

УДК 539.375

РОЗВИТОК ПЛАСТИЧНИХ СМУГ З КУТОВОЇ ТОЧКИ МЕЖІ ПОДІЛУ ЖОРСТКО ЗЧЕПЛЕНИХ МАТЕРІАЛІВ

А. О. КАМІНСЬКИЙ¹, Л. А. КІПНІС², Т. В. ПОЛІЩУК²

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ;

² Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини

Розглянуто симетричну задачу про розвиток пластичних смуг з кутової точки межі поділу ізотропних жорстко зчеплених середовищ. Пластичну смугу змодельовано лінією розриву дотичного переміщення. Точний розв'язок відповідної задачі теорії пружності побудовано методом Вінера–Гопфа і на його основі визначено довжину і напрямок розвитку пластичних смуг.

Ключові слова: *пластична смуга, кутова точка, межа поділу середовищ, лінія розриву дотичного переміщення, метод Вінера–Гопфа.*

Визначення пластичних та інших зон передруйнування біля гострокінцевих концентраторів напружень у деформівних твердих тілах – одна з головних задач механіки руйнування. Результати такого аналізу дадуть можливість повніше описати напружено-деформований стан матеріалу біля концентраторів, який передуює руйнуванню. Більшість праць, присвячених плоским задачам про визначення вузьких зон передруйнування у межах моделей з лініями розриву переміщення, описують ситуацію, коли концентраторами напружень є кінці тріщин в однорідних тілах [1–4]. Низка досліджень у цьому напрямку стосується інших куткових точок однорідного тіла [5–8]. Для кусково-однорідних тіл зони передруйнування визначено біля кінців міжфазних тріщин [9–11] та в кінці тріщини, що виходить на межу поділу середовищ [12–14]. Розраховано розмір міжфазних зон передруйнування в кутовій точці межі поділу ізотропних середовищ для пружно-пластичного і крихкого з'єднувальних матеріалів [15, 16].

Нижче розв'язано задачу про визначення вузької пластичної зони передруйнування у кутовій точці межі поділу ізотропних середовищ за умови, що частини кусково-однорідного тіла жорстко зчеплені.

Формулювання задачі. В умовах плоскої деформації розглянемо кусково-однорідне тіло, складене з ізотропних жорстко зчеплених пружно-пластичних частин. Межа поділу середовищ містить кутову точку – гострокінцевий концентратор напружень. У відповідній статичній задачі теорії пружності за наближення точки тіла до кутової точки межі поділу середовищ напруження прямують до нескінченності.

Зі зростанням зовнішнього навантаження біля кутової точки з'являється і розвивається пластична зона. Вивчатимемо лише початкову стадію розвитку, коли її розмір значно менший, ніж розміри тіла. Задачу вважатимемо симетричною відносно бісектриси кута, утвореного лініями поділу матеріалів. Тоді пластична зона матиме вид пари симетричних вузьких смужок, що виходять з кутової точки та розташовані у пластичнішому матеріалі [17, 18]. Необхідно визначити довжину і напрямок розвитку початкових пластичних смуг.

Оскільки матеріал тіла пружно-пластичний, переважальні деформації у пластичній зоні розвиваються за механізмом зсуву. Тому смужку-зону моделюватимемо прямою лінією розриву дотичного переміщення, на якій дотичне напруження дорівнює границі текучості на зсув.

З урахуванням малості пластичної зони приходимо до плоскої статичної симетричної задачі теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у вигляді сторін кута 2α , яка містить два перпендикулярні розрізи скінченної довжини l , що виходять з кутової точки O під кутом β до цієї межі (рис. 1).

На нескінченності задана асимптотика поля напружень, яка є розв'язком аналогічної задачі без розрізів (задача К), що відповідає єдиному на інтервалі $]-1; 0[$ кореню її характеристичного рівняння [15, 16]. Подібні однорідні задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл клиноподібної конфігурації, які можна розв'язати методом відокремлення змінних, розглядали раніше [19, 20]. Довільну сталу C , яка входить до розв'язку задачі К, вважаємо заданою. Вона характеризує інтенсивність зовнішнього поля напружень. Цю сталу можна розглядати як коефіцієнт інтенсивності напружень у кутовій точці межі поділу середовищ.

