

УДК 539.375

КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ДОВІЛЬНО РОЗТАШОВАНОЇ ДУГОВОЇ ТРІЩИНИ В КРУГОВОМУ ДИСКУ ПІД ЧАС ЙОГО ОБЕРТАННЯ

О. П. ДАЦИШИН, Г. П. МАРЧЕНКО, І. А. РУДАВСЬКА

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розглянуто плоску задачу теорії пружності для кругового диска з довільно розташованою дуговою тріщиною під дією обертового навантаження. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв'язують числово методом механічних квадратур. Отримано числові значення коефіцієнтів інтенсивності напружень та кутів початкового поширення тріщини залежно від її розташування та геометричних параметрів (кривини і довжини).

Ключові слова: *круговий диск, дугова тріщина, обертове навантаження, відцентрові сили, метод сингулярних інтегральних рівнянь, коефіцієнти інтенсивності напружень.*

Сучасні машини і механізми мають обертальні частини, в яких під час їх обертання виникають відцентрові сили. Таке навантаження, а також сама кругова форма обертальних частин нерідко є причинами появи дугоподібних тріщин, які можуть призвести до аварійних ситуацій. Особливо це стосується високошвидкісного обертового навантаження, яке характерне, наприклад, для роторів парових або газових турбін, швидкість обертання яких досягає десятків тисяч обертів за хвилину. Тому важливо визначити напружений стан таких частин машин і механізмів із наявними тріщинами, в т.ч. коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН).

З літератури відомі КІН, отримані за обертання диска з прямолінійною тріщиною навколо свого центра. Так, у праці [1] методом граничних колокацій значення КІН одержано для довільно розташованої прямолінійної тріщини, а для часткового випадку ексцентрично розташованої діаметральної тріщини результати описано апроксимаційними формулами.

Проте за обертового навантаження у диску можливе утворення дугоподібних тріщин. Для концентричної тріщини КІН отримано методом граничних елементів [2]. Нижче методом сингулярних інтегральних рівнянь розв'язано плоску задачу теорії пружності для кругового диска з довільно розташованою тріщиною вздовж дуги кола, який обертається зі сталою кутовою швидкістю. А прямолінійну тріщину розглядали як окремий випадок дугової. Отримано числові значення КІН, а також кутів початкового поширення тріщини.

Формулювання задачі. Розглянемо пружний ізотропний круговий диск радіуса R , обмежений контуром L_0 , з центром у початку основної системи координат xOy (рис. 1). Диск послаблений внутрішньою довільно розташованою дугоподібною тріщиною вздовж контуру L , віднесеною до локальної системи координат $x_1O_1y_1$. Вісь O_1x_1 локальної системи координат нахилена до осі Ox під кутом α , а афікс її центра O_1 в основній системі визначають співвідношенням $z_1^0 = r_0 e^{i\theta_0}$.

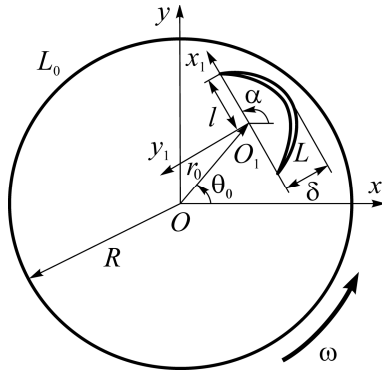


Рис. 1. Загальна схема задачі.

Fig. 1. General scheme of the problem.

руженого стану мають вигляд [3]

$$\sigma_r = \sigma_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right); \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \left(1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \frac{r^2}{R^2} \right); \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad (3)$$

де $\sigma_0 = (3+\nu)\rho\omega^2 R^2/8$ – максимальне значення напружень у центрі диска; ν – коефіцієнт Пуассона; ρ – густина матеріалу; ω – кутова швидкість обертання диска. За плоскої деформації у формулах (3) ν треба замінити на $\nu/(1-\nu)$.

