому радіальні переміщення відсутні, а осьові визначають зі співвідношення

$$w(\bar{z}, Fo) = \int_{\bar{z}_3}^{\bar{z}} \frac{1 + \bar{\nu}(z, Fo)}{1 - \bar{\nu}(z, Fo)} \bar{\Phi}(\bar{z}, Fo) dz. \quad (11)$$

Тут функції $\bar{E}(\bar{z}, Fo)$, $\bar{\nu}(\bar{z}, Fo)$, $\bar{\Phi}(\bar{z}, Fo)$, які мають вигляд (6), в межах i -ої компоненти збігаються відповідно з модулями пружності $E_i(t_i)$, коефіцієнтами Пуассона $\nu_i(t_i)$, тепловими деформаціями $\Phi_i(t_i) = \int_0^{t_i(\bar{z}, Fo)} \alpha_{ti}(\eta) d\eta$, де $\alpha_{ti}(t_i)$ – температурні коефіцієнти лінійного розширення.

Числові дослідження. Апробовано методуку за різних параметрів теплообміну для випадку, коли фізико-механічні характеристики першої та третьої компоненти відповідали ніобію ($\alpha_{i1}(t_i) = (6,186 + 0,00236t_i) \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $\lambda_i^{(1)} = 53,17(1 + 0,226 \cdot 10^{-3}t_i) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C})$; $a_i = 23,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $E_i(t_i) = (100 - 918 \cdot 10^{-5}t_i - 411 \cdot 10^{-8}t_i^2) \cdot 10^9 \text{ N}/\text{m}^2$, $\nu_i = 0,33$), а проміжкового шару – платини ($E_2(t_2) = (168 - 338 \cdot 10^{-4}t_2) \cdot 10^9 \text{ N}/\text{m}^2$; $\alpha_{i2}(t_2) = (8,865 + 0,00278t_2) \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$; $a_2 = 24,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $\lambda_i^{(2)} = 71,301(1 + 0,207 \cdot 10^{-3}t_2) \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$, $\nu_2 = 0,35$) при $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $z_3 = 10h$.

Щоб вибрати крок сітки сплайна у співвідношеннях (9), порівняли розподіли температури у фіксованих точках для різних проміжків часу залежно від K_τ . Встановлено, що для часів $\tau \leq \tau^*$, де $\tau^* = 12 \cdot 10^3 \text{ s}$ – час, близький до виходу на стаціонарний режим, достатньо обмежитись $K_\tau = 10$, оскільки збільшення K_τ (зменшення кроку сітки) практично не впливає на точність обчислень.

Результати досліджень у вигляді графіків подані на рис. 2–3 (суцільні лінії відповідають залежним від температури, пунктирні та штрихові – сталим фізико-механічним характеристикам, взятим при 700 та 0 $^\circ\text{C}$ відповідно).

За конвективно-променевого теплообміну (рис. 2) вплив тепловіддачі є менший, ніж лише за конвективного, що помітніше за вищої температури середовища. Так, збільшення коефіцієнта тепловіддачі за конвективно-променевого теплообміну зумовлює підвищення температури при $t_c = 1100^\circ\text{C}$ і $t_c = 1800^\circ\text{C}$ відповідно до 12 і 8%, а за конвективного (відсутнє випромінювання) – до 17 і 20%. Неврахування променевого теплообміну призводить до заниження температури при $t_c = 1800^\circ\text{C}$ до 25%, а при $t_c = 1100^\circ\text{C}$ – до 15%. Різниця між температурами, обчисленими з та без врахування конвективного теплообміну зменшується зі збільшенням температури середовища, зокрема, при $t_c = 1100^\circ\text{C}$ вона може досягати 55%, а при $t_c = 1800^\circ\text{C}$ – 20%.

У межах окремих областей різниця між температурами (рис. 2b, c), обчисленими за температурозалежних та сталих характеристик, взятих при 0 $^\circ\text{C}$ для одних часів є менша, ніж взятих при 700 $^\circ\text{C}$, а для інших – більша. Температури, обчислені з та без врахування термочутливості можуть відрізнятись на 10%.