Беручи до уваги симетрію задачі теорії пружності (рис. 1), її крайові умови запишемо в полярній системі координат (r, θ) :

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0, \theta = \beta - \alpha, \theta = \pi - \alpha + \beta; \\ \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \theta = \beta; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = 0, \theta = 0; \\ \tau_{r\theta} = \tau_1, \theta = 0, r < l; \langle u_r \rangle = 0, \theta = 0, r > l; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tau_{r\theta} = Cg(\alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2)r^{\lambda_1} + o\left(\frac{1}{r}\right), \theta = 0, r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут $\beta - \alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha + \beta$; $\langle a \rangle$ – стрибок a ; λ_1 – єдиний на інтервалі $]-1; 0[$ корінь характеристичного рівняння задачі К [15, 16]:

$$\begin{aligned} \Delta(-\lambda - 1) = 0, \Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2, \\ \delta_0(z) = (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha)[\chi_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_1(z) = (1 + \chi_1)(1 + \chi_2) \sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) [\chi_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha] - \\ - [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha] (\chi_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha), \end{aligned}$$

$$\delta_2(z) = [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\chi_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \chi_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2},$$

E_1, E_2 – модулі Юнга; ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона.

Функцію $g(\alpha, \beta, e_0, \nu_1, \nu_2)$ виражає формула

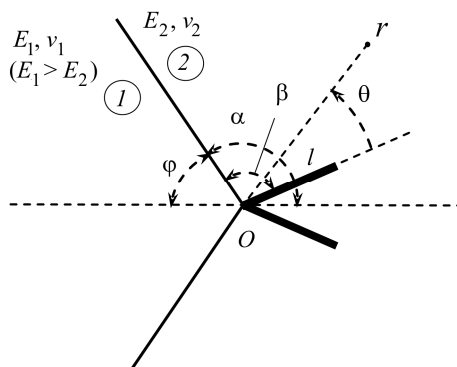


Рис. 1. Лінії розриву дотичних переміщень в околі кутової точки межі поділу середовищ.

Fig. 1. Lines of rupture of tangential displacements in the vicinity of the corner point of the media interface.

$$\begin{aligned}
g &= \lambda_1 g_1 \sin \lambda_1 (\alpha - \beta) - g_2 \sin(\lambda_1 + 2)(\alpha - \beta), \\
g_1 &= (1 + \chi_1)(1 - \chi_2) c c_1 s_2^2 c_3 - (1 - \chi_2)(1 - \chi_1 - 2e) c c_1 s_2 c_2 s_3 + \\
&+ \lambda_1 [(1 + \chi_1) s c s_2 c_3 - (1 - \chi_1 - 2e) s c c_2 s_3 + (1 - \chi_2)(1 - e) s c_1 s_2 c_2] + (1 - e) \lambda_1^2 s^2 c_2, \\
g_2 &= (1 + \chi_1)(1 - \chi_2) \lambda_1 c s_1 c_1 s_2 c_3 + (1 - \chi_1)(1 + \chi_2) \lambda_1 c s_1 c_1 c_2 s_3 - 2[1 - \chi_1 - (1 - \chi_2)e] \times \\
&\times (1 - \chi_2 + \lambda_1) c c_1^2 s_2 s_3 + (1 + \chi_1) \lambda_1^2 s c s_1 c_3 - (1 + \chi_2) \lambda_1^2 s s_1 c_1 c_2 - (1 - \chi_1 - 2e) \lambda_1 \times \\
&\times (1 - \chi_2 + \lambda_1) s c c_1 s_3 + [2 - (1 - \chi_2)e] \lambda_1 (1 - \chi_2 + \lambda_1) s c_1^2 s_2 + (1 - e)(1 - \chi_2 + \lambda_1) \lambda_1^2 s^2 c_1, \\
s &= \sin 2\alpha, \quad c = \cos \lambda_1 (\pi - \alpha), \quad s_1 = \sin \lambda_1 \alpha, \quad c_1 = \cos \lambda_1 \alpha, \\
s_2 &= \sin(\lambda_1 + 2)\alpha, \quad c_2 = \cos(\lambda_1 + 2)\alpha, \quad s_3 = \sin[\lambda_1 (\pi - \alpha) - 2\alpha], \quad c_3 = \cos[\lambda_1 (\pi - \alpha) - 2\alpha].
\end{aligned}$$

Якщо $Cg > 0$, то $\tau_1 = \tau$; якщо $Cg < 0$, то $\tau_1 = -\tau$ (τ – границя текучості на зсув матеріалу 2).

