

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ПІВПЛОЩИНИ З КРИВОЛІНІЙНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА УМОВ ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВАННЯ

В. М. ЗЕЛЕНЯК, Л. І. КОЛЯСА

Національний університет "Львівська політехніка"

Розглянуто двовимірну задачу стаціонарної теплопровідності і термопружності для півплощини, що містить внутрішню криволінійну тріщину і нагрівається на локальній ділянці краю тепловим потоком. Задачу зведено до двох сингулярних інтегральних рівнянь на контурі тріщини. Числовий розв'язок інтегральних рівнянь одержано методом механічних квадратур. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах параболічної тріщини.

Ключові слова: криволінійна тріщина, температурне поле, коефіцієнт інтенсивності напружень, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

Двовимірні задачі термопружності для напівнескінчених тіл з тріщинами розглядали раніше. Зокрема, вивчали [1–4] термонапружений стан півплощини з внутрішньою прямолінійною тріщиною та розглядали різні температурні і силові умови на берегах тріщини і краю півплощини. Методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) досліджували також плоский термопружний стан у півпросторі, що містить внутрішню чи крайову довільно орієнтовану прямолінійну тріщину або періодичну їх систему [5–7], у нескінченній площині з тріщиною, розміщеною вздовж дуги кола або еліпса і з різними температурними умовами на її берегах, а також з періодичною системою таких тріщин [8]. Нижче вивчено інтенсивність температурних напружень в околі вершин криволінійної тріщини, що міститься в півплощині, яка нагрівається на частині свого краю тепловим потоком.

Формулювання задачі. Розглянемо пружну півплощину, що містить криволінійну тріщину з контуром L_1 (рис. 1), зв'язаним з локальною системою координат $x_1O_1y_1$, вісь O_1x_1 якої утворює кут α_1 з віссю Ox . Вісь Ox знаходиться на краю півплощини, а вісь Oy напрямлена назовні краю півплощини. Точка O_1 визначає в основній системі координат xOy комплексні координати $z_1^0 = x_1^0 + iy_1^0$, зв'язок між цими системами задано співвідношеннями $z = z_1 e^{i\alpha_1} + z_1^0$, $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$. Обмежена за шириною ділянка краю півплощини нагрівається тепловим потоком інтенсивності $q(x)$. Інші частини краю теплоізолювані:

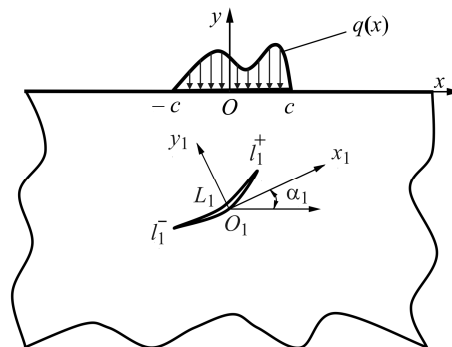


Рис. 1. Геометрія півплощини з криволінійною тріщиною.

Fig. 1. Geometry of a half-plane with a curvilinear crack.

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \begin{cases} -q(x), & |x| \leq c, \\ 0, & |x| > c. \end{cases}$$

Тут $T(x, y)$ – температура; λ – коефіцієнт теплопровідності. Вважаємо також, що край півплощини вільний від зовнішніх навантажень, а температура і напруження на нескінченності відсутні. Задачу розглядаємо за умов стаціонарного температурного поля.

Температурне поле. Нехай береги тріщини L_1 теплоізолювані:

$$\frac{\partial T^\pm(t_1)}{\partial n} = 0, \quad t_1 \in L_1. \quad (1)$$

Тут n – зовнішня нормаль до лівого берега розрізу L_1 ; t_1 – комплексні координати точок на контурі L_1 в локальній системі координат $x_1 O_1 y_1$; індекси “+” і “-” вказують на крайові значення відповідних величин зліва і справа від контуру L_1 .