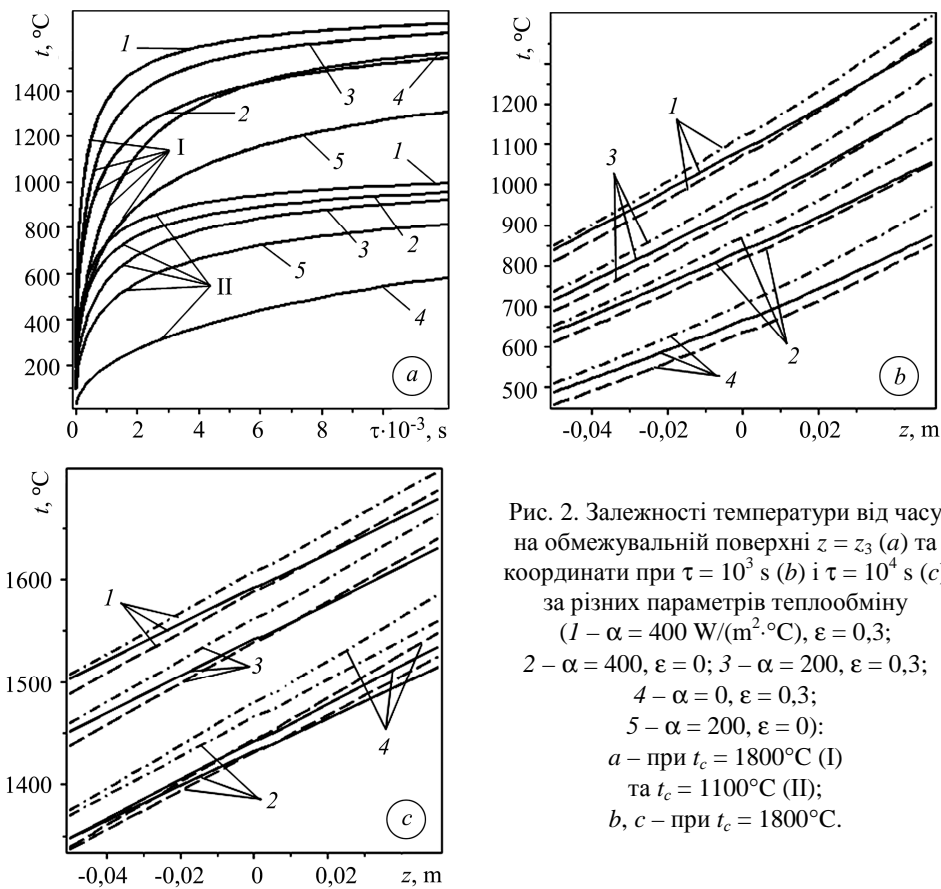


Fig. 2. Dependences of temperature on time for the limited surface $z = z_3$ (a) and coordinates $\tau = 10^3 \text{ s}$ (b) and $\tau = 10^4 \text{ s}$ (c) for different parameters of heat exchange ($1 - \alpha = 400 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, $\epsilon = 0,3$; $2 - \alpha = 400$, $\epsilon = 0$; $3 - \alpha = 200$, $\epsilon = 0,3$; $4 - \alpha = 0$, $\epsilon = 0,3$; $5 - \alpha = 200$, $\epsilon = 0$): a – at $t_c = 1800^\circ\text{C}$ (I) and $t_c = 1100^\circ\text{C}$ (II); b, c – at $t_c = 1800^\circ\text{C}$.

Характер поведінки напружень на поверхнях $z = h$ та $z = z_3$ є таким, як і на поверхні $z = 0$ (рис. 3a). Напруження на поверхнях поділу – розривні, по товщині проміжкового шару майже не змінюються, а на контактуючих з ним поверхнях першого та третього шару є практично однакові. Неврахування випромінювання чи тепловіддачі зумовлює зниження абсолютних значень напружень відповідно до 15 і 40%, їх стрибків на поверхнях поділу до 13 і 50% та переміщень до 11 і 38%.

