УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ ТРИВИМІРНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

В. П. РЕВЕНКО [1], *А. В. РЕВЕНКО* [2]

[1] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;*
[2] *Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів*

Побудовано теорію пластин, навантажених тільки на сторонах паралельно і симетрично серединній поверхні. Використано загальне подання тривимірного напружено-деформованого стану і точно задоволено нульові крайові умови на плоских поверхнях пластини. Розрахунок її тривимірного напруженого стану зведено до визначення двовимірного з припущенням, що перпендикулярні серединній поверхні нормальні напруження незначні. Переміщення і напруження виражено через дві двовимірні гармонічні функції. Записані однорідні розв'язки і розроблено аналітично-числовий алгоритм розв'язання крайової задачі для прямокутної пластини.

Ключові слова: *пластина, плоский напружений стан, тензор напружень, однорідні розв'язки.*

Пластини, навантажені тільки на сторонах паралельно і симетрично серединній поверхні, широко використовують у будівельних та інженерних конструкціях [1–7]. Напружений стан тонких пластин, в основному, розраховують за рівняннями плоскої задачі теорії пружності [2–4], а товстих – використовуючи однорідні розв'язки та символьний метод [5, 8], гармонічні і бігармонічні функції [2–4], гіпотези про поведінку нормалі до серединної поверхні [1, 8], розклад подання Папковича–Нейбера за нормальною до серединної поверхні змінною [5, 9].

Формулювання задачі та її розв'язок. Розглянемо тривимірну статичну задачу теорії пружності для пластини сталої товщини h, серединна поверхня якої займає область S з контуром L і збігається з площиною Oxy декартової системи координат: $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$. Загальний напружений стан пластини розділено [10] на стан згину і симетричного стиску:

$$u_i(x, y, -z) = u_i(x, y, z), \quad i = \overline{1,2}, \quad u_3(x, y, -z) = -u_3(x, y, z), \tag{1}$$

де u_i – переміщення у напрямку відповідних осей декартової системи координат. Зупинимось на частковому випадку другої задачі, коли на плоских поверхнях пластини ($z = h_j$, $j = \overline{1,2}$, $h_1 = h/2$, $h_2 = -h/2$) відсутні нормальні та дотичні навантаження, а до сторін (бічної поверхні) прикладені симетричні і паралельні серединній поверхні S навантаження:

$$\sigma_n(x, y, -z) = \sigma_n(x, y, z), \quad \tau_{nz}(x, y, z) = 0, \quad \tau_{nt}(x, y, -z) = \tau_{nt}(x, y, z), \ \{x, y\} \in L.$$

Для розв'язку задачі використаємо загальне подання рівнянь теорії пружності [11] й запишемо компоненти вектора переміщень:

$$u_x = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial P}{\partial z} - 4(1-\nu)\Phi, \tag{2}$$

Контактна особа: В. П. РЕВЕНКО, e-mail: victorrev@ukr.net

де $P = z\Phi + \Psi$ – бігармонічна функція, а Φ, Ψ, Q – гармонічні, які названо функціями переміщень; ν – коефіцієнт Пуассона. Функція P задовольняє рівняння

$$\Delta P + \frac{\partial^2}{\partial z^2} P = 2 \frac{\partial}{\partial z} \Phi , \tag{3}$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа. Запишемо нормальні

$$\sigma_j = 2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2} - 2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - (-1)^j \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2}\right], \quad \sigma_3 = 2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right] \tag{4}$$

та дотичні напруження

$$\tau_{12} = G\left[2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}\right],$$

$$\tau_{j3} = G\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\frac{\partial P}{\partial x_3} - 4(1-\nu)\Phi\right] - (-1)^j \frac{\partial^2 Q}{\partial x_{3-j} \partial x_3}\right], \quad j = \overline{1,2} , \tag{5}$$

де $G = E/2(1+\nu)$, E − модулі зсуву і Юнґа. Сума нормальних напружень $-2E\frac{\partial \Phi}{\partial z}$.

Зі співвідношень (1), (2) випливає, що функції P, Q парні відносно змінної z, а функція Φ непарна. Зі симетричності навантажень одержимо умови на функції переміщень на зовнішніх плоских поверхнях пластини:

$$\frac{\partial P^+}{\partial z} = -\frac{\partial P^-}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Phi^+}{\partial z} = \frac{\partial \Phi^-}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q^+}{\partial z} = -\frac{\partial Q^-}{\partial z} . \tag{6}$$

Тут знаки "+" і "–" описують граничні значення відповідних функцій на верхній $z = h_1$ і нижній $z = -h_1$ поверхнях пластини. Отже, умови на нижній поверхні виражатимемо через функції на верхній.