Подамо загальну температуру у півплощині з тріщиною у вигляді $T(x, y) = T_0(x, y) + T_*(x, y)$, де $T_0(x, y)$ – температура в однорідній суцільній півплощині (без тріщини) від заданого теплового потоку $q(x)$; $T_*(x, y)$ – збурена температура, викликана тріщиною. Температурне поле [9]

$$T_0(x, y) = -\frac{1}{\pi\lambda} \int_{-c}^c q(\zeta) \ln \sqrt{(x-\zeta)^2 + y^2} d\zeta + C, \quad (2)$$

$$|x| < \infty, \quad |y| < 0, \quad C - \text{довільна стала.}$$

Температуру $T_*(x, y)$ подамо у вигляді $T_*(x, y) = \text{Re } f(z)$ і скористаємось комплексним потенціалом температури $F(z) = f'(z)$ [10]:

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \left[\frac{1}{\xi_1 - z} - \frac{1}{\bar{\xi}_1 - z} \right] \gamma'(t_1) dt_1, \quad \xi_1 = t_1 e^{i\alpha_1} + z_1^0. \quad (3)$$

Задовольнивши з використанням комплексного потенціалу (3) крайову умову (1), одержимо СІР для невідомої функції $\gamma'(t_1)$ на контурі L_1 :

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \text{Im} [K(t_1, \tau_1) dt_1 + L(t_1, \tau_1) \overline{dt_1}] \gamma_1(t_1) = -\text{Im} [F_0(\eta_1) e^{i(\beta_1 + \alpha_1)}]. \quad (4)$$

Тут

$$K(t_1, \tau_1) = \frac{e^{i(\beta_1 + \alpha_1)}}{i(\xi_1 - \eta_1)}; \quad L(t_1, \tau_1) = \frac{e^{i(\beta_1 + \alpha_1)}}{i(\bar{\xi}_1 - \eta_1)}, \quad \eta_1 = \tau_1 e^{i\alpha_1} + z_1^0, \quad e^{i\beta_1} = d\tau_1 / ds;$$

$\gamma'(t_1)$ – похідна від невідомого стрибка температури за переходу через контур тріщини; s – елемент дуги контуру тріщини; $F_0(z) = \partial T_0(x, y) / \partial x - i \partial T_0(x, y) / \partial y$, де температура $T_0(x, y)$ визначена за рівністю (2).

Рівняння (4) для довільної правої частини має єдиний розв’язок за умови

$$\int_{L_1} \gamma'(t_1) dt_1 = 0, \quad (5)$$

яка забезпечує неперервність температури за обходу контуру тріщини.

Температурні напруження. Нехай півплощина з тріщиною знаходиться під дією стаціонарного температурного поля $T(x, y)$. Уважатимемо, що береги тріщини L_1 під час деформування не контактують і вільні від навантаження:

$$[N(t_1) + iS(t_1)]^\pm = 0, \quad t_1 \in L_1. \quad (6)$$

Визначимо термопружний стан півплощини з тріщиною від дії збуреного температурного поля $T_*(x, y)$. Виберемо комплексні потенціали напружень у формі [10]

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z); \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{Q_1(t_1) e^{i\alpha_1} dt_1}{\zeta_1 - z}; \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{Q_1(t_1) e^{i\alpha_1} dt_1}{z - \bar{\zeta}_1} + \frac{(\zeta_1 - \bar{\zeta}_1) \overline{Q_1(t_1) e^{-i\alpha_1} dt_1}}{(\bar{\zeta}_1 - z)^2} \right]; \\ \Psi_1(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{Q_1(t_1) e^{-i\alpha_1} dt_1}}{\zeta_1 - z} - \frac{\bar{\zeta}_1 Q_1(t_1) e^{i\alpha_1} dt_1}{(\zeta_1 - z)^2} \right]; \\ \Psi_2(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left\{ \frac{\bar{\zeta}_1 Q_1(t_1) e^{i\alpha_1} dt_1}{(\bar{\zeta}_1 - z)^2} + \left[\frac{(\bar{\zeta}_1 - \zeta_1)(\bar{\zeta}_1 + z)}{(\bar{\zeta}_1 - z)^3} - \frac{1}{\bar{\zeta}_1 - z} \right] \overline{Q_1(t_1) e^{-i\alpha_1} dt_1} \right\}. \end{aligned}$$