Різниця між напруженнями з та без урахування термочутливості (рис. 3b, c) може досягати 17%. У фіксовані моменти часу ця різниця для характеристик, взятих при 0°C , у першій та третій компоненті може бути менша, ніж для характеристик, взятих при 700°C , а у проміжковому шарі – більша. Крім того, аналогічно як і для температури, в межах окремих областей ця різниця в певні моменти часу для характеристик, взятих при 0°C може бути менша, ніж для характеристик, взятих при 700°C , але більша за інших часів. Різниця між переміщеннями з та без урахування термочутливості (рис. 3d) для характеристик, взятих при 700°C , є більшою, ніж для взятих при 0°C і може досягати 15%.

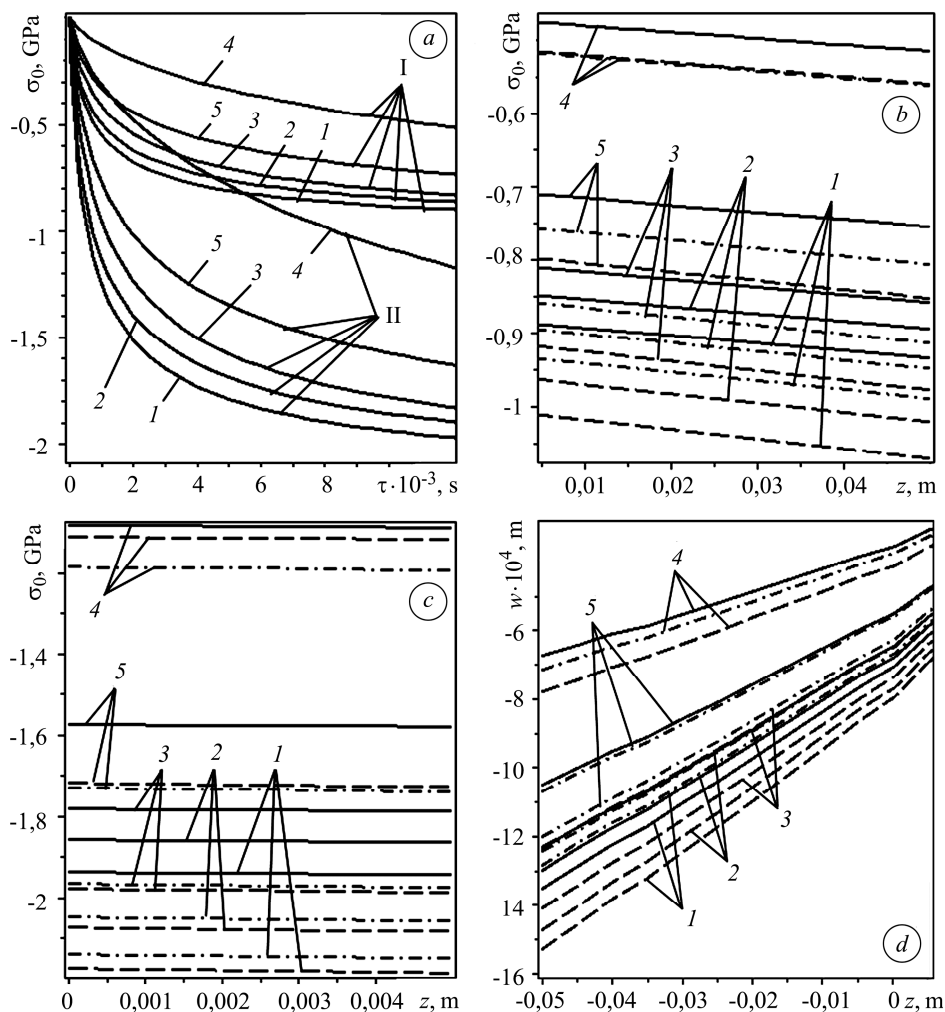


Рис. 3. Залежності напружень від часу на поверхнях $z = z_1 - 0$ (I) і $z = z_1 + 0$ (II) (a), від координати в третій компоненті (b) і проміжковому шарі (c) та переміщень (d) від координати при $\tau = 10^4$ s та $t_c = 1100^\circ\text{C}$ за різних параметрів теплообміну (1 – $\alpha = 400$ W/(m²·°C), $\varepsilon = 0,3$; 2 – $\alpha = 400$, $\varepsilon = 0$; 3 – $\alpha = 200$, $\varepsilon = 0,3$; 4 – $\alpha = 0$, $\varepsilon = 0,3$; 5 – $\alpha = 200$, $\varepsilon = 0$).