Врахувавши співвідношення (4)–(6), запишемо крайові умови для вільних від навантажень поверхонь пластини:

$$\frac{\partial^2 P^+}{\partial x_3^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial \Phi^+}{\partial x_3} = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\frac{\partial P^+}{\partial x_3} - 4(1-\nu)\Phi^+\right] - (-1)^j \frac{\partial^2 Q^+}{\partial x_{3-j} \partial x_3} = 0 , \quad j = \overline{1,2} . \tag{7}$$

Із рівнянь (7) випливають такі умови гармонічності:

$$\Delta[\frac{\partial P^+}{\partial z} - 2(1-\nu)\Phi^+] = 0 , \quad \Delta\frac{\partial Q^+}{\partial z} = 0 . \tag{8}$$

Врахуємо, що нормальні напруження σ_z за такого навантаження пластини незначні і після їх інтегрування вздовж осі Oz знайдемо:

$$\frac{\partial P^+}{\partial z} = 2(2-\nu)\Phi^+ . \tag{9}$$

Підставимо співвідношення (9) у перше рівняння (8) і одержимо:

$$\Delta\Phi^+ = 0 . \tag{10}$$

Використаємо формулу (9) і спростимо друге та третє рівняння (7):

$$4\frac{\partial \Phi^{+}}{\partial x_j} = (-1)^j \frac{\partial^2 Q^{+}}{\partial x_{3-j}\partial x_3}, \quad j=\overline{1,2}. \tag{11}$$

Побудуємо двовимірну теорію симетрично навантажених пластин. Для цього підставимо тривимірні напруження (4), (5) у відомі вирази для нормальних і дотичних зусиль [1, 2, 4], після інтегрування яких визначимо:

$$T_x = 2G\left[\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x \partial y} - 4\nu\Phi^{+}\right], \quad T_y = 2G\left[\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x \partial y} - 4\nu\Phi^{+}\right],$$

$$S_{xy} = S_{yx} = 2G\left[\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x^2}\right)\right], \tag{12}$$

де $\tilde{P} = \int_{-h_1}^{h_1} P dz$, $\tilde{Q} = \int_{-h_1}^{h_1} Q dz$. Використаємо рівняння (3), (9), (10), гармонічність функцій переміщень та побудуємо такі ключові рівняння теорії пластин:

$$\Delta\tilde{P} = -4(1-\nu)\Phi^{+}, \quad \Delta\tilde{Q} = -2\frac{\partial Q^{+}}{\partial z}, \tag{13}$$

де функції Φ^{+} і $\frac{\partial Q^{+}}{\partial z}$ – гармонічні, а $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ – бігармонічні. Співвідношення (11)–(13) еквівалентні відомим рівнянням рівноваги пластини [1, 2, 4] в зусиллях.

Подамо загальний розв'язок гармонічного рівняння (10) так:

$$\Phi^{+} = -\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}, \tag{14}$$

де φ – невідома гармонічна функція. Використаємо вираз (14), співвідношення (11) та одержимо залежність

$$\frac{\partial Q^{+}}{\partial z} = 4\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{15}$$

Врахуємо подання (14), (15) і запишемо загальний розв'язок рівнянь (13):

$$\tilde{P} = 2(1-\nu)y\varphi + g_1(x,y), \quad \tilde{Q} = -4y\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + g_2(x,y), \tag{16}$$

де $\varphi_1 = \int \varphi(x,y)dy + C(x)$, $C(x)$ – невідома функція, яку визначають із умови гармонічності функції φ_1; g_j – гармонічні функції, які можна подати так:

$$g_1 = (1+\nu)\left[\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right], \quad g_2 = (1+\nu)\left[\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right], \tag{17}$$

де ϕ, ψ – гармонічні функції.

Підставимо функції (14), (16), (17) у співвідношення (12) і виразимо зусилля (12) через введені функції:

$$T_x = 2E\{y\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi + 2\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial \psi}{\partial x}\}, \quad T_y = 2E\{y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}\},$$

$$S_{xy} = -2E\{y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y}\}. \tag{18}$$

Отже, функція ϕ не входить у подання (18) і її можна не враховувати. Співвідношення (17) спростимо до вигляду $g_j = -(-1)^j (1+\nu)\dfrac{\partial\psi}{\partial x_j}$. Якщо ввести бігармонічну функцію U за формулою $U = \dfrac{2E}{h}(y\varphi + \dfrac{\partial\psi}{\partial x})$, то зі співвідношень (18) випливатимуть відомі вирази для напружень плоскої задачі теорії пружності.

