

УДК 539.375

**ЧАСТИЧНЫЙ КОНТАКТ БЕРЕГОВ ЩЕЛИ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ В ПОДКРЕПЛЕННОЙ СТРИНГЕРАМИ ПЛАСТИНЕ***М. В. МИР-САЛИМ-ЗАДЕ**Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку*

Рассмотрена подкрепленная стрингерами упругая изотропная пластина с одной прямолинейной щелью переменной ширины, сравнимой с упругими деформациями. Исследован случай, когда берега щели контактируют на некотором участке. Определены параметры, характеризующих закрытие щели, сведено к решению сингулярного интегрального уравнения, из которого найдены контактные напряжения и размер контактной зоны.

**Ключевые слова:** *стрингерная пластина, щель переменной ширины, контактирование берегов щели, контактные напряжения.*

Известны [1–4] результаты исследования деформирования неограниченных пластин, усиленных регулярной системой ребер, поперечные сечения которых представляют собой весьма узкие прямоугольники. Особое внимание уделяли разрушению пластины, усиленной регулярной системой стрингеров [5–17]. Рассматривали трещину (модель) Гриффитса, т.е. трещину с невзаимодействующими кромками, и установили [5, 6, 8, 9, 14–17], что коэффициенты интенсивности напряжений при совместном воздействии растягивающего напряжения и подкрепляющих элементов могут иметь отрицательные значения. Это свидетельствует о возникновении в окрестности вершин трещин зон сжимающих напряжений, где их берега на некотором участке контактируют, вызывая контактные напряжения. Частичное контактирование берегов щели переменной ширины в подкрепленной пластине изучено недостаточно.

**Постановка задачи.** Рассмотрим упругую изотропную тонкую пластину с одной прямолинейной щелью переменной ширины  $h(x)$ , сравнимой с упругими деформациями. К пластине симметрично относительно ее поверхности приклепаны поперечные ребра жесткости в точках  $z = \pm(2m+1)L \pm iky_0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ) (рис. 1), действие которых заменили неизвестными сосредоточенными силами, приложенными в точках соединения. Предполагали, что при деформации толщина стрингера не изменяется, а напряженное состояние одноосное. Приняли следующие допущения: стрингеры изгибу не сопротивляются и работают лишь на растяжение; в тонкостенном листовом элементе конструкции (пластине) реализуется плоское напряженное состояние; подкрепляющая система стрингеров ферменного типа, их ослабление точками крепления не учитывали; листовый элемент и подкрепляющие элементы взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления; все точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами. Воздействие точки крепления в стрингере моделировали действием в сплошном ребре растягивающей сосредоточенной силы, приложенной в точке, соответствующей центру точки крепления, а в пластине – влиянием сжимающей сосредоточенной силы.

*Контактная особа:* М. В. МИР-САЛИМ-ЗАДЕ, e-mail: minavar.mirsalimzade@imm.az

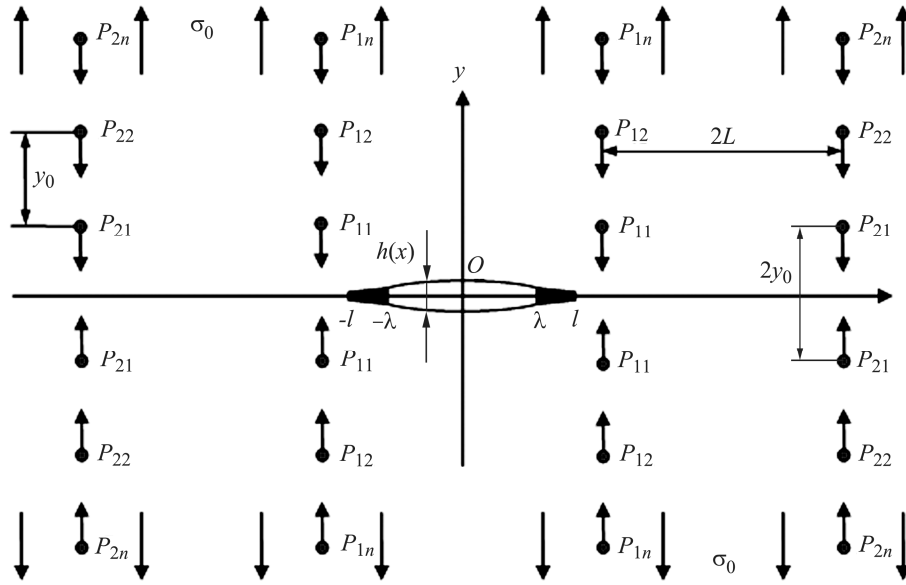


Рис. 1. Расчетная схема задачи.