Розв'язок сформульованої задачі теорії пружності (рис. 1) є сумою розв'язків таких двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що замість першої з умов (2) маємо

$$\tau_{r,\theta} = \tau_1 - Cgr^{\lambda_1}, \quad \theta = 0, \quad r < l, \quad (4)$$

а на нескінченності напруження зникають як $o(1/r)$ (у виразі (3) відсутній перший доданок). Друга – задача К. Оскільки її розв'язок відомий, достатньо побудувати розв'язок першої задачі. Для цього використовуватимемо метод Вінера–Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [21].

Розв'язок рівняння Вінера–Гопфа. Застосуємо перетворення Мелліна

$$m^*(p) = \int_0^{\infty} m(r) r^p dr$$

з комплексним параметром p до рівнянь рівноваги, умов сумісності деформацій, закону Гука, умов (1). Враховуючи другу з умов (2) і умову (4), приходимо до функціонального рівняння Вінера–Гопфа:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau_1}{p+1} + \frac{\tau_2}{p+\lambda_1+1} = \operatorname{ctg} p\pi G(p)\Phi^-(p), \quad (5)$$

$$G(p) = \frac{[n_0(p) + n_1(p)e + n_2(p)e^2] \sin p\pi}{[d_0(p) + d_1(p)e + d_2(p)e^2] \cos p\pi},$$

$$\begin{aligned}
n_0(p) &= -2 [\chi_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] \times \\
&\times \{ [\sin 2p(\alpha - \beta) + p \sin 2(\alpha - \beta)] (\sin 2p\beta + p \sin 2\beta) + \\
&+ 2[\cos 2p(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta)] (\sin^2 p\beta - p^2 \sin^2 \beta) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_1(p) &= [\sin 2p(\alpha - \beta) + p \sin 2(\alpha - \beta)] \times \\
&\times \{ 2[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\chi_2 \sin 2p\beta - p \sin 2\beta) + 2[\chi_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] \times \\
&\times (\sin 2p\beta + p \sin 2\beta) + (1 + \chi_1)(1 + \chi_2) [\cos 2p(\pi - \alpha + \beta) - \cos 2(\pi - \alpha + \beta)] - \\
&- [\cos 2p(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta)] \{ [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times \\
&\times [(1 + \chi_1)(1 + \chi_2) - 4(\chi_2 \sin^2 p\beta + p^2 \sin^2 \beta)] - 4[\chi_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] \times \\
&\times (\sin^2 p\beta - p^2 \sin^2 \beta) - (1 + \chi_1)(1 + \chi_2) [\sin 2p(\pi - \alpha + \beta) + p \sin 2(\pi - \alpha + \beta)] \}, \\
n_2(p) &= - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ [\cos 2p(\alpha - \beta) - \cos 2(\alpha - \beta)] [4(\chi_2 \sin^2 p\beta + p^2 \sin^2 \beta) - (1 + \chi_2)^2] + \right. \\
& \quad \left. + 2 [\sin 2p(\alpha - \beta) + p \sin 2(\alpha - \beta)] (\chi_2 \sin 2p\beta - p \sin 2\beta) \right\}, \\
& d_0(p) = 2(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\chi_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha], \\
& d_1(p) = 2 \left\{ (1 + \chi_1)(1 + \chi_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\chi_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - \right. \\
& \quad \left. - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\chi_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) \right\}, \\
& d_2(p) = 2[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\chi_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \\
& \tau_2 = -Cgl^{\lambda_1}, \quad \Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_2}{4(1-\nu_2^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\theta=0}^{r=\rho l} \rho^p d\rho,
\end{aligned}$$

де $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ – достатньо малі додатні числа. Подібні рівняння розв’язано раніше [15, 16].

Розв’язок рівняння (5) має вигляд

$$\begin{aligned}
\Phi^+(p) &= K^+(p)G^+(p) \left\{ \frac{\tau_1}{p+1} \left[\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\tau_2}{p+\lambda_1+1} \left[\frac{1}{K^+(-\lambda_1-1)G^+(-\lambda_1-1)} - \frac{1}{K^+(p)G^+(p)} \right] \right\}, \quad \operatorname{Re} p < 0; \quad (6) \\
\Phi^-(p) &= \frac{pG^-(p)}{K^-(p)} \left[\frac{\tau_1}{(p+1)K^+(-1)G^+(-1)} + \frac{\tau_2}{(p+\lambda_1+1)K^+(-\lambda_1-1)G^+(-\lambda_1-1)} \right], \\
& \quad \operatorname{Re} p > 0.
\end{aligned}$$

Тут

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1/2 \mp p)}, \quad (8)$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція.