Напруження в пластині визначимо після ділення відповідних зусиль (18) на товщину пластини h. Врахуємо співвідношення (2), (7), (9) і знайдемо поперечні переміщення і деформації бічної поверхні пластини: $u_z^+ = 2\nu\Phi^+$, $e_z^+ = 2\nu\dfrac{\partial\Phi^+}{\partial z}$.

Для тонкої пластини виконується залежність $\dfrac{\partial\Phi^+}{\partial z} = \dfrac{2}{h}\Phi^+$, яка узгоджується з тривимірною теорією пружності.

Оскільки точно задовольнили всі співвідношення теорії пружності, то переміщення і деформації знайдемо після усереднення формул (2):

$$hu = \frac{\partial\tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial y} = 2(1+\nu)\{\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\} - 4\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad u_z^+ = -h\nu\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$hv = \frac{\partial\tilde{P}}{\partial y} - \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x} = 2(1-\nu)\varphi - 2(1+\nu)[y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}],$$

$$he_y = -2(1+\nu)[y\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}] - 4\nu\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{19}$$

$$he_x = 4\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2(1+\nu)[y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}], \quad e_{xy} = \frac{1}{hG}S_{xy}.$$

Отже, переміщення в напрямку осей Ox, Oy збігаються з усередненими тривимірної теорії пружності.

Зусилля (18) і переміщення (19) виразили через дві гармонічні функції φ і ψ – функції переміщень плоскої задачі. Наведемо їх вираз для відомих тривимірних напружених станів пластини: однорідний стиск–розтяг навантаженнями σ_0 у напрямку осі Ox: $\varphi = \dfrac{h}{4E}\sigma_0 y$, $\varphi_1 = \dfrac{h}{8E}\sigma_0(y^2 - x^2)$, $\psi = 0$, $u_z^+ = -\dfrac{\nu h}{2E}\sigma_0$; однорідний зсув дотичними навантаженнями τ_0: $\varphi = 0$, $\psi = \dfrac{h}{12E}\tau_0(y^3 - 3x^2 y)$.

Розглянемо прямокутну пластину $\Pi = \{(x,y)\in[0,a]\times[-b,b]\}$, на поперечних сторонах $y = \pm b$ якої відсутні навантаження

$$\sigma_y(x,\pm b) = 0,\ \tau_{xy}(x,\pm b) = 0,\ x\in[0,a], \tag{20}$$

а на перпендикулярних до них задані відомі навантаження $\sigma_{g,m}(y)$, $\tau_m(y)$:

$$\sigma_x(a_m, y) = \sigma_m(y) = \sigma_{g,m}(y) - \sigma_0, \quad \tau_{xy}(a_m, y) = \tau_m(y),\ m = \overline{1,2}, \tag{21}$$

де $a_1 = 0$, $a_2 = a$, $\sigma_0 = \int_{-b}^{b}\sigma_{g,m}(y)dy$, $\int_{-b}^{b}\tau_m(y)dy = 0$, $m = \overline{1,2}$.

Однорідні розв'язки (власні функції), які описують парні відносно осі Oy нормальні та непарні дотичні напруження, а також тотожно задовольняють умови (20), будуємо у вигляді суми ряду за власними значеннями, як у праці [12]:

$$\varphi_N(\alpha,\gamma) = hb\sum_{k=1}^{2N}\mathrm{Re}[g_k\theta(\mu_k,\alpha)\sin(\mu_k\gamma)],$$

$$\psi_N(\alpha,\gamma) = hb^3\sum_{k=1}^{2N}\mathrm{Re}[\chi_k g_k\theta(\mu_k,\alpha)\cos(\mu_k\gamma)], \qquad (22)$$

де $\alpha = x/a$, $\gamma = y/b$; N – задане натуральне число; $c = a/b$; μ_k, $\mathrm{Re}(\mu_k) > 0$ – перші N власних значень (коренів функції $\sin(2\mu) + 2\mu = 0$); $\chi_k = \dfrac{1+\nu}{\mu_k}\tan(\mu_k)$; g_k – комплексні коефіцієнти; $\theta(\mu_k,\alpha) = \exp(-c\mu_k\alpha)$, $\theta(\mu_{k+N},\alpha) = \exp(c\mu_k(\alpha-1))$, $\mu_{k+N} = \mu_k$, $k = \overline{1,N}$.

Після підставляння функцій переміщень (22) у співвідношення (18) знайдемо напруження, а умови (21) зведемо до компактної системи чотирьох рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{M} c_k A_k^m(\gamma) = P_m(\gamma), \quad m = \overline{1,4}, \qquad (23)$$

де $M = 4N$; $c_k = \mathrm{Re}\, g_k$, $c_{2N+k} = \mathrm{Im}\, g_k$, $k = \overline{1,2N}$, $A_k^m(\gamma)$ – відомі функції.