Fig. 1. Computational scheme of the problem.

На бесконечности действует однородное растягивающее напряжение  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ . Подкрепляющие ребра жесткости тормозят развитие щели, создавая в пластине зону сжимающих напряжений [5–17]. Причем с ростом длины щели такой эффект усиливается. Под влиянием внешней растягивающей нагрузки  $\sigma_0$  и сосредоточенных сжимающих сил  $P_{mn}$  берега щели на некотором участке начнут контактировать, что способствует появлению здесь контактных напряжений. Считали, что области контакта примыкают к вершинам щели, а их размер  $\lambda$  заранее неизвестен и сравним с длиной щели. В концевых зонах, где берега щели контактируют, будут возникать нормальные  $\sigma_y = q(x)$  напряжения. Сосредоточенные силы  $P_{mn}$  и контактные напряжения также заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

Вне участка контакта берега щели свободны от нагрузки. Граничные условия рассматриваемой задачи на неконтактирующих участках берегов щели

$$\sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}^+(x, 0) = \tau_{xy}^-(x, 0) = 0, \quad x \in [-\lambda, \lambda];$$

на участках контакта

$$-\sigma_y^+ = \sigma_y^- = q(x), \quad v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = -h(x), \quad x \in [-l, -\lambda] \cup [\lambda, l]. \quad (1)$$

Здесь величины  $\sigma_y^+(x)$ ,  $\tau_{xy}^+(x)$ ,  $v^+(x)$  относятся к верхнему берегу щели, а  $\sigma_y^-(x)$ ,  $\tau_{xy}^-(x)$ ,  $v^-(x)$  – к нижнему. Из-за симметричности задачи  $\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-$ ;  $v^+ = -v^-$ ;  $h(x) = h(-x)$ .

На основании формул Колосова–Мусхелишвили и граничных условий на берегах щели задача сведена [18] к определению двух аналитических функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из краевого условия

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + \bar{x}\Phi'(x) + \Psi(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq \lambda, \\ q(x) & -l \leq x \leq -\lambda \text{ и } \lambda \leq x \leq l, \end{cases} \quad (2)$$

где  $x$  – аффикс точек берегов щели.

**Решение краевой задачи.** Его ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z), \quad z = x + iy, \quad (3)$$

где потенциалы  $\Phi_0(z) = \varphi'_0(z)$  и  $\Psi_0(z) = \psi'_0(z)$  определяют поле напряжений и деформаций в сплошной бездефектной подкрепленной пластине:

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{4} \sigma_0 z - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)h_*} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 'P_{1n} \ln \frac{z-L+iy_0n}{z-L-iy_0n} - \\ &- \frac{1}{2\pi(1+\kappa)h_*} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 'P_{mn} \ln \frac{z-m_*L+iy_0n}{z-m_*L-iy_0n}, \\ \Psi_0(z) &= \frac{1}{2} \sigma_0 z - \frac{i\kappa}{2\pi(1+\kappa)h_*} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 'P_{mn} \ln \frac{z-m_*L+iy_0n}{z-m_*L-iy_0n} - \\ &- \frac{i\kappa}{2\pi(1+\kappa)h_*} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 'P_{1n} \ln \frac{z-L+iy_0n}{z-L-iy_0n} - \\ &- \frac{i}{2\pi(1+\kappa)h_*} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 'P_{mn} \left( \frac{L-iy_0n}{z-L-iy_0n} - \frac{L+iy_0n}{z-L+iy_0n} \right) - \\ &- \frac{i}{2\pi(1+\kappa)h_*} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 'P_{mn} \left( \frac{m_*L-iy_0n}{z-m_*L-iy_0n} - \frac{m_*L+iy_0n}{z-m_*L+iy_0n} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$  – упругая постоянная Мусхелишвили для плоского напряженного состояния;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $h_*$  – толщина пластины;  $m_* = 2m+1$ ; штрих у знака суммы свидетельствует об исключении индекса  $n=m=0$ .

