

УДК 539.3

ФРИКЦІЙНЕ ПРОКОВЗУВАННЯ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ ПІДПОВЕРХНЕВОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Н. І. МАЛАНЧУК, Б. С. СЛОБОДЯН, Р. М. МАРТИНЯК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Досліджено контакт двох пружних півбезмежних тіл з однакових матеріалів за наявності підповерхневого включення, що відрізняється від матриці лише коефіцієнтом лінійного теплового розширення. Тіла перебувають під дією стискальних зусиль та нагріву. Їх напружено-деформований стан подано через висоту зазору та відносний зсув поверхонь на ділянках проковзування. Отримано систему двох сингулярних інтегральних рівнянь, одне з яких розв'язано аналітично, а інше – числово. Проаналізовано залежності ширини зазору і ділянки проковзування, а також контактних напружень від прикладеного навантаження.

Ключові слова: підповерхнє включення, зазор, фрикційне проковзування, відносний зсув поверхонь, сингулярне інтегральне рівняння.

Аналітичні та аналітико-числові розв'язки контактних задач теорії пружності з урахуванням сил тертя часто застосовують в інженерній практиці. Вивчали здебільш вплив зчеплення та проковзування на взаємодію та контактну міцність тіл з неузгодженими поверхнями [1], яким властивий локальний контакт [2–6]. Останнім часом досліджують вплив фрикційних ефектів на контакт тіл з узгодженими поверхнями, для яких характерна локальна відсутність контакту, зокрема зосереджують увагу на локальному проковзуванні поверхонь, зумовленому поодинокими [7–9] чи періодично розташованими [10, 11] поверхневими виїмками або підповерхневою зосередженою силою [12]. Експериментально встановлено [13–15] та теоретично обґрунтовано виникнення розшарування ослабленого інтерфейсу і ділянок фрикційного проковзування внаслідок збурення напружено-деформованого стану тріщинами, розташованими поблизу інтерфейсу. Досліджено порушення безфрикційного контакту півпросторів за наявності локального поверхневого термоопору [16] та за термомеханічної дії підповерхневого включення [17].

Нижче вивчено фрикційне проковзування пружних тіл, зумовлене термомеханічною дією підповерхневого кругового включення, що відрізняється від матриці лише коефіцієнтом лінійного теплового розширення (КЛТР).

Опис та формулювання задачі. Розглянемо контактну взаємодію за умов плоскої деформації двох пружних ізотропних півплощин D_1 ($y < 0$) і D_2 ($y > 0$) з однакових матеріалів (рис. 1). Нижня півплощина містить кругове включення D_0 , центр якого лежить на відстані y_0 від її межі. Радіус включення R малий проти глибини його залягання ($R/y_0 \ll 1$). Модулі зсуву та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл і включення однакові ($G_1 = G_2 = G_0 = G$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0 = \nu$), а КЛТР – різні ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\alpha_0 \neq \alpha$). Вважаємо, що КЛТР включення більший, ніж матриці ($\alpha_0 > \alpha$). Півплощини піддаються дії прикладених на безмежності стискальних зусиль P ($P > 0$) та нагріву до сталої температури T .

Внаслідок різного термічного розширення включення і матриці, спричиненого неоднаковими їх КЛТР, у спряжених тілах збурюється напружений стан.

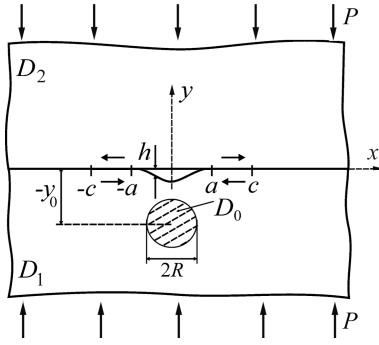


Рис. 1. Контакт тіл. Стрілками вказано напрямок ковзання.

Fig. 1. Contact of solids. Arrows indicate the slip direction.

Тут розглянемо контактну взаємодію з урахуванням розшарування і дії сил тертя. Вважаємо, що на двох симетричних ділянках $(-c, -a)$ та (a, c) , що прилягають до зазора, поверхні проковзують і виникають сили кулонового тертя.