З відомих формул, які зв'язують компоненти тензора напружень у декартовій і полярній системах координат [4], знаходимо компоненти напружень у диску в декартових координатах у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} [\sigma_r + \sigma_\theta - (\sigma_\theta - \sigma_r) \cos 2\theta]; & \sigma_y &= \frac{1}{2} [\sigma_r + \sigma_\theta + (\sigma_\theta - \sigma_r) \cos 2\theta]; \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Скориставшись крайовими умовами задачі (1), (2), з допомогою комплексних потенціалів Колосова–Мусхелішвілі для диска з криволінійними тріщинами [5] за однієї тріщини отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) сформульованої задачі

$$\frac{1}{\pi} \int_L [K(t, \tau) g'(\tau) dt + L(t, \tau) \overline{g'(\tau)} d\bar{\tau}] = p(\tau), \quad \tau \in L. \quad (5)$$

Ядра цього рівняння визначають з формул

$$K(t, \tau) = f_1(T, T') + \overline{f_2(T, T')} + e^{-2i\alpha} \frac{d\bar{\tau}}{d\tau} [T' \overline{g_2(T, T')} + h_2(T, T')]; \quad (6)$$

$$L(t, \tau) = f_2(T, T') + \overline{f_1(T, T')} + e^{-2i\alpha} \frac{d\bar{\tau}}{d\tau} [T' \overline{g_1(T, T')} + \overline{h_1(T, T')}], \quad (7)$$

де

$$f_1(T, T') = \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[\frac{1}{T-T'} + \frac{\bar{T}}{T\bar{T}-R^2} \right]; \quad f_2(T, T') = \frac{e^{-i\alpha}}{2} \frac{T'(T\bar{T}-R^2)(T'\bar{T}-2R^2)}{R^2(T'\bar{T}-R^2)^2}; \quad (8)$$

$$h_1(T, T') = \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[\frac{\bar{T}^3}{(T'\bar{T}-R^2)^2} - \frac{\bar{T}}{(T-T')^2} \right]; \quad (9)$$

Вважаємо, що край диска і береги тріщини вільні від навантаження. Таким чином, крайові умови задачі мають вигляд

$$N(t) + iT(t) = 0, \quad t \in L_0; \quad (1)$$

$$N^\pm(t) + iT^\pm(t) = 0, \quad t \in L, \quad (2)$$

де N і T – нормальна і дотична компоненти зусиль. Верхні індекси у формулі (2) вказують на граничні значення відповідних величин на контурі тріщини L за підходу до нього зліва (+) або справа (-).

Диск обертається навколо свого центра зі сталою кутовою швидкістю ω , в результаті чого в кожній його точці виникають напруження, які в полярній системі координат (r, θ) з центром в точці O для плоского напруженого стану мають вигляд [3]

$$h_2(T, T') = \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left[\frac{1}{T - T'} + \frac{\bar{T}}{T'\bar{T} - R^2} + \frac{\bar{T}(T'\bar{T} - 3R^2)(T\bar{T} - R^2)}{(T'\bar{T} - R^2)^3} \right];$$

$$g_1(T, T') = \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[\frac{1}{(T - T')^2} - \frac{\bar{T}^2}{(T'\bar{T} - R^2)^2} \right]; \quad g_2(T, T') = e^{-i\alpha} \frac{(T\bar{T} - R^2)R^2}{(T'\bar{T} - R^2)^3}; \quad (10)$$

$$T = te^{i\alpha} + z_1^0; \quad T' = \tau e^{i\alpha} + z_1^0. \quad (11)$$

Праву частину СІР (5) отримаємо на основі методу суперпозиції, знайшовши нормальні σ_n і дотичні τ_n напруження на контурі тріщини в суцільному диску, у вигляді

$$p(\tau) = -(\sigma_n - i\tau_n), \quad \tau \in L, \quad (12)$$

де

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha' + \sigma_y \sin^2 \alpha' - 2\tau_{xy} \sin \alpha' \cos \alpha';$$

$$\tau_n = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha' \cos \alpha' - \tau_{xy} (\cos^2 \alpha' - \sin^2 \alpha'), \quad (13)$$

σ_y , σ_x і τ_{xy} визначають за формулами (3), (4), в яких $r = \sqrt{(\operatorname{Re} T')^2 + (\operatorname{Im} T')^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im} T' / \operatorname{Re} T')$, а кут $\alpha' = \pi/2 - \operatorname{arctg}(d \operatorname{Im} T' / d \operatorname{Re} T')$.

Для однозначності розв'язку СІР (5) необхідна додаткова умова

$$\int_L g'(t) dt = 0, \quad (14)$$

якою забезпечуємо однозначність переміщень за обходу контуру L .

