

УДК 536.24

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ШАРІ З НАСКРІЗНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

В. І. ГАВРИШ

Національний університет "Львівська політехніка"

Розглянуто нелінійну крайову осесиметричну задачу теплопровідності для термочутливого ізотропного шару з наскрізним чужорідним циліндричним включенням, на одній із межових поверхонь якого зосереджено тепловий потік. За допомогою введеної лінеаризуючої функції виконано часткову лінеаризацію вихідної задачі. Після кусково-лінійної апроксимації температури на межовій поверхні включення крайову задачу повністю лінеаризовано. Із використанням інтегрального перетворення Ганкеля знайдено аналітично-числовий розв'язок задачі для визначення лінеаризуючої функції. Наведено розрахункові формули для обчислення температури за лінійної температурної залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів. Розраховано та проаналізовано температурне поле в конструкції "шар-включення" (матеріал шару – кераміка ВК94-І, матеріал включення – срібло).

Ключові слова: температура, теплопровідність, нелінійна крайова осесиметрична задача, ізотропний термочутливий шар, чужорідне наскрізне включення, ідеальний тепловий контакт, тепловий потік.

Під час експлуатації окремих термочутливих елементів та вузлів мікроелектронних пристроїв, які працюють в широкому інтервалі температур, за дії високих теплових навантажень, виникає низка складних інженерних задач, для вирішення яких необхідно володіти достовірною інформацією про їхній тепловий стан та температурні режими. Оскільки експериментальні дослідження є складними через високі температури і герметизуючі властивості систем тепловідведення, то таку інформацію отримують розрахунковим шляхом, що, своєю чергою, вимагає розв'язування складних нелінійних крайових задач теплопровідності, отриманих на основі математичних моделей, які б максимально відображали найістотніші аспекти теплофізичних процесів, які відбуваються в розглядуваних конструкціях.

Деякі дослідження температурних режимів для конструкційних термочутливих елементів кусково-однорідної структури виконано раніше [1–4]. Запропоновано [5] метод розв'язування одновимірного нелінійного нестационарного рівняння теплопровідності. Використано метод функцій Гріна, що дало змогу звести отримане рівняння до нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду відносно температури, яке розв'язано методом квадратичних форм. Отриману систему рекурентних рівнянь розв'язано числово. Проаналізовано вплив нелінійності теплофізичних параметрів на профілі температури.

Із використанням операційного методу та методу послідовних інтервалів знайдено розв'язки нелінійних задач нестационарної теплопровідності зі змінним коефіцієнтом теплообміну, із нелінійністю першого та другого роду, а також для задач теплопровідності із загальною нелінійністю [6]. Відомий наближений розв'язок нестационарної нелінійної задачі теплопровідності у товстостінному тілі складної форми зі скісними зрізами [7], де теплоємність та коефіцієнт теплопровідності тіла залежать від температури. За допомогою методу проміжної точки не-

стаціонарну крайову задачу зводять до послідовності стаціонарних задач, які розв'язали числово методом скінченних елементів із використанням ізопараметричних апроксимацій та методу Ньютона–Рафсона.

Нижче сформульовано крайову нелінійну задачу теплопровідності, наведено методику її лінеаризації та розрахункові формули для визначення температурного поля у термочутливому шарі з наскрізним включенням, який нагрівається тепловим потоком, зосередженим на одній із його поверхонь. Виконано числовий аналіз за лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів конструкції від температури.

Об'єкт дослідження та його математична модель. Розглянемо термочутливий ізотропний відносно теплофізичних параметрів шар, який містить чужорідне наскрізне циліндричне включення з радіусом R , віднесений до циліндричної системи координат $(Or\varphi z)$ із початком в центрі включення. В області включення $\Omega_0 = \{(r, \varphi, -l) : r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ межевої поверхні $L_- = \{(r, \varphi, -l) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ шару система нагрівається тепловим потоком з поверхневою густиною $q_0 = \text{const}$, а інша частина цієї поверхні шару поза включенням і поверхня $L_+ = \{(r, \varphi, l) : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ є теплоізованими. На межовій поверхні включення $K_R = \{(R, \varphi, z) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| \leq l\}$ існує ідеальний тепловий контакт $t_0 = t_1$, $\lambda_0(t) \frac{\partial t}{\partial r} = \lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial r}$ для $r = R$ (0 – для включення; 1 – для шару) (рис. 1).