Запишемо контактні-крайові умови такої задачі:

вздовж зазора ($y = 0, |x| \leq a$):

$$\sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0), \quad \tau_{xy}^+(x, 0) = \tau_{xy}^-(x, 0), \quad (1)$$

$$\sigma_y^-(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = 0; \quad (2)$$

вздовж ділянок проковзування ($y = 0, a < |x| < c$):

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad v^-(x, 0) = v^+(x, 0), \quad (3)$$

$$\tau_{xy}^-(x, 0) = -f \sigma_y^-(x, 0) \cdot \text{sign}(x); \quad (4)$$

вздовж ділянок зчеплення ($y = 0, |x| \geq c$):

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0),$$

$$u^-(x, 0) = u^+(x, 0), \quad v^-(x, 0) = v^+(x, 0); \quad (5)$$

на нескінченності в кожній з півплощин D_1, D_2 :

$$\sigma_y(x, \pm\infty) = -P, \quad \tau_{xy}(x, \pm\infty) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$\sigma_x(\pm\infty, y) = 0, \quad \tau_{xy}(\pm\infty, y) = 0, \quad -\infty < y < \infty. \quad (6)$$

Розв'язання задачі. Подамо напруження і похідні від переміщень у комплексному вигляді [18] через висоту зазору між тілами $h(x) = v^+(x, 0) - v^-(x, 0)$

та відносний зсув поверхонь тіл $U(x) = u^-(x, 0) - u^+(x, 0)$:

$$\sigma_y - i \tau_{xy} = \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} - (k-2) \overline{C(z)} - P,$$

$$2G(u' + i v') = (3 - 4\nu) \Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} + (k-2) \overline{C(z)} + \nu P,$$

$$z \in D_k, \quad k = 1, 2;$$

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2} \overline{C(z)} + \frac{(-1)^{k+1} G}{4\pi(1-\nu)} \left(\int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-z} + i \int_{-c}^c \frac{U'(t) dt}{t-z} \right), \quad z \in D_1, \quad k = 1, 2,$$

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z) = \frac{1}{2} C(z) - \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \left(\int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-z} + i \int_{-c}^c \frac{U'(t) dt}{t-z} \right), \quad z \in D_2, \quad (7)$$

Відомо [17], що в тілі ззовні включення напруження такі ж, як і від дії в безмежній однорідній площині центра розширення певної інтенсивності. Зважаючи на це, та враховуючи, що відносний розмір включення R/y_0 малий, вплив включення за дії температури моделюватимемо еквівалентним центром розширення.

Виявлено [17], що за безфрикційного контакту для температури

$$T > \frac{P(1-\nu) y_0^2}{G(1+\nu) R^2 (\alpha - \alpha_0)}$$

ватиметься розшарування над центром включення і утвориться зазор деякої ширини $2a$.

де $\Phi_k(z)$ – кусково-голоморфні функції в площині $D = D_1 \cap D_2$, що зникають на безмежності ($\Phi_k(\infty) = 0$, $k = 1, 2$); $z = x + iy$ – комплексна змінна, $z_0 = -iy_0$ – комплексна координата центра включення; $C(z) = \frac{G(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2 T}{(1-\nu)(z - z_0)^2}$.

Подання (7) задовольняють контактні-крайові умови (1)–(6), за винятком (2) і (4). Визначивши з них контактні нормальні та дотичні напруження

$$\sigma_y^\pm(x, 0) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a \frac{h'(t)dt}{t-x} - P + \frac{G(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2 T(x^2 - y_0^2)}{(1-\nu)(x^2 + y_0^2)^2}, \quad |x| < \infty, \quad (8)$$

$$\tau_{xy}^\pm(x, 0) = \frac{-G}{2\pi(1-\nu)} \int_{-c}^c \frac{U'(t)dt}{t-x} + \frac{2G(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2 Txy_0}{(1-\nu)(x^2 + y_0^2)^2}, \quad |x| < \infty, \quad (9)$$