Визначення довжини і напрямку розвитку початкових пластичних смуг. За допомогою виразів (6)–(8) знаходимо асимптотику

$$\Phi^-(p) \sim \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\frac{\tau_1}{K^+(-1)G^+(-1)} + \frac{\tau_2}{K^+(-\lambda_1-1)G^+(-\lambda_1-1)} \right], \quad p \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Існують асимптотики

$$\tau_{r\theta} \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}, \quad \theta = 0, \quad r \rightarrow l+0; \quad (10)$$

$$\left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu_2^2)}{E_2} \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}, \quad \theta = 0, \quad r \rightarrow l-0,$$

де k_{II} – невідомий коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці лінії розриву дочтичних переміщень. Виходячи з виразів (10), за теоремою абелевого типу [21] одержуємо:

$$\Phi^+(p) \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{-2pl}}; \quad \Phi^-(p) \sim -\frac{k_{II}}{\sqrt{2pl}}, \quad p \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Згідно з асимптотиками (9), (11)

$$k_{II} = \frac{\sqrt{2}g\Gamma(\lambda_I + 3/2)}{\Gamma(\lambda_I + 2)G^+(-\lambda_I - 1)} Cl^{\lambda_I + 1/2} - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}G^+(-1)} \tau_1 \sqrt{l}. \quad (12)$$

Довжину пластичних смуг визначимо з умови обмеженості напружень у кінці лінії розриву дотичних переміщень, тобто з умови рівності нулю коефіцієнта k_{II} (12). Звідси отримуємо формулу для знаходження довжини l початкових пластичних смуг:

$$l = L \left(\frac{|C|}{\tau} \right)^{-1/\lambda_I}, \quad L = \left[\frac{2|g|\Gamma(\lambda_I + 3/2)G^+(-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda_I + 2)G^+(-\lambda_I - 1)} \right]^{-1/\lambda_I}. \quad (13)$$

За кут нахилу пластичної смуги до межі поділу середовищ вибиратимемо те значення β , за якого довжина пластичної смуги буде найбільша [1, 6, 22]. Його обчислили для різних кутів $\varphi = \pi - \alpha$ та $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ (див. таблицю). Для $\varphi \geq 135$ кут β дорівнює нулю. Побудували (рис. 2) залежність безрозмірної довжини початкових пластичних смуг L (13) від кута φ ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

Значенням $e_0 = \{2; 3; 5; 10\}$ відповідають значення гострого $\{34,3^\circ; 27,1^\circ; 18,5^\circ; 14,2^\circ\}$ і тупого $\{128,2^\circ; 124,4^\circ; 117,4^\circ; 115,3^\circ\}$ кутів φ максимумів функції L .

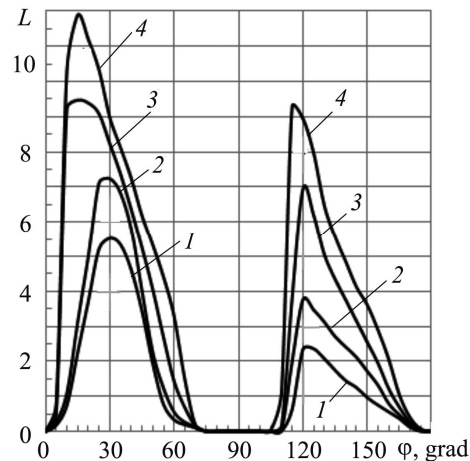
Отже, для фіксованого відношення модулів Юнга $e_0 = E_1/E_2 > 1$ ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$) існують деякі кути $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, що коли $\varphi < \varphi_1$, початкові пластичні смуги розвиваються під кутом β до межі поділу середовищ, який зменшується зі збільшенням кута φ (див. таблицю). Якщо $\varphi_1 \leq \varphi < \varphi_2$, смуги розвиваються вздовж межі поділу середовищ. Коли $\varphi_2 < \varphi < \pi/2$ і $\pi/2 < \varphi < \varphi_3$, початкові пластичні смуги знову утворюють з межею поділу середовищ кут, що зменшується зі збільшенням φ , а при $\varphi \geq \varphi_3$ – розвиваються вздовж неї. Значенням $e_0 = \{2; 3; 5; 10\}$ відповідають значення $\varphi_1 = \{37,3^\circ; 35,9^\circ; 22,4^\circ; 16,5^\circ\}$, $\varphi_2 = \{43,8^\circ; 43,2^\circ; 42,6^\circ; 41,3^\circ\}$ і $\varphi_3 = \{132,2^\circ; 130,7^\circ; 127,1^\circ; 123,4^\circ\}$.