Для определения аналитических функций  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  записываем задачу

$$\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + \Omega_1(z) = f(x) \quad \text{при } y = h(x), \quad |x| \leq \lambda, \quad (5)$$

$$\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + \Omega_1(z) = f(x) + q(x) \quad \text{при } y = 0, \quad \lambda < |x| \leq l,$$

где  $\Omega_1(z) = z\Phi'_1(z) + \Psi_1(z)$ ,  $f(x) = -[\Phi_0(x) + \overline{\Phi_0(x)} + x\Phi'_0(x) + \Psi_0(x)]$ .

Ее решение ищем в классе всюду ограниченных функций. Заметим, что в силу условий симметрии относительно оси  $x$  функция  $f(x)$  действительна, поэтому на основании выражения (5) на всей действительной оси  $\text{Im} \Omega_1(z) = 0$ . Учитывая также условия на бесконечности, получаем  $\Omega_1(z) = 0$ . Следовательно, для функции  $\Phi_1(z)$  имеем задачу Дирихле

$$\text{Re} \Phi_1(z) = \frac{1}{2} f(x) \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \leq \lambda,$$

$$\text{Re} \Phi_1(z) = \frac{1}{2} [f(x) + q(x)] \quad \text{при } y = 0, \quad \lambda < x \leq l, \quad (6)$$

$$\Phi_1(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

решение которой запишем в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{z^2 - l^2}}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{F_*(x) dx}{\sqrt{x^2 - l^2} (x-z)}. \quad (7)$$

Здесь  $F_*(x) = f(x)$  при  $|x| \leq \lambda$ ;  $F_*(x) = f(x) + q(x)$ , если  $\lambda < |x| \leq l$ .

Решение задачи (6) существует в классе всюду ограниченных функций при выполнении условия [18] равенства нулю контактных напряжений на концах щели:

$$\int_{-l}^l \frac{f(x) dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \int_{-l}^{-\lambda} \frac{q(x) dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \int_{\lambda}^l \frac{q(x) dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = 0. \quad (8)$$

Из этого соотношения определяют размер контактной зоны  $\lambda$ .

С помощью формул (4) для функции  $f(x)$  имеем:

$$f(x) = -\sigma_0 + \frac{1}{\pi h_*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{mn} \frac{ny_0}{n^2 y_0^2 + (x - m_* L)^2} \left[ \frac{3+v}{2} - (1+v) \frac{(x - m_* L)^2}{n^2 y_0^2 + (x - m_* L)^2} \right] + \\ + \frac{1}{\pi h_*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} P_{mn} \frac{ny_0}{n^2 y_0^2 + (x + m_* L)^2} \left[ \frac{3+v}{2} - (1+v) \frac{(x + m_* L)^2}{n^2 y_0^2 + (x + m_* L)^2} \right].$$

Для нахождения сосредоточенных сил получили бесконечную систему уравнений

$$P_{mn} = \frac{E_S F_m}{2 y_0 n} \Delta v_{mn} \quad (m = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots), \quad (9)$$

здесь  $E_S$  – модуль Юнга материала стрингера;  $F_m$  – площадь поперечного его сечения (не нарушая общности, считали  $F_m = F = \text{const}$ );  $2 y_0 n$  – расстояние между точками крепления;  $\Delta v_{mn}$  – взаимное смещение точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Обозначим через  $a_0$  радиус круговой площадки сцепления. Примем [9], что взаимное упругое смещение точек пластины  $z = m_* L + i(ny_0 - a_0)$  и  $z = m_* L - i(ny_0 - a_0)$  в рассматриваемой задаче теории упругости равно взаимному смещению точек крепления в стрингере  $\Delta v_{mn}$ . Из дополнительного условия можно отыскать решение поставленной задачи. С помощью комплексных потенциалов (3), (4), (7) и формулы Колосова–Мухелишвили [18] находим взаимное смещение  $\Delta v_{mn}$ . Из-за громоздкости эти выражения не приводим.