та задовольнивши умови (2), (4), прийдемо до системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) відносно функцій $h'(x)$ та $U'(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t)dt}{t-x} = \frac{2(1-\nu)P}{G} - \frac{2(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2 T(x^2 - y_0^2)}{(x^2 + y_0^2)^2}, \quad |x| \leq a. \quad (10)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{U'(t)dt}{t-z} = \frac{4(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2 Txy_0}{(x^2 + y_0^2)^2} + \frac{2(1-\nu)}{G} f\sigma_y(x, 0) \cdot \text{sign}(x), \quad |x| \leq c. \quad (11)$$

Функції $h(x)$ та $U(x)$ повинні задовольняти умови

$$h(\pm a) = 0, \quad h'(\pm a) = 0, \quad (12)$$

$$U(\pm c) = 0, \quad U'(\pm c) = 0. \quad (13)$$

Тут перші умови впливають з неперервності переміщень на межі тіл, а другі забезпечують обмеженість нормальних та дотичних контактних напружень (8), (9).

Розв'язуючи СІР (10) і задовольняючи умови (12), визначимо висоту і ширину міжконтактного зазора [18]:

$$h(x) = \frac{2(1-\nu)P(a^2 - x^2)^{3/2}}{G(x^2 + y_0^2)}, \quad |x| \leq a, \quad (14)$$

$$a = \sqrt{-y_0^2 + (G(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2 Ty_0 / (1-\nu)P)^{2/3}}. \quad (15)$$

Враховавши у співвідношенні (8) функцію (14), знайдемо контактні нормальні напруження:

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{-P|x|\sqrt{x^2 - a^2}}{(x^2 + y_0^2)^2} (x^2 + 3y_0^2 + 2a^2), \quad |x| > a. \quad (16)$$

Підставивши функцію (16) у праву частину СІР (11), згідно з другою умовою (13) визначимо [18] його обмежений розв'язок:

$$U'(x) = -\frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\pi} \int_{-c}^c \frac{L(t)dt}{\sqrt{c^2 - t^2}(t-x)}, \quad |x| \leq c. \quad (17)$$

Тут

$$L(x) = \frac{4(1+\nu)(\alpha_0 - \alpha)R^2 Txy_0}{(x^2 + y_0^2)^2} - \begin{cases} 0, & |x| \leq a, \\ \frac{2(1-\nu)x f P \sqrt{x^2 - a^2} (x^2 + 3y_0^2 + 2a^2)}{G(x^2 + y_0^2)^2}, & a < |x| \leq c. \end{cases}$$

Для обчислення інтеграла в правій частині (17) використаємо кусково-сталу апроксимацію функції $L(x)$. В результаті отримаємо:

$$U'(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^n L_j \left(\Gamma(c, x, x_{j+1}) - \Gamma(c, x, x_j) \right), \quad |x| \leq c, \quad (18)$$

$$x_j = -c + \frac{2cj}{n}, \quad L_j = L(x_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$\Gamma(c, x, t) = \ln \frac{c^2 - tx + \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - t^2)}}{c^2 - tx - \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - t^2)}}.$$

Проінтегрувавши рівність (18) з урахуванням умови $U(-c) = 0$, знайдемо відносний зсув поверхонь тіл на зазорі та ділянках проковзування:

$$U(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^n L_j \left[\frac{x - x_{j+1}}{2} \Gamma(c, x, x_{j+1}) - \frac{x - x_j}{2} \Gamma(c, x, x_j) + \left(\arcsin \frac{x}{c} + \frac{\pi}{2} \right) \left(\sqrt{c^2 - x_{j+1}^2} - \sqrt{c^2 - x_j^2} \right) \right], \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Задовольнивши умову $U(c) = 0$, отримаємо рівняння для обчислення півширини ділянки проковзування c :

$$\sum_{j=0}^n L_j \left(\sqrt{c^2 - x_{j+1}^2} - \sqrt{c^2 - x_j^2} \right) = 0.$$