Fig. 3. Dependences of stresses on time at the surfaces $z = z_1 - 0$ (I) and $z = z_1 + 0$ (II) (a), on coordinate in the third component (b) and in the intermediate layer (c) and also displacement (d) on coordinate at $\tau = 10^4$ s and $t_c = 1100^\circ\text{C}$ for different parameters of heat exchange (1 – $\alpha = 400$ W/(m²·°C), $\varepsilon = 0,3$; 2 – $\alpha = 400$, $\varepsilon = 0$; 3 – $\alpha = 200$, $\varepsilon = 0,3$; 4 – $\alpha = 0$, $\varepsilon = 0,3$; 5 – $\alpha = 200$, $\varepsilon = 0$).

ВИСНОВКИ

Запропоновано і апробовано числово-аналітичний підхід до розв'язання квазістатичних задач термопружності для півбезмежного трикомпонентного термо-чутливого стрижня з урахуванням конвективно-променевого теплообміну. Відповідну задачу теплопровідності з використанням перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функцій Гріна у вигляді функціональних рядів та лінійних сплайнів зведено до розв'язання рекурентної системи трьох нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень змінної Кірхгофа на поверхнях поділу та обмежувальній поверхні у вузлах сітки сплайна. Отримано вирази для радіальних та кільце-

вих напружень і осьових переміщень. Проаналізовано вплив термочутливості і параметрів променевого та конвективного теплообміну на розподіли температури, напружень та переміщень.

РЕЗЮМЕ. Предложено численно-аналитический подход для определения термоупругого состояния полубесконечного термочувствительного трехсоставного стержня, который взаимодействует со средой путем конвективно-лучевого теплообмена. Подход предполагает использование преобразования Кирхгофа, обобщенных функций, функций Грина линейной нестационарной задачи теплопроводности для трехсоставного пространства и линейных сплайнов. Исследовано влияние термочувствительности и параметров теплообмена на распределения температуры, напряжений и перемещений.

SUMMARY. A numerical-analytical approach to determination of the state of a thermoelastic half infinite three-component thermosensitive rod, which interacts with the medium by convective-radiant heat exchange, is proposed. The approach involves the use of Kirchhoff transformation, generalized functions, Green functions of linear non-stationary heat conduction problem for a three-component space and linear splines. The influence of thermosensitivity and parameters of heat exchange on the distributions of temperature, stress and displacement is studied.

1. *Mohammad Azadi and Mahboobeh Azadi.* Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick-walled FGM cylinder with temperature-dependent material properties using Hermitian transfinite element // *J. Mechan. Sci. and Techn.* – 2009. – **23**, № 10. – P. 2635–2644.
2. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл // Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра; в 5-ти т. – Львів: Сполом, 2009. – Т. 3. – 412 с.
3. *Шевчук В., Гавриш О., Шевчук П.* Визначення температурного поля півпростору з багатосаровим покриттям за променево-конвективного нагрівання // IX МНК “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” / Під заг. ред. І. О. Лудковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача, 2014. – С. 173–175.
4. *Численно-аналитический* метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности / В. Д. Белик, Б. А. Урюков, Г. А. Фролов, Г. В. Ткаченко // *Инженерно-физический журнал.* – 2008. – **81**, № 6. – С. 1058–1062.
5. *Процюк Б. В.* Квазистатические температурные напряжения в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2003. – Вып. 38 – С. 63–69.
6. *Процюк Б., Горун О.* Квазистатичний термопружний стан безмежного трискладового термочутливого тіла за дії джерела тепла // *Наук. збірник “Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології”.* – 2014. – Вып. 19. – С. 136–146.
7. *Зиновьев В. Е.* Теплофизические свойства металлов при высоких температурах: Справ. – М.: Металлургия, 1989. – 384 с.
8. *Процюк Б. В., Верба І. І.* Нестационарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу // *Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.* – 1999. – Вып. 1. – С. 200–205.
9. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Температурні напруження та переміщення в багатосаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2002. – **38**, № 6. – С. 31–38.
(*Kushnir R. M., Protsyuk B. V., and Synyuta V. M.* Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange // *Materials Science.* – 2002. – **38**, № 6. – P. 798–808.)

Одержано 09.12.2014