Значення кута β (grad) нахилу пластичних смуг до межі поділу середовищ

φ , grad	e_0				φ , grad	e_0			
	2	3	5	10		2	3	5	10
10	32,1	29,4	18,1	10,2	70	64,4	64,2	63,1	62,9
15	25,8	22,3	10,9	3,5	75	59,2	58,9	58,7	58,4
20	20,2	15,7	5,2	0	80	55,3	55,1	54,4	54,2
25	14,3	11,5	0	0	85	50,2	49,8	49,6	48,7
30	8,6	6,1	0	0	95	40,5	39,4	38,3	37,7
35	4,4	1,2	0	0	100	34,4	34,1	32,5	31,3
40	0	0	0	0	105	28,7	28,3	26,2	25,1
45	88,3	87,8	86,3	85,4	110	23,1	22,4	20,3	18,4
50	84,1	83,4	81,5	81,1	115	18,3	17,2	14,1	11,8
55	79,1	78,3	77,3	76,2	120	12,9	12,2	8,4	6,2
60	74,5	73,3	72,4	71,8	125	8,4	7,5	3,3	0
65	69,3	68,6	68,2	67,3	130	3,2	1,7	0	0

Рис. 2. Залежність безрозмірної довжини пластичних смуг L від кута φ для різних значень параметра e_0 :
1 – 2; 2 – 3; 3 – 5; 4 – 10.

Fig. 2. Dependence of nondimensional length of plastic strips L on the angle φ for different values of parameter e_0 :
1 – 2; 2 – 3; 3 – 5; 4 – 10.



Якщо параметр $e_0 > 1$ і зростає, то кут β зменшується, а область $[\varphi_1; \varphi_2] \cup [\varphi_3; \pi[$ значень кута φ , за яких початкові пластичні смуги розвиваються вздовж межі поділу середовищ, розширюється. Зі зростанням параметра навантаження $|C|$ довжина початкових пластичних смуг збільшується за степеневим законом (13). Що більша границя текучості на зсув τ матеріалу 2, то менша довжина початкових пластичних смуг. Зі зростанням кута φ від нуля до $\pi/2$ і від $\pi/2$ до π довжина початкових пластичних смуг спочатку збільшується, а потім зменшується (рис. 2). Кут φ для початкових пластичних смуг найбільшої довжини є гострим. Що більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1/E_2 > 1$, то більша довжина початкових пластичних смуг та меншими є гострий і тупий кути φ їх максимальної довжини (рис. 2).

ВИСНОВКИ

Побудовано точний розв'язок симетричної задачі теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з кутовою межею поділу середовищ і прямими лініями розриву дотичних переміщень у вершині, та на його основі виведено формулу для довжин початкових вузьких пластичних смуг-зон у кутовій точці межі поділу ізотропних середовищ через коефіцієнт інтенсивності напружень у ній. Установлено характер зміни напрямку розвитку пластичних смуг залежно від кута і пружних сталей. Виявлено існування проміжних значень кута, за яких пластичні смуги розвиватимуться вздовж межі поділу середовищ, примикаючи до неї з боку пластичнішого матеріалу.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена симметричная задача о развитии пластических полос из угловой точки границы раздела изотропных жестко сцепленных сред. Пластическую полосу смоделировано линией разрыва касательного смещения. Точное решение соответствующей задачи теории упругости построено методом Винера–Хопфа и на его основе определены длина и направление развития пластических полос.

SUMMARY. The symmetric problem on calculation of the development of plastic strips from the corner point of interface of isotropic rigidly coupled media is considered. The plastic strip is modeled by the line of tangential displacement rupture. An exact solution of corresponding problem of the theory of elasticity is constructed by the Wiener–Hopf method and on its basis the length and the direction of the plastic strips development are determined.