Параметричне рівняння контуру тріщини L вздовж дуги кола в локальній системі координат $x_1 O_1 y_1$ задамо співвідношенням [4]

$$t = \omega(\xi) = l \frac{(\xi - i\varepsilon)}{(1 - i\xi\varepsilon)}, \quad t \in L, \quad |\xi| \leq 1, \quad (15)$$

де $\varepsilon = \delta/l$, l – довжина хорди, що з'єднує вершини тріщини; δ – віддаль від центра тріщини до цієї хорди (рис. 1). Коли $\varepsilon = 0$, маємо частковий випадок прямолінійної тріщини. На підставі параметричного рівняння контуру тріщини (15), після заміни змінних $t = \omega(\xi)$, $|\xi| \leq 1$ та $\tau = \omega(\eta)$, $|\eta| \leq 1$ в СІР (5) та в додатковій умові (14) отримаємо систему двох інтегральних рівнянь у нормалізованій формі для визначення похідної від розриву переміщень на берегах тріщини $g'(\omega(\xi))$, $|\xi| \leq 1$. Ці рівняння розв'язуємо числово методом механічних квадратур Гаусса–Чебишова [4], і на основі їх розв'язку знаходимо КІН за формулою [4]

$$K_I^\pm - iK_{II}^\pm = \mp \sqrt{|\omega'(\pm 1)|} u(\pm 1) / \omega'(\pm 1), \quad (16)$$

де верхні знаки відносяться до правої вершини тріщини, а нижні – до лівої; шукана функція $u(\xi) = g'(\omega(\xi)) \omega'(\xi) \sqrt{1 - \xi^2}$. Також припускаючи, що локальне руйнування в обох вершинах тріщини відбувається за механізмом нормального розриву, для визначення кутів її початкового поширення θ_{\mp}^\pm використовуємо узагальнений критерій нормального розриву (σ_θ -критерій).

Числові результати. Відносні КІН $F_{I,II}^\pm = K_{I,II}^\pm / (\sigma_0 \sqrt{\pi R})$ в обох вершинах дугової тріщини отримали залежно від кута її орієнтації α для різних значень

параметра кривини $\varepsilon = \delta/l = 0; 0,1; 0,3$ і за фіксованих відносних величин $r_0/R = 0,75; l/R = 0,24$ та кута $\theta_0 = 0^\circ$ (рис. 2).

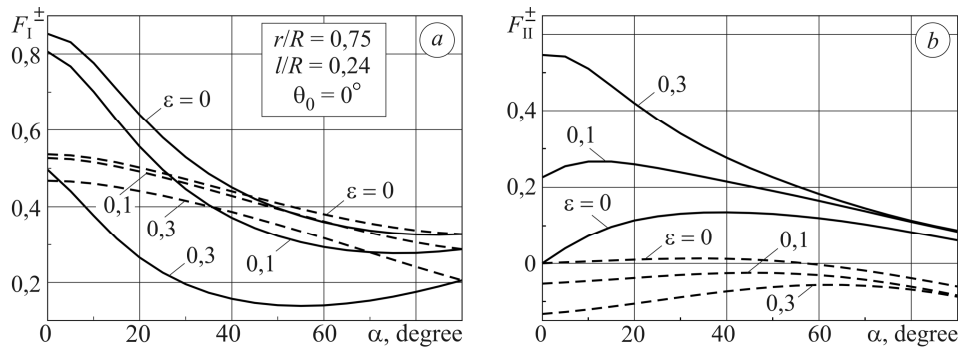


Рис. 2. Залежність відносних КІН F_I^\pm (а) і F_{II}^\pm (б) у вершинах дугової тріщини від кута її орієнтації α для різних значень параметра кривини $\varepsilon = \delta/l$; суцільні криві – для правої вершини тріщини (+), штрихові – для лівої (-).

Fig. 2. Relative SIF F_I^\pm (a) and F_{II}^\pm (b) at the tips of an arc-shaped crack vs. crack orientation angle α for different values of the curvature parameter $\varepsilon = \delta/l$; solid lines – for the right crack tip (+), dashed lines – for the left one (-).