У наведеній структурі потрібно визначити осесиметричний розподіл температури $t(r, z)$ за просторовими координатами, який отримуємо, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [8, 9]

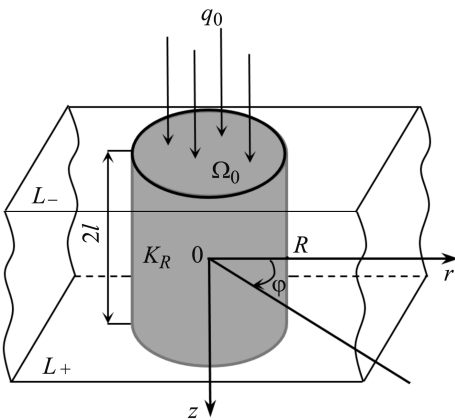


Рис. 1. Ізотропний термочутливий шар із наскрізним включенням.

Fig. 1. Isotropic thermosensitive layer with a through inclusion.

Введемо лінеаризуючу функцію

$$\vartheta = \int_0^{t(r,z)} \lambda_1(\zeta) d\zeta + S_-(R-r) \int_{t(R,z)}^{t(r,z)} [\lambda_0(\zeta) - \lambda_1(\zeta)] d\zeta. \quad (3)$$

Продиференціювавши її за змінними r та z , отримаємо:

$$\lambda(t, r) \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\partial \vartheta}{\partial r}, \quad \lambda(t, r) \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \left\{ [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] \frac{\partial t}{\partial z} \right\} \Big|_{r=R} S_-(R-r). \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial r}] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(r, t) \frac{\partial t}{\partial z} \right] = 0 \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$t|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0,$$

$$\lambda_0(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=-l} = -q_0 S_-(R-r), \quad (2)$$

де $\lambda(r, t) = \lambda_1(t) + [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] S_-(R-r)$ – коефіцієнт теплопровідності неоднорідного термочутливого шару; $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалів включення та шару, відповідно;

$$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \mp 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0 \end{cases} \text{ – асиметрич-}$$

ні одиничні функції [10].

Із урахуванням виразів (4) вихідне рівняння (1) набуде такого вигляду:

$$\Delta \vartheta + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[\lambda_0(t) - \lambda_1(t) \right] \frac{\partial t}{\partial z} \right\} \Big|_{r=R} S_-(R-r) = 0, \quad (5)$$

де $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Крайові умови (2) з використанням співвідношення (3) запишемо так:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=l} = 0, \quad \vartheta \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=-l} = - \left\{ q_0 + \left[(\lambda_0(t) - \lambda_1(t)) \frac{\partial t}{\partial z} \right] \Big|_{\substack{r=R \\ z=-l}} \right\} S_-(R-r). \quad (7)$$

Лінеаризуюча функція (3) дала змогу звести нелінійну крайову задачу (1), (2) до частково лінеаризованого рівняння (5) з розривними коефіцієнтами з крайовими умовами (6), (7).

Аналітично-числовий розв'язок.

Апроксимуємо функцію $t(r, z)$ за змінною z (рис. 2) виразом

$$t(R, z) = t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) S_-(z - z_i), \quad (8)$$

де $z_i \in]-l; l[$; $z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_{n-1}$; n – кількість розбиттів інтервалу $]-l; l[$; t_i ($i = \overline{1, n}$) – невідомі апроксимаційні значення температури.

Підставивши вираз (8) у співвідношення (5), (7), одержимо лінійне диференціальне рівняння з частковими похідними відносно лінеаризуючої функції (3)

$$\Delta \vartheta = - \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) [\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})] S_-(R-r) \delta'_-(z - z_i) \quad (9)$$

з крайовою умовою

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=-l} = -q_0 S_-(R-r). \quad (10)$$

Тут $\delta_{\pm}(\zeta) = \frac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$ – асиметричні дельта-функції Дірака [10].

Застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля за координатою r до рівняння (9) та крайових умов (6), (10), отримасмо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = - \frac{R}{\xi} J_1(R\xi) \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) [\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})] \delta'_-(z - z_i) \quad (11)$$

з крайовими умовами

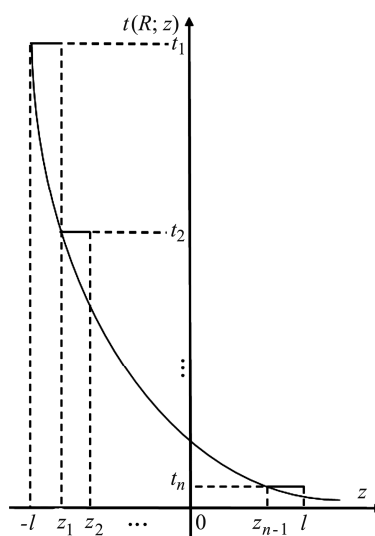


Рис. 2. Апроксимація функції $t(R, z)$.

Fig. 2. Approximation of function $t(R, z)$.

$$\left. \frac{d\bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=l} = 0, \quad \left. \frac{d\bar{\vartheta}}{dz} \right|_{z=-l} = -\frac{R}{\xi} q_0 J_1(R\xi), \quad (12)$$

де $\bar{\vartheta} = \int_0^{\infty} \vartheta r J_0(r\xi) dr$ – трансформанта функції $\vartheta(r, z)$; ξ – параметр інтегрального перетворення Ганкеля; $J_\nu(\xi)$ – функція Бесселя першого роду ν -го порядку.

Розв'язавши задачу (11), (12), а після цього, застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля до її розв'язку, одержимо вираз для функції ϑ

$$\vartheta = R \int_0^{\infty} J_0(r\xi) J_1(R\xi) \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) [\lambda_0(t_{i+1}) - \lambda_1(t_{i+1})] \left[\frac{\text{ch}\xi(z+l)}{\text{sh}2\xi l} \text{sh}\xi(l-z_i) - \right. \right. \\ \left. \left. - \text{ch}\xi(z-z_i) S_-(z-z_i) \right] + \frac{q_0}{\xi} \frac{\text{ch}\xi(z-l)}{\text{sh}2\xi l} \right\} d\xi. \quad (13)$$

Підставивши вирази температурної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів шару та включення у співвідношення (3), (13), після деяких перетворень отримаємо систему нелінійних рівнянь для визначення невідомих апроксимаційних значень температури t_i ($i = \overline{1, n}$).

Шукане температурне поле для наведеної структури визначаємо за допомогою отриманого нелінійного рівняння з використанням співвідношень (3), (13), після підстановки в них конкретних виразів залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів від температури.

Частковий приклад та аналіз отриманих результатів. Для розв'язування багатьох практичних задач використовують таку залежність коефіцієнта теплопровідності від температури [11, 12]:

$$\lambda = \lambda_j^0 (1 - k_j t), \quad (14)$$

де λ_j^0, k_j – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності матеріалів для включення ($j = 0$) та шару ($j = 1$).

Враховавши співвідношення (14), із виразів (3), (13) отримаємо формули для визначення температури t

$$\text{в області включення} \quad t = \frac{1}{k_0} \left(1 - \sqrt{1 - k_0 \left(\frac{2\vartheta}{\lambda_0^0} + \vartheta_1 \right)} \right) \quad (15)$$

та в області $\Omega_1 = \{(r, \varphi, z) : r > R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| \leq l\}$ шару (поза включенням)

$$t = \frac{1}{k_1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k_1 \vartheta}{\lambda_1^0}} \right). \quad (16)$$

$$\text{Тут } \vartheta_1 = \left\{ t \left[2 - k_0 t - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_0^0} (2 - k_1 t) \right] \right\} \Big|_{r=R}; \quad t \Big|_{r=R} = \frac{1}{k_1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k_1 \vartheta}{\lambda_1^0}} \Big|_{r=R} \right).$$

Формули (15), (16) повністю описують температурне поле в термочутливому шарі з чужорідним наскрізним включенням (див. рис. 1).