Задовольнивши з використанням комплексних потенціалів (7) крайову умову (6), одержимо СР для невідомої функції $Q(t_1)$ на контурі L_1 :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} [R(t_1, \tau_1) Q(t_1) dt_1 + S(t_1, \tau_1) \overline{Q(t_1) dt_1}] = 0, \quad \tau_1 \in L_1, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} R(t_1, \tau_1) &= M(t_1, \tau_1) - e^{i\alpha_1} \left\{ \frac{1}{T_{11}} - \frac{(\bar{\zeta}_1 - \xi_1)}{T_{11}^2} - \frac{\overline{d\tau_1}}{d\tau_1} e^{-2i\alpha_1} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(2\eta_1 - \xi_1 - \bar{\eta}_1)(\bar{\zeta}_1 - \xi_1)}{T_{11}^3} \right] - \frac{1}{T_{11}} \right\}; \\ S(t_1, \tau_1) &= N(t_1, \tau_1) + e^{-i\alpha_1} \left[\frac{(\xi_1 - \bar{\zeta}_1)}{\bar{T}_{11}^2} - \frac{1}{T_{11}} + \frac{\overline{d\tau_1}}{d\tau_1} e^{-2i\alpha_1} \frac{H_{11}}{T_{11}^2} \right], \\ H_{11} &= \xi_1 - \eta_1, \quad T_{11} = \xi_1 - \bar{\eta}_1; \\ M(t_1, \tau_1) &= e^{i\alpha_1} \left[\frac{1}{H_{11}} + \frac{\overline{d\tau_1} e^{-2i\alpha_1}}{d\tau_1 \bar{H}_{11}} \right]; \quad N(t_1, \tau_1) = e^{-i\alpha_1} \left[\frac{1}{\bar{H}_{11}} - \frac{\overline{d\tau_1} e^{-2i\alpha_1} H_{11}}{d\tau_1 \bar{H}_{11}^2} \right]; \\ Q(t_1) &= g'(t_1) + 2i\beta_t \gamma(t)/(1 + \chi), \quad \beta_t = \alpha_t E, \quad \chi = 3 - 4\mu; \quad (9) \end{aligned}$$

$g'(t_1)$ – похідна від невідомого стрибка переміщень за переходу через контур тріщини; α_t , E , μ , – відповідно коефіцієнт лінійного теплового розширення, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона.

Інтегральне рівняння (8) має єдиний розв'язок за виконання умови

$$\int_{L_1} g'(t_1) dt_1 = 0, \quad (10)$$

яка забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини.

Скориставшись співвідношенням (9), умову (10) подамо так:

$$\int_{L_1} Q(t_1) dt_1 = -\frac{2i\beta_t}{1+\chi} \int_{L_1} t_1 \gamma'(t_1) dt_1. \quad (11)$$

Для розв'язку розглядуваної задачі використовували розв'язок інтегральних рівнянь задачі теплопровідності (4), (5) відносно функції $\gamma'(t_1)$. Далі із розв'язку інтегральних рівнянь задачі термопружності (8), (11) знаходили функцію $Q(t_1)$ і визначали коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) K_I і K_{II} , які характеризують напружено-деформований стан в околі вершин тріщини [4]:

$$K_I^\pm - iK_{II}^\pm = \mp \lim_{t_1 \rightarrow l_1^\pm} \left[\sqrt{2\pi |t_1 - l_1^\pm|} Q(t_1) \right]. \quad (12)$$

Тут дійсні величини K_I^\pm і K_{II}^\pm з індексом “-” відповідають початку тріщини ($t_1 = l_1^-$), а з індексом “+” – кінцю ($t_1 = l_1^+$).

Числовий розв'язок інтегральних рівнянь задач теплопровідності та термопружності знаходимо методом механічних квадратур [4]. Оскільки температура $T_0(x, y)$ не викликає напружень в однорідній півплощині без тріщини [11], то КІН, визначені згідно з виразами (12) від збурені температури $T_*(x, y)$, дають повний розв'язок задачі термопружності.

Числовий аналіз. Нехай контур криволінійної тріщини L_1 – дуга параболи з вершиною в точці $(0, -d)$ і закінчується в точках $(\pm l, 0)$ у системі координат $x_1 O_1 y_1$. Вважаємо, що пружна півплощина нагрівається на ділянці шириною $2c$ вільного краю тепловим потоком сталої інтенсивності $q = \text{const}$ (рис. 2).

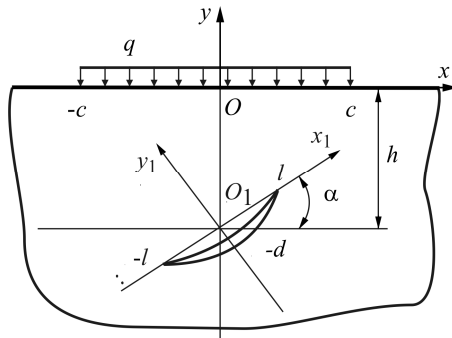


Рис. 2. Геометрія півплощини, що нагрівається локальним тепловим потоком і послаблена криволінійною тріщиною.

Fig. 2. Geometry of a half-plane, heated by a local heat flux and weakened by a curvilinear crack.