Підставивши функцію (18) у вираз (9), визначимо контактні дотичні напруження:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) &= \frac{-G}{4\pi^2(1-\nu)} \sum_{j=0}^n L_j \left[\frac{c}{M} \left(\frac{\Gamma(c, x, x_j) - \Gamma(c, x, x_{j+1})}{c-x} + \frac{\Gamma(c, x, x_{j+1}) - \Gamma(c, x, x_j)}{c+x} \right) + \right. \\ &+ 2 \sum_{s=1}^{M-1} \frac{\Gamma(c, x_s, x_{j+1}) - \Gamma(c, x_s, x_j) - \Gamma(c, x, x_{j+1}) + \Gamma(c, x, x_j)}{x_s - x} \left. \right] + \\ &+ \left(\Gamma(c, x, x_{j+1}) - \Gamma(c, x, x_j) \right) \ln \frac{c-x}{c+x}, \quad a \leq |x| \leq c, \quad x_s = -c + \frac{2c(s-1)}{M}, \quad s = 1, 2, \dots, M, \\ \tau_{xy}(x, 0) &= \frac{-G}{2\pi^2(1-\nu)} \sum_{j=0}^n L_j \left(\frac{c}{M} \sum_{s=1}^{M-1} \frac{\Gamma(c, x_s, x_{j+1}) - \Gamma(c, x_s, x_j)}{x_s - x} \right), \quad |x| \geq c. \end{aligned}$$

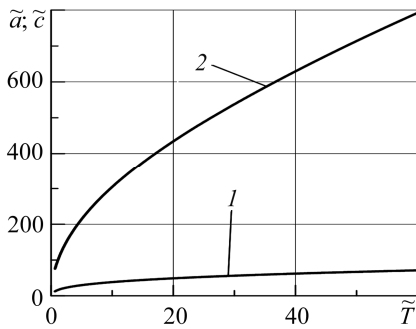


Рис. 2. Залежність півширин зазора \tilde{a} (крива 1) і ділянки проковзування \tilde{c} (крива 2) від температури \tilde{T} .

Fig. 2. Dependence of the half-widths of the gap \tilde{a} (curve 1) and the slip zone \tilde{c} (curve 2) on temperature \tilde{T} .

Числові результати. Грунтуючись на побудованому розв'язку задачі, проаналізуємо поведінку контактної пари для таких безрозмірених параметрів: $\tilde{x} = x/R$, $\tilde{y}_0 = y_0/R$, $\tilde{a} = a/R$, $\tilde{h} = h/R$, $\tilde{c} = c/R$, $\tilde{U} = U/R$, $\tilde{\sigma}_y = \sigma_y/G$, $\tilde{\tau}_{xy} = \tau_{xy}/G$, $\tilde{P} = P/G$, $\tilde{T} = T(\alpha_0 - \alpha)$, якщо $f = 0,1$, $\nu = 0,3$, $\tilde{y}_0 = 10$ та $\tilde{P} = 0,003$.

Півширини зазора \tilde{a} та ділянки проковзування \tilde{c} нелінійно залежать від температури \tilde{T} (рис. 2). З її підвищенням монотонно зростають, причому значення \tilde{c} – стрімкіше.

Абсолютне значення відносного зсуву поверхонь $|\tilde{U}|$ досягає максимуму

поблизу країв зазора (рис. 3а), монотонно спадаючи до нуля з наближенням до краю ділянки проковзування. З підвищенням температури \tilde{T} його абсолютне значення і максимум зростають.