Виконано числовий аналіз температури для таких вихідних даних: матеріал шару – кераміка ВК94-I, матеріал включення – срібло, $n = 10$ – кількість розбиттів інтервалу $]-l; l[$; $l = R = 2$ mm; $q_0 = 200$ W. В інтервалі температур 20...1230°C температурні залежності коефіцієнта теплопровідності для наведених матеріалів подані у вигляді

$$\lambda_1(t) = 13,67 \frac{\text{W}}{\text{Km}} (1 - 0,00064 \frac{1}{\text{K}} t), \quad \lambda_0(t) = 422,54 \frac{\text{W}}{\text{Km}} (1 - 0,00031 \frac{1}{\text{K}} t), \quad (15)$$

що є частковим випадком співвідношення (14).

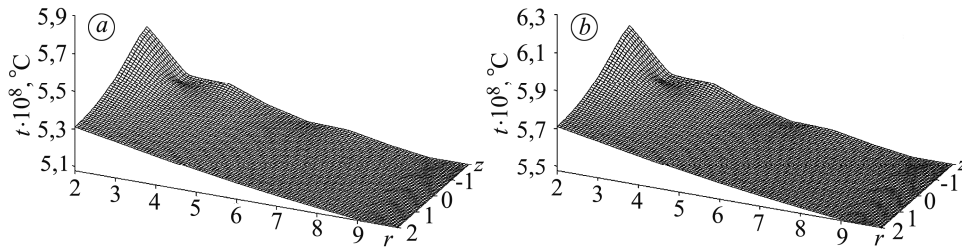


Рис. 3. Залежність температури t від координат r та z для лінійно змінного (а) і сталого (б) коефіцієнта теплопровідності матеріалів конструкції.

Fig. 3. Dependence of temperature t on coordinates r and z for linearly dependent (a) and constant (b) coefficient of heat conductivity of materials of the structure.

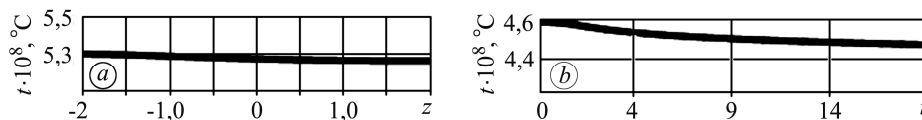


Рис. 4. Залежність температури t від координат z для $r = 0$ (а) та r для $z = 0$ (б).

Fig. 4. Dependence of temperature t on coordinates z for $r = 0$ (a) and r for $z = 0$ (b).

Температурне поле для відповідної лінійної моделі отримаємо зі співвідношення

$$\lambda(r, z)t(r, z) = R \int_0^{\infty} J_0(r\xi) J_1(R\xi) \{ (\lambda_0 - \lambda_1) [t_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) (\frac{\text{ch}\xi(l+z)}{\text{sh}2\xi l} \text{sh}\xi(l-z_i) + (1 - \text{ch}\xi(z-z_i)) S_-(z-z_i))] + \frac{q_0 \text{ch}\xi(z-l)}{\xi \text{sh}2\xi l} \} d\xi,$$

що дає змогу отримати числові результати для розглядуваних конструкційних матеріалів зі сталими коефіцієнтами теплопровідності $\lambda_1 = 13,4 \text{ W/(Km)}$, $\lambda_0 = 419 \text{ W/(Km)}$ (рис. 3b).

Побудовано (рис. 3) залежність температури t від радіальної r та аксіальної z координат. Зазначимо, що максимальна температура досягається в області дії локально зосередженого теплового потоку.

Проілюстровано (рис. 4) зміну температури t залежно від координат z для $r = 0$ (рис. 4a) та r для $z = 0$ (рис. 4b). Поведінка кривих свідчить про відповідність математичної моделі реальному фізичному процесу, оскільки на поверхні K_R включення спостерігаємо виконання умов ідеального теплового контакту (відсутній стрибок температури).