Як бачимо (рис. 2а), найбільші КІН K_I маємо для правої вершини тріщини, коли вона максимально наближена до межі диска ($\alpha = 0^\circ$). Зі зміною кута α від 0° до 90° , коли права вершина віддаляється від межі, КІН K_I^+ спочатку інтенсивно зменшуються і тільки біля $\alpha = 90^\circ$ трохи підростають. Діапазон зміни КІН K_I для правої вершини значно більший, ніж для лівої, оскільки вона ближча до межі диска. Цікаво, що КІН K_I найбільші для прямолінійної тріщини як для правої, так і для лівої її вершини, і зі збільшенням кривини вони зменшуються. Діапазон зміни КІН K_{II} (рис. 2б) для правої вершини також більший.

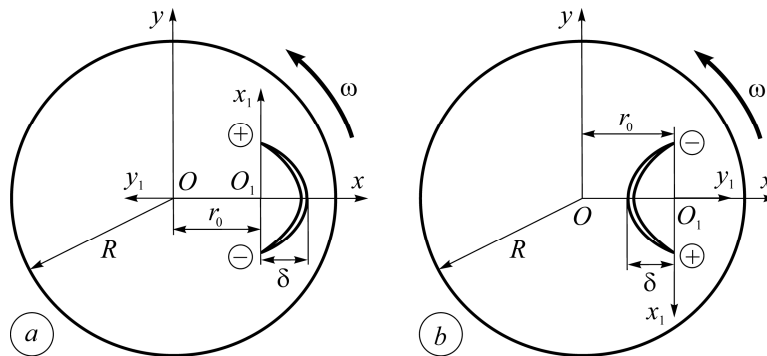


Рис. 3. Дугова тріщина, обернена вершинами від межі диска для $\alpha = \pi/2$ (а) і до межі для $\alpha = 3\pi/2$ (б).

Fig. 3. Arc-shaped crack with tips turned from the disk boundary at $\alpha = \pi/2$ (a) and towards it at $\alpha = 3\pi/2$ (b).

Розглянули два часткових випадки, коли дугова тріщина розташована симетрично відносно радіуса диска. Перший, коли тріщина обернена вершинами від межі диска (вгнута тріщина; рис. 3а), другий – до межі (випукла тріщина; рис. 3б).

Як і очікували, КІН K_I найбільші для випуклої тріщини (табл. 1). Для малих кривин випуклої тріщини її вершини просуватимуться одна до одної, а для великих кривин – протилежно. Вершини вгнутої тріщини за будь-якої її кривини просуватимуться одна від одної. Проте для обох випадків тріщина все одно поширюватиметься до межі диска.

Таблиця 1. Відносні КІН та кути початкового поширення для вгнутої ($\alpha = \pi/2$) і випуклої ($\alpha = 3\pi/2$) тріщин; $r_0/R = 0,8$; $l/R = 0,3$

ε	$F_I^+ = F_I^-$	$F_{II}^+ = -F_{II}^-$	$\theta_*^+ = -\theta_*^-$
0	0,4152/0,4152	0,1323/-0,1323	-30° / 30°
0,1	0,3308/0,4786	0,1564/-0,0769	-39° / 17°
0,2	0,2468/0,5091	0,1474/-0,0021	-44° / 0°
0,3	0,1826/0,5077	0,1144 / 0,0779	-45° / -17°
0,4	0,1483/0,4830	0,0711/0,1534	-39° / -30°
0,5	0,1469 / 0,4440	0,0302/0,2204	-22° / -40°

Примітка: в чисельнику – результати для вгнутої тріщини, в знаменнику – для випуклої.

Також розглянули випадок симетричного розташування дугової тріщини відносно радіуса диска з розхилом 30° і однаковим з контуром диска радіусом кривини R для різних відносних віддалей d/R центра тріщини від межі диска, коли $\alpha = \pi/2$ (рис. 4). Зауважимо, що подібні тріщини часто виникають, наприклад, під час експлуатації залізничних коліс [6].

Як виявили (табл. 2), найбільші значення КІН K_I^\pm досягаються для тріщини, яка знаходиться найдалше від межі диска, а найбільші K_{II}^\pm – навпаки для ближчої до краю тріщини. І для будь-яких розташувань тріщина поширюватиметься з обох вершин в бік межі диска.

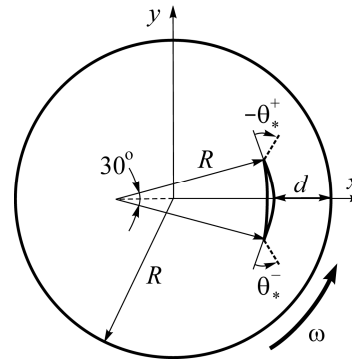


Рис. 4. Дугова тріщина однакової з контуром диска кривини для $\alpha = \pi/2$.