Побудували (рис. 3) залежності відносних КІН $k_1^\pm = K_I^\pm \lambda(1+\chi) / q\beta_t l \sqrt{l}$ і $k_2^\pm = K_{II}^\pm \lambda(1+\chi) / q\beta_t l \sqrt{l}$ від кута нахилу тріщини α для різних значень параметра $\varepsilon = d/l$, коли $c/h = 1,5$, $l/h = 0,5$. За умови $\varepsilon = 0$ одержано графік для прямолінійної тріщини. Суцільні лінії – права вершина (k_1^+ , k_2^+), штрихові – ліва (k_1^- , k_2^-).

Абсолютне значення КІН k_1^\pm , k_2^\pm в обох вершинах криволінійної тріщини найбільше для кута її нахилу $\alpha = 0$ (вісь тріщини паралельна до краю півплощини) і найменше для кута $\alpha = \pi/2$ (коли вона перпендикулярна), як і для прямолінійної тріщини [6]. При цьому, якщо для прямолінійної тріщини $k_1^\pm = 0$ і $k_2^\pm = 0$ для $\alpha = \pi/2$, то для криволінійної $k_1^\pm \neq 0$ і $k_2^\pm \neq 0$. Виявили [6], що для півплощини з прямолінійною тріщиною зі збільшенням ділянки локального нагріву або з наближенням тріщини до краю півплощини КІН k_1^\pm та k_2^\pm зростають. Анало-

гічна залежність і для криволінійної тріщини. Значення КІН $k_1^- < 0$ (ліва вершина) для кутів нахилу криволінійної тріщини $0 \leq \alpha \leq \pi/3$ і $k_1^+ < 0$ (права вершина) для всіх $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ свідчать про контакт берегів. Тому, щоб коректно розв'язати задачу, необхідно розглядати контактну задачу для тіла з тріщиною. Однак значення $k_1^\pm < 0$ теж можна використати для розв'язання задачі за сумісної дії декількох видів навантаження, за яких $k_1^\pm > 0$ і береги тріщини не контактуватимуть. У розглядуваній задачі береги тріщини не дотикаються тільки в лівій вершині ($k_1^- > 0$) для кутів нахилу $\pi/3 \leq \alpha \leq \pi/2$. Тоді, згідно з σ_θ -критерієм (за гіпотезою про початковий ріст тріщини), із рівнянь граничної рівноваги [12]

$$\cos^3 \frac{\theta_*^\pm}{2} \left(K_I^\pm - 3K_{II}^\pm \operatorname{tg} \frac{\theta_*^\pm}{2} \right) = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi}}$$

можна знайти критичні значення локального теплового потоку q_c , коли тіло починає локально руйнуватись за $q_c = \frac{\lambda(1+\chi)}{\alpha_t El \sqrt{\pi l}} \cdot \frac{K_{IC}}{\cos^3 \frac{\theta_*^\pm}{2} \left(k_1^\pm - 3k_2^\pm \operatorname{tg} \frac{\theta_*^\pm}{2} \right)}$, де K_{IC} –

стала, яка характеризує опір матеріалу руйнуванню і яку визначають експериментально; $\theta_*^\pm = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1^\pm - \sqrt{(k_1^\pm)^2 + 8(k_2^\pm)^2}}{4k_2^\pm}$ – кути початкового росту тріщини з її вершин l^\pm .

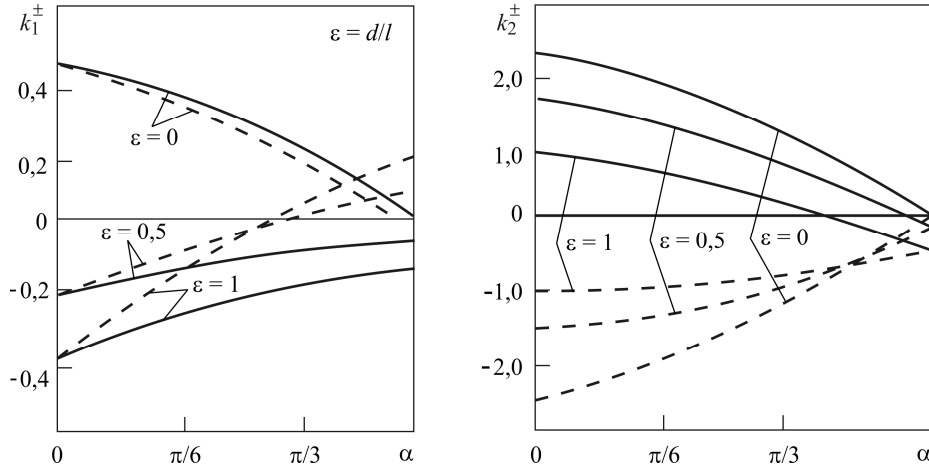


Рис. 3. Залежності безрозмірних КІН k_1^+ , k_2^+ (суцільні лінії) та k_1^- , k_2^- (штрихові) від кута нахилу тріщини α для $\epsilon = \{0; 0,5; 1\}$, $c/h = 1,5$; $l/h = 0,5$.