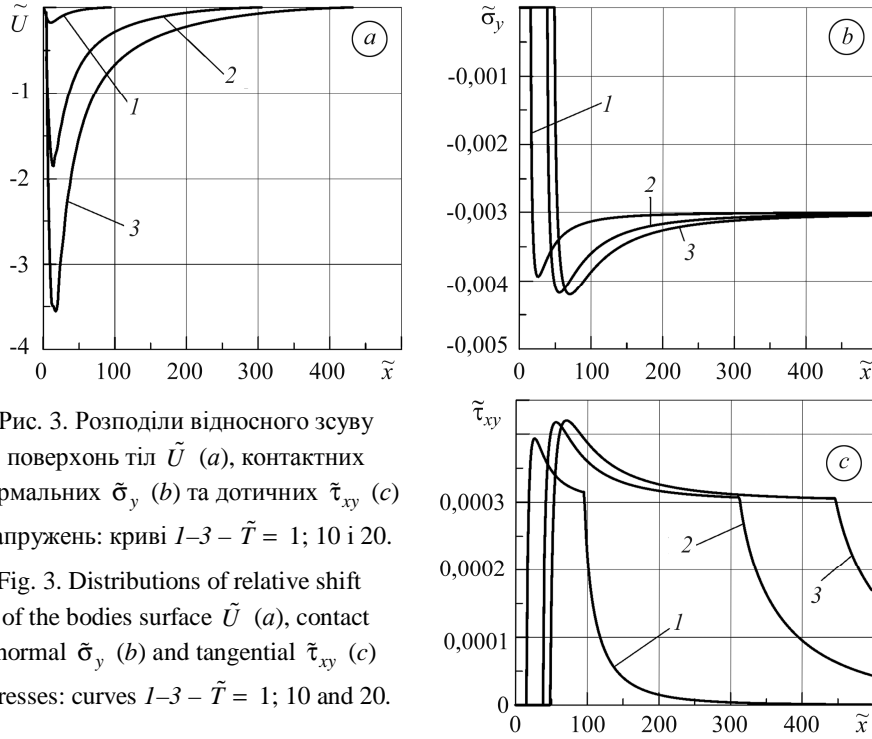


Рис. 3. Розподіли відносного зсуву поверхонь тіл \tilde{U} (а), контактних нормальних $\tilde{\sigma}_y$ (b) та дотичних $\tilde{\tau}_{xy}$ (c) напружень: криві 1–3 – $\tilde{T} = 1; 10$ і 20.
 Fig. 3. Distributions of relative shift of the bodies surface \tilde{U} (a), contact normal $\tilde{\sigma}_y$ (b) and tangential $\tilde{\tau}_{xy}$ (c) stresses: curves 1–3 – $\tilde{T} = 1; 10$ and 20.

Абсолютне значення нормальних контактних напружень $|\tilde{\sigma}_y|$ з віддаленням від зазору спочатку зростає, досягаючи максимуму поблизу його краю, а далі монотонно спадає, асимптотично наближаючись до прикладених на нескінченності стискальних навантажень $\tilde{P} = 0,003$ (рис. 3b).

На ділянці проковзування контактні дотичні напруження $\tilde{\tau}_{xy}$ дорівнюють контактному тиску, помноженому на коефіцієнт тертя ($\tilde{\tau}_{xy} = f |\tilde{\sigma}_y|$) (рис. 3c), тому їх максимум досягається у тій самій точці поблизу краю зазору, що й максимум контактного тиску $|\tilde{\sigma}_y|$. Поза ділянкою проковзування вони монотонно спадають до нуля за прямування координати \tilde{x} до нескінченності.

ВИСНОВКИ

Вивчено фрикційний контакт двох пружних півплощин з підповерхневим включенням, коефіцієнт лінійного теплового розширення якого більший, ніж матриці, за одночасної дії стискальних зусиль та нагріву до сталої температури. З досягненням температури певного значення між тілами над центром включення відбувається розшарування та виникають дві ділянки проковзування з тертям, прилеглі до країв зазора. Відповідну контактну задачу зведено до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь для визначення висоти зазора та відносного зсуву поверхонь тіл. На основі отриманого розв'язку проаналізовано контактні параметри системи. Виявлено, що ширина зазора та ділянки проковзування нелінійно залежить від температури та зростає з її підвищенням. Абсолютне значення відносного зсуву поверхонь тіл, контактний тиск та контактні дотичні напруження також збільшуються з ростом температури і досягають максимальних значень поблизу країв зазора.

РЕЗЮМЕ. Исследован контакт двух упругих полупространств из одинаковых материалов при наличии подповерхностного включения, которое отличается от матрицы только коэффициентом линейного теплового расширения. Тела подвергнуты воздействию сжимающих усилий и нагрева. Напряженно-деформированное их состояние выражено через высоту зазора и относительный сдвиг границ тел на участках проскальзывания. Для их определения получена система сингулярных интегральных уравнений, одно из которых решено аналитически, а другое – численно. Проанализированы зависимости ширины зазора и участка проскальзывания, а также контактных напряжений от приложенной нагрузки.