Використаємо розроблену раніше [10, 12, 13] аналітично-числову методику і задоволення крайових умов зведемо до знаходження мінімуму $F(N)$ узагальненої квадратичної форми

$$\sum_{m=1}^{4}\int_0^1 \{\sum_{k=1}^{M} c_k A_k^m(\gamma) - P_m(\gamma)\}^2 d\gamma = \sum_{k,j=1}^{M} c_k c_j W_{kj} - 2\sum_{k=1}^{M} c_k V_k + P^2, \qquad (24)$$

коефіцієнти якої обчислили аналітично.

Лема [10]. *Функція $F(N)$ є невід’ємна та не зростає.*

Теорема. *Якщо навантаження $\sigma_m(\gamma)$, $\tau_m(\gamma)$ є неперервні і для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N, що $F(N) < \varepsilon^2/4$, то напруження, які визначають функції $\varphi = \lim\limits_{N\to\infty}\varphi_N$, $\psi = \lim\limits_{N\to\infty}\psi_N$, задовольняють крайові умови (23) у нормі $C[0,1]$ і описують напружений стан прямокутної пластини.*

Доведення теореми ґрунтується на рівності (24) і відомих [13]. Відзначимо, що функціонал, із якого утворюється узагальнена квадратична форма, небілінійний, але значення $F(N)$ за зростання N прямує до нуля і служить оцінкою збіжності і точності розв’язку.

ВИСНОВКИ

На основі тривимірної теорії пружності побудована, без гіпотез про нульові дотичні напруження в середині пластини, двовимірна теорія тонких і товстих пластин, навантажених тільки на сторонах симетрично і паралельно серединній поверхні. Встановлено, що знайдені напруження і переміщення точно дорівнюють відповідним усередненим тривимірної теорії пружності, а із одержаних формул випливають подання напружень плоскої задачі теорії пружності. Використано запропоновану теорію пластин і знайдено зліченні набори однорідних розв’язків та критерії, за яких їх скінченна сума апроксимує напружено-деформований стан пластини.

РЕЗЮМЕ. Построена теория пластин, нагруженных только на сторонах параллельно и симметрично срединной поверхности. Использовано общее представление трехмерного напряженно-деформированного состояния и точно удовлетворены нулевые краевые условия на плоских поверхностях пластины. Определение ее трехмерного напряженного состояния сведено к нахождению двумерного с допущением, что перпендикулярные срединной поверхности нормальные напряжения незначительны. Перемещения и напряжения выражены через две двумерные гармонические функции. Построены однородные решения и разработан аналитико-числовой алгоритм решения краевой задачи для прямоугольной пластины.

SUMMARY. A theory of plates loaded only on the sides parallel and symmetrical to the median surface was constructed. A general representation of the three-dimensional state was used. A three-dimensional stress state of the plate was reduced to a two-dimensional state, using only the assumption that the normal stresses perpendicular to the medium surface were negligible. Movements and stresses were expressed in terms of two harmonic functions. Homogeneous solutions were constructed and the analytical and numerical algorithm for solving the boundary value problem for a rectangular plate was developed.

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1966. – 636 с.
3. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 414 с.
4. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. − М.: Наука, 1982. – 568 с.
5. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
6. *Noor A. K.* Bibliography of Monographs and Surveys on Shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – **43**, № 9. – P. 223–234.
7. *Kobayashi H.* A Survey of Books and Monographs on Plates // Memoris of the Faculty of Eng. – Osaka City Univ., 1997 – **28**. – P. 73–98.
8. *Шалдырван В. А.* Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин (обзор) // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 45–69.
9. *Wang W. and Shi M. X.* Thick plate theory based on general solutions of elasticity // Acta Mechanica. – 1997. – **123**. – P. 27–36.
10. *Ревенко В. П.* Зведення тривимірної задачі теорії згину товстих пластин до розв'язання двох двовимірних задач // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 6. – С. 34–39.
11. *Ревенко В. П.* О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 52–65.
12. *Ревенко В. П.* Розвиток спектрального методу Штурма–Ліувілля розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння // Нелінійні коливання. – 2003. – **6**, № 3. – С. 368–377.
13. *Бакулин В. Н., Ревенко В. П.* Аналитико-численный метод конечных тел для расчета цилиндрической ортотропной оболочки с прямоугольным отверстием // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 6. – С. 3–14.

Одержано 11.01.2016