Fig 3. Dependences of dimensionless SIF k_1^+ , k_2^+ (solid lines) and k_1^- , k_2^- (dashed) on the bias angle α for $\epsilon = \{0; 0,5; 1\}$, $c/h = 1,5$; $l/h = 0,5$.

У часткових випадках для параметра $\epsilon = 0,5$, якщо кут нахилу тріщини $\alpha = \pi/3$, відносно критичне значення теплового потоку $\tilde{q}_c \equiv q_c \alpha_t El \sqrt{\pi l} / (K_{IC} \cdot \lambda(1+\chi)) = 0,86$, $\theta_*^- = 1,23$; якщо $\alpha = 5\pi/12$, то $\tilde{q}_c = 1,04$, $\theta_*^- = 1,08$; якщо $\alpha = \pi/2$, то

$\tilde{q}_c = 1,95$, $\theta_*^- = 0,73$, тобто зі збільшенням кута нахилу тріщини критичне значення локального теплового потоку зростає.

ВИСНОВКИ

Методом СІР отримано розв'язок плоскої задачі теплопровідності і термопружності для півплощини з внутрішньою криволінійною тріщиною за локального нагрівання краю півплощини. За коефіцієнтами інтенсивності напружень $k_1^- > 0$ і $k_2^- \neq 0$ біля лівої вершини тріщини для різних кутів нахилу тріщини знайдено критичні значення локального теплового потоку q_c , після досягнення якого тріщина починає рости і тіло локально руйнується.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена двумерная задача стационарной теплопроводности и термоупругости для полуплоскости, которая содержит внутреннюю криволинейную трещину и нагревается на локальном участке края тепловым потоком. Задача сведена к двум сингулярным интегральным уравнениям по контуру трещины. Численное решение интегральных уравнений получено методом механических квадратур. Определены коэффициенты интенсивности напряжений у вершинах параболической трещины.

SUMMARY. A two-dimensional problem of stationary heat conduction and thermoelasticity for a half-plane, which contains a curved crack and is heated on the local part of the half-plane edge, is considered. The problem is reduced to two singular integral equations at the crack contour. Numerical solutions of integral equations are obtained by the method of mechanical quadratures. The stress intensity factors at the tips of the parabolic crack are evaluated.

1. *Sekine H.* Thermal stress singularities at tips of a crack in a semi-infinite medium under uniform heat flow // Eng. Fract. Mech. – 1975. – **7**, № 4. – P. 713–729.
2. *Sekine H.* Thermal stresses near tips of an insulated line crack in a semi-infinite medium under uniform heat flow // Eng. Fract. Mech. – 1977. – **9**, № 2. – P. 499–507.
3. *Tweed I. and Lowe S.* The thermoelastic problem for a half-plane with an internal line crack // Int. J. Eng. Sci. – 1979. – **17**, № 4. – P. 357–363.
4. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. *Конечны С., Евтушенко А., Зеленяк В.* Влияние формы распределения фрикционного теплового потока на напряженное состояние полупространства с приповерхностным разрезом // Трение и износ. – 2002. – **23**, № 2. – С. 115–119.
6. *Matysiak S., Yevtushenko A., and Zelenjak V.* Frictional heating of a half-space with cracks. I. Single or periodic system of subsurface cracks // Tribology Int. – 1999. – **32**. – P. 237–243.
7. *Matysiak S., Yevtushenko A., and Zelenjak V.* Frictional heating of a half-space with an edge crack // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 2000. – **43**, № 2. – С. 127–134.
8. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами – К.: Наук. думка, 1983. – 230 с.
9. *Коровчинский М. В.* Основы теории термического контакта при локальном трении // Вопросы трения и проблемы смазки. – М.: Наука, 1968. – Ч. II. – С. 5–72.
10. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами // Успехи механики. – 1984. – **7**, № 2. – С. 75–115.
11. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
12. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.

Одержано 12.10.2015