1. Панасюк В. В., Саврук М. П. Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 1. – С. 49–68.
(Panasyuk V. V. and Savruk M. P. Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics // Soviet Materials Science. – 1992. – **28**, № 1. – P. 41–57.)
2. Саврук М. П., Данилович А. М. Распространение полос скольжения у вершины краевой трещины при плоской деформации // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 1. – С. 56–61.
3. Розтяг пружно-пластичного диска. Ч. 1: Центральна тріщина / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, Г. С. Іваницька, Р. Б. Рицар // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 5. – С. 7–13.
(Panasyuk V. V., Savruk M. P., Ivanyts'ka H. S., and Rytsar R. B. Tension of an elastoplastic disk. Part 1. Central crack // Materials Science. – 1999. – **35**, № 5. – P. 603–611.)

4. *Розтяг пружно-пластичного диска. Ч. 2 : Крайова тріщина / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, Г. С. Іваницька, Р. Б. Рицар // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – 36, № 1. – С. 17–22.*
(*Panasyuk V. V., Savruk M. P., Ivanyts'ka H. S., and Rytsar R. B. Tension of an elastoplastic disk. Part 2. Edge crack // Materials Science. – 2000. – 36, № 1. – P. 14–20.*)
5. *Бережницький Л. Т., Кундрат Н. М. О пластических полосах у вершины линейного жесткого включения // Проблемы прочности. – 1982. – № 11. – С. 66–69.*
6. *Бережницький Л. Т., Кундрат Н. М. О возникновении и развитии пластических деформаций в окрестности остроугольного жесткого включения // Физ.-хим. механика материалов. – 1983. – 19, № 6. – С. 60–68.*
(*Berezhnitskii L. T. and Kundrat N. M. Origin and development of plastic strains in the neighborhood of an acute-angled rigid inclusion // Soviet Materials Science. – 1983. – 19, № 6. – P. 538–546.*)
7. *Дякон В. Н., Каминский А. А., Кипнис Л. А. Начальные полосы пластичности в точке столкновения линий скольжения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1997. – № 3. – С. 100–105.*
8. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А. Расчет пластической зоны в угловой точке в рамках модели “трезубец” // Прикл. механика. – 2002. – 38, № 5. – С. 110–116.*
9. *Лобода В. В., Шевелева А. Е. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными телами // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 5. – С. 76–82.*
10. *Волошко О. І., Лобода В. В. Дослідження зон передруйнування для тріщини в адгезійному прошарку, що з'єднує ізотропні матеріали // Вісн. Київськ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 54–59.*
11. *Камінський А. О., Дудик М. В., Кіпніс Л. А. Дослідження зони передруйнування біля вершини міжфазної тріщини у пружному тілі при зсуві в рамках комплексної моделі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 4. – С. 95–108.*
12. *Кулиев В. Д., Работнов Ю. Н., Черепанов Г. П. Торможение трещины на границе раздела различных упругих сред // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 120–128.*
13. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А. О модели зоны предразрушения в конце трещины, выходящей на негладкую границу раздела упругих сред // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 10. – С. 13–22.*
14. *Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В. Модель “тризубец” пластичної зони в кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу поділу матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – № 4. – С. 41–48.*
15. *Кипнис Л. А., Полищук Т. В. О расчете пластической зоны предразрушения в угловой точке границы раздела сред // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 2. – С. 59–69.*
16. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Полищук Т. В. О начальной зоне предразрушения в угловой точке границы раздела упругих сред // Прикл. механика. – 2012. – 48, № 6. – С. 95–105.*
17. *Леонов М. Я., Витвицкий П. М., Ярема С. Я. Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором // Докл. АН СССР. – 1963. – 148, № 3. – С. 541–544.*
18. *Витвицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения (обзор) // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–18.*
19. *Theocaris P. S. and Gdoutos E. E. Stress singularities in cracked composite full-planes // Int. J. of Fracture – 1977. – 13, № 6. – P. 763–773.*
20. *Dempsey J. P. and Sinclair G. B. On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge // J. Elast. – 1981. – 11, № 3. – P. 317–327.*
21. *Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.*
22. *Черепанов Г. П. Пластические линии разрыва в конце трещины // Прикл. математика и механика. – 1976. – 40, № 4. – С. 720–728.*

Одержано 20.11.2015