ВИСНОВКИ

Запроваджена лінеаризуюча функція дала змогу частково лінеаризувати вихідну нелінійну крайову задачу, а запропонована кусково-лінійна апроксимація температури на межовій поверхні включення – повністю лінеаризувати диференціальне рівняння та крайові умови. Це дало можливість застосувати інтегральне перетворення Ганкеля до отриманої лінійної задачі відносно лінеаризуючої функції і побудувати її аналітично-числовий розв'язок. Розглянуто лінійну температурну залежність коефіцієнта теплопровідності для матеріалів включення та шару. На основі цього побудовано розрахункові формули для обчислення значень температури у розглядуваній структурі “шар-включення”. Одержані результати

для вибраних матеріалів за лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури (рис. 3a) відрізняються від результатів, отриманих для сталого коефіцієнта теплопровідності (рис. 3b), на 7%. Незначна їх відмінність пояснюється тим, що реальні значення температурного коефіцієнта теплопровідності для розглядуваних матеріалів є невеликими.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена нелинейная граничная осесимметрическая задача теплопроводности для термочувствительного изотропного слоя со сквозным инородным цилиндрическим включением, на одной из граничных поверхностей которого сосредоточенный тепловой поток. С помощью предложенной линеаризирующей функции проведена частичная линеаризация исходной задачи. После кусочно-линейной аппроксимации температуры на граничной поверхности включения граничная задача полностью линеаризована. С использованием интегрального преобразования Ханкеля найдено численно-аналитическое решение задачи для определения линеаризирующей функции. Приведены расчетные формулы для вычисления температуры при линейной температурной зависимости коэффициента теплопроводности конструкционных материалов. Рассчитано и проанализировано температурное поле в конструкции “слой–включение” (материал слоя – керамика ВК94-I, материал включения – серебро).

SUMMARY. The non-linear axially symmetric boundary value problem of heat conduction for a thermosensitive isotropic layer with a through cylinder shaped foreign inclusion, at one of whose interfaces a heat flow is concentrated, is considered. By means of the introduced linearizing function, partial linearization of the initial problem is made. After the piecewise linear approximation of temperature at the interface of the inclusion, the boundary value problem becomes fully linearized. With the use of Hankel integral transformation, the analytical-numerical solution of the problem for determination of the linearizing function is obtained. Calculation formulae for calculation of the temperature in the case of linear dependence of the coefficient of heat conductivity of structural materials on temperature are presented. The temperature field in the “layer–inclusion” structure (the materials of the layer and of the inclusion are ВК94-I and silver, respectively) is calculated and analyzed.

1. Гавриш В. І., Федасюк Д. В. Моделювання температурних режимів у кусково-однорідних структурах. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2012. – 176 с.
2. Гавриш В. І. Численно-аналитическое решение нелинейной стационарной задачи теплопроводности для бесконечной термочувствительной многослойной пластины // Электронное моделирование. – 2014. – **36**, № 3. – С. 59–70.
3. Гавриш В. І. Дослідження температурних режимів у термочутливій пластині з чужорідним наскрізним включенням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – Вип. 18. – С. 43–50.
4. Гавриш В. І. Нелінійна крайова задача теплопровідності для шаруватої пластины з включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 3. – С. 32–38.
(Havrysh V. I. Nonlinear boundary-value problem of heat conduction for a layered plate with inclusion // Materials Science. – 2015. – **51**, № 3. – P. 331–339.)
5. Белик В. Д. Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инженерно-физический журнал. – 2008. – **81**, № 6. – С. 1058–1062.
6. Берлов О. В. Розв’язок нелінійних задач теплопровідності для складених елементів конструкцій // Металургійна теплотехніка: Зб. наук. пр. Національної металургійної академії України. – 2008. – С. 20–30.
7. Неспяк Д. М. Дослідження процесів нелінійної теплопровідності у товстостінних складених тілах // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 176–182.
8. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
9. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 720 с.
11. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 376 с.
12. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. – М.: Мир, 1979. – 288 с.

Одержано 23.06.2015