SUMMARY. The contact of two elastic half-spaces made of identical materials, one of which has a subsurface inclusion, under simultaneous heating and loading by normal forces is investigated. The coefficients of linear thermal expansion of the inclusion and the matrix are different. The stress-strain state of the bodies is represented through a gap height and a relative shift of the boundaries in the slip zones. A system of singular integral equations is obtained to determine these functions. One of these equations is solved analytically, and the other is solved numerically. The dependences of the widths of the gap and the slip zone and the contact stresses on the applied load are analyzed.

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
2. Панасюк В. В., Даццишин О. П., Щур Р. Б. Залишкова довговічність твердих тіл, що контактують в умовах фретинг-втоми // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 2. – С. 5–19. (Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., and Shchur R. B. Residual durability of solids contacting under conditions of fretting fatigue // Materials Science. – 2000. – **36**, № 2. – P. 153–169.)
3. Datsyshyn O. P. and Kadyra V. M. A fracture mechanics approach to prediction of pitting under fretting fatigue conditions // Int. J. of Fatigue. – 2006. – **28**, № 4. – P. 375–385.
4. Даццишин О. П., Кадыра В. М. Розвиток крайових тріщин під час фретинг-втоми за умов зчеплення/проковзування в контактні між тілами // Машинознавство. – 2006. – № 3. – С. 9–15.
5. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Роль истории нагружения в механике контактного взаимодействия при учете сил трения в зоне контакта // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2002. – № 4. – С. 16–25.
6. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
7. Malanchuk N. and Martynyak R. Contact interaction of two solids with surface groove under proportional loading // Int. J. Solids Struct. – 2012. – **49**, № 23–24. – P. 3422–3431.
8. Malanchuk N., Martynyak R., and Monastyrskyy B. Thermally induced local slip of contacting solids in vicinity of surface groove // Int. J. Solids Struct. – 2011. – **48**, № 11–12. – P. 1791–1797.
9. Локальне проковзування пружних тіл за наявності газу в міжконтактному зазорі / Б. С. Слободян, Н. І. Маланчук, Р. М. Мартиняк, Б. А. Ляшенко, В. Є. Марчук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 2. – С. 91–96. (Slobodyan Z. V., Mahlatyuk L. A., Kupovych R. B., and Khaburs'kyi Ya. M. Compositions based on the extracts of oak bark and chips as corrosion inhibitors for medium-carbon steels in water // Materials Science. – 2015. – **50**, № 5. – С. 687–696.)
10. Chumak K., Malanchuk N., and Martynyak R. Partial slip contact problem for solids with regular surface texture assuming thermal insulation or thermal permeability of interface gaps // Int. J. of Mech. Sci. – 2014. – **84**. – P. 138–146.
11. Goryacheva I. G., Malanchuk N. I., and Martynyak R. M. Contact interaction of bodies with a periodic relief during partial slip // J. Appl. Math. Mech. – 2012. – **76** (5). – P. 621–630.
12. Маланчук Н. І. Проковзування тіл в околі розшарування за дії зосередженої приповерхневої сили // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 4. – С. 173–180.
13. Cook M. L. and Underwood C. A. Fracture termination and step-over at bedding interfaces due to frictional slip and interface opening // J. of Struct. Geology. – 2001. – **23**. – P. 223–238.
14. Dyskin A. V. and Galybin A. N. Solutions for dilating shear cracks in elastic plane // Int. J. of Fract. – 2001. – **109**. – P. 325–344.
15. Goldstein R. V. and Osipenko N. M. Fracture initiation on the contact under shear // 19th European Conf. on Fract. Proc. CD: Paper 399, ISBN 978-5-905576-18-8. – Kazan, 2012.
16. Krishnafovich A. A. and Martynyak R. M. Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, № 2. – P. 159–164.
17. Мартиняк Р. М. Порушення контакту півпросторів при термомеханічній дії підповерхневого включення // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 71–77.
18. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962 – 600 с.

Одержано 10.07.2015