В соотношения (7) и (8) входят неизвестные контактные напряжения  $q(x)$ . Используя формулу Колосова–Мухелишвили для перемещений и граничные значения функций  $\Phi(z)$ , получим на отрезке  $-l \leq x \leq l$  равенство

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2\mu i}{1 + \kappa} \frac{\partial}{\partial x} (v^+ - v^-), \quad (10)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига материала пластины.

С помощью формулы Сохоцкого–Племеля [18] с учетом формулы (7) находим:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = -\frac{i\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{F_*(t) dt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t - x)}. \quad (11)$$

Подставив выражение (11) в левую часть уравнения (10) с учетом условия (1), после некоторых преобразований получаем сингулярное интегральное уравнение для неизвестной функции  $q(x)$ :

$$\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi} \left[ \int_{L_1 + L_2} \frac{q(t) dt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t - x)} + \int_{-l}^l \frac{f(t) dt}{\sqrt{l^2 - t^2} (t - x)} \right] = \frac{2\mu}{1 + \kappa} h'(x), \quad (12)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  – отрезки  $[-l, -\lambda]$ ,  $[\lambda, l]$ .

Решение интегрального уравнения (12) можно найти из решения соответствующей задачи Римана [18]. Учитывая ограниченность (равенство нулю) контактных напряжений на концах зоны контакта  $x = \pm\lambda$ , для нормальных напряжений получим:

$$q(x) = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{\pi^2} X^+(x) \int_{L_1+L_2} \frac{f_*(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau-x)}. \quad (13)$$

Здесь  $X^+(x) = \sqrt{(x+l)(x+\lambda)(x-\lambda)(l-x)}$ ;  $f_*(\tau) = \frac{2\mu\pi}{1+\kappa} \frac{h'(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}} -$

$$- \int_{-l}^l \frac{f(t)dt}{\sqrt{l^2 - x^2}(t-x)}.$$

Необходимые интегралы вычисляем методом, предложенным Н. И. Мусхелишвили [18].

**Анализ результатов.** Для оценки частичного закрытия щели переменной ширины параметрически исследовали, используя формулы (8), (9), (13), зависимость контактных напряжений  $q(x)$  и размера зоны контакта  $\lambda$  от геометрических параметров, а также механических постоянных материала и внешней нагрузки. Определяли нормальные напряжения  $q(x)$  в контактной области, а также размер  $\lambda$  зоны контакта из решения уравнения (8), в котором все интегралы заменяли с помощью квадратурной формулы Гаусса суммами, а полученное алгебраическое уравнение решали методом итераций.

Проведены расчеты для следующих значений параметров пластины:  $\nu = 0,3$ ;  $\varepsilon_1 = a_0/L = 0,01$ ;  $\varepsilon = y_0/L = 0,15$ ;  $0,25$ ;  $0,5$ ;  $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа (сплав В95);  $E_s = 11,5 \cdot 10^4$  МПа (композит А1-сталь);  $F/y_0h = 1$ . Количество стрингеров и точек крепления принимали равными: 6; 10; 14. При расчетах использовали безразмерные координаты  $x' = \frac{2x - (l + \lambda)}{l - \lambda}$ . Рассчитали распре-

деление контактных напряжений вдоль правой контактной зоны для щели, ширина которой изменяется по параболическому закону (рис. 2)

$$h(x) = 0,001 \frac{l^2 - x^2}{L^2}, \text{ при } \varepsilon = 0,25.$$

### ВЫВОДЫ

Предложена эффективная схема определения деформации стрингерной пластины с частично закрытой щелью переменной ширины. На основании точного решения сингулярного интегрального уравнения получены соотношения для расчета контактных напряжений, размера зоны контакта и напряженно-деформированного состояния пластины. Эти соотношения позволяют решать обратную задачу, т.е. находить характеристики подкрепляющих элементов и напряженное

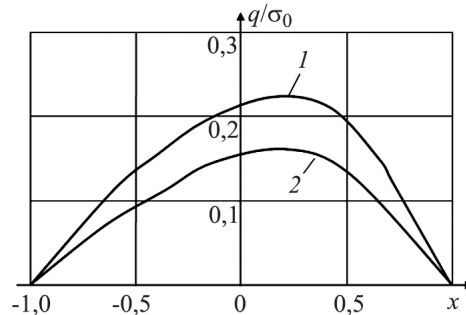


Рис. 2. Распределение контактных напряжений вдоль зоны сцепления щели для безразмерных длин щели: 1 –  $l - l_* = l/L = 1,1$ ; 2 –  $1,3$ .