Fig. 4. Arc-shaped crack of the same curvature with a disk contour at $\alpha = \pi/2$.

Таблиця 2. Залежність відносних КІН та кутів початкового поширення дугової тріщини від її віддалі до межі диска; $\alpha = \pi/2$

d/R	0,1	0,3	0,5	0,7
$F_I^+ = F_I^-$	0,2192	0,3373	0,4291	0,4936
$F_{II}^+ = -F_{II}^-$	0,1345	0,0944	0,0882	0,0869
$\theta_*^+ = -\theta_*^-$	-44°	-28°	-22°	-19°

Зауважимо, що за концентричної тріщини з радіусом кривини r і кутом розхилу 2β отримані результати узгоджуються з відомими [2] (табл. 3).

Таблиця 3. Порівняння відносних КІН для концентричної тріщини в диску (в чисельнику) з відомими [2] (в знаменнику)

β	$r/R = 0,25$		$r/R = 0,5$		$r/R = 0,75$	
	F_I^+	F_{II}^+	F_I^+	F_{II}^+	F_I^+	F_{II}^+
15°	0,982/0,963	0,131/0,132	1,02/1,01	0,148/0,148	1,258/1,257	0,297/0,291
30°	0,924/0,916	0,257/0,259	1,01/1,00	0,341/0,341	1,302/1,322	0,770/0,773
45°	0,827/0,825	0,367/0,372	0,898/0,899	0,514/0,520	0,966/0,986	1,025/1,047
60°	0,704/0,704	0,447/0,457	0,721/0,728	0,621/0,633	0,572/0,592	1,050/1,097
75°	0,575/0,578	0,495/0,510	0,536/0,548	0,663/0,682	0,281/0,288	0,991/1,049

Примітка: $F_{I,II}^+ = K_{I,II}^+ / (\sigma_0 \sqrt{r \sin \beta})$, де $\sigma_0 = (3 + \nu) \rho \omega^2 (R^2 - r^2) / 8$ для плоского напруженого стану.

ВИСНОВКИ

Для довільно розташованої дугової тріщини в диску, який обертається зі сталою кутовою швидкістю, найбільші КІН K_I досягаються біля вершини, яка найближча до межі диска.

За дугової тріщини, симетрично розташованої відносно радіуса диска, КІН K_I в обох вершинах завжди більші для випуклої тріщини (рис. 3b) порівняно з вгнутою (рис. 3a). Випукла та вгнута тріщини поширюватимуться до межі диска.

Для симетрично розташованої вгнутої тріщини з однаковим з контуром диска радіусом кривини (рис. 4) найбільші значення КІН K_I^+ маємо для тріщини, яка знаходиться найдалше від межі.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена плоская задача теории упругости для кругового диска с произвольно расположенной дугообразной трещиной под действием вращательной нагрузки. Задача сводится к сингулярному интегральному уравнению, которое решается численно методом механических квадратур. Получены численные значения коэффициентов интенсивности напряжений и углов начального распространения трещины в зависимости от ее расположения и геометрических параметров (кривизны и длины).

SUMMARY. A plane problem of elasticity theory for a circular disk with arbitrarily located arc-shaped crack under the action of rotational load has been considered. The problem has been reduced to the singular integral equation which is solved numerically by the method of mechanical quadratures. The numerical values of the stress intensity factors and angles of initial crack propagation depending on crack location and geometric parameters (curvature and length) have been obtained.

1. *Isida M.* Rotating disk containing an internal crack located at an arbitrary position // Eng. Fract. Mech. – 1981. – **14**, № 3. – P. 549–555.
2. *Smith R. N. L.* Stress intensity factors for an arc crack in a rotating disk // Eng. Fract. Mech. – 1985. – **21**, № 3. – P. 579–587.
3. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
4. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. *Саврук М. П., Казберук А.* Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. посіб. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – Т. 14. – 384 с.
6. *Инструкция по осмотру, освидетельствованию, ремонту и формированию вагонных колесных пар ЦВ/3429.* – М.: Транспорт, 1977. – 88 с.

Одержано 05.08.2016