Fig. 2. Distribution of the contact stresses along the slit contact zone for various length of the slit: 1 –  $l - l_* = l/L = 1,1$ ; 2 –  $1,3$ .

состояние пластины, когда достигается заданная область контакта берегов щели.

*РЕЗЮМЕ.* Розглянуто підкріплену стрингерами пружну ізотропну пластину з однією прямолінійною щілиною змінної ширини, порівнянню з пружними деформаціями. Досліджено випадок, коли береги щілини контактують на деякій ділянці. Визначення параметрів, які характеризують закриття щілини, зведено до розв'язку сингулярного інтегрального рівняння, із якого знайдені контактні напруження і розмір контактної зони.

*SUMMARY.* A stringer elastic isotropic plate with a rectilinear slit of variable width comparable to elastic deformations is considered. The case of slit faces contacting on some part of the slit is investigated. Determination of the parameters characterizing the closure of variable width slit is reduced to solution of singular integral equations. From the solution of singular integral equations the contact stresses and size of the contact zone are found.

1. Толкачев В. М. Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине // Докл. АН СССР. – 1964. – **154**, № 4. – С. 86–88.
2. Долгих В. Н., Фильштинский Л. А. Об одной модели регулярной кусочно-однородной среды // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 2. – С. 158–164.
3. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
4. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наук. думка, 1985. – 302 с.
5. Брок Д. Основы механики разрушения. – М.: Высш. шк., 1980. – 368 с.
6. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
7. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
8. Мирсалимов В. М., Алиева Г. М. Контактная задача для пластины с трещиной, усиленной ребрами жесткости // Изв. АН Аз.ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1985. – № 3. – С. 53–57.
9. Мирсалимов В. М. Некоторые задачи конструкционного торможения трещины // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – **22**, № 1. – С. 84–88.
10. Максименко В. Н. Влияние приклепанных ребер жесткости на развитие трещин возле отверстия // Прикл. механика и техн. физика. – 1988. – № 2. – С. 133–140.
11. Саврук М. П., Кравець В. С. Підкріплення тонкої пластины з тріщинами системою паралельних стрингерів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – **30**, № 1. – 96–104.  
(Savruk M. P. and Kravets V. S. Reinforcement of a thin cracked plate by a system of parallel stringers // Materials Science. – 1994. – **30**, № 1. – P. 95–104.)
12. Саврук М. П., Кравець В. С. Плоскі задачі теорії пружності для підкріплених пластин з тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – **31**, № 3. – 68–82.  
(Savruk M. P. and Kravets V. S. Two-dimensional problems of the theory of elasticity for reinforced cracked plates // Materials Science. – 1995. – **31**, № 3. – P. 350–362.)
13. Кравець В. С. Вплив розривів приклепаних стрингерів на пружну та граничну рівновагу пластины з тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 3. – 39–47.  
(Kravets V. S. Effect of breaks in riveted stringers on the elastic and limiting equilibrium of a cracked plate // Materials Science. – 1999. – **35**, № 3. – P. 339–348.)
14. Мир-Салим-заде М. В. Разрушение изотропной среды, усиленной регулярной системой стрингеров // Механика композит. материалов. – 2007. – **43**, № 1. – С. 59–72.
15. Мир-Салим-заде М. В. Моделирование частичного закрытия трещины в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Матем. моделирование. – 2007. – **19**, № 3. – С. 105–115.
16. Мир-Салим-заде М. В. Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Прикл. механика и техн. физика. – 2010. – **51**, № 2. – С. 148–159.
17. Мир-Салим-заде М. В. Разрушение перфорированной стрингерной пластины // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 4. – С. 59–62.
18. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

Получено 28.10.2014