

УДК 539.3

## ТЕРМОПРУЖНІСТЬ АНІЗОТРОПНИХ БІМАТЕРІАЛЬНИХ ТІЛ ІЗ КОНТАКТНИМ ТЕРМООПОРОМ МЕЖІ ПОДІЛУ СКЛАДНИКІВ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Г. Т. СУЛИМ<sup>1</sup>, Я. М. ПАСТЕРНАК<sup>2</sup>, М. М. ТОМАШІВСЬКИЙ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Львівський національний університет ім. Івана Франка;

<sup>2</sup> Луцький національний технічний університет

З використанням розширеного формалізму Стро та теорії функції комплексної змінної побудовано інтегральні співвідношення типу Сомільяни і відповідні рівняння для термопружних анізотропних біматеріальних тіл із неідеальним тепловим контактом прямолінійної межі поділу складників. З допомогою математичної моделі тонкого деформівного теплоізоляованого включення на основі одержаних інтегральних співвідношень розв'язано задачу термопружності для скінченного анізотропного біматеріального тіла із тонкою неоднорідністю з урахуванням контактного термоопору на межі основних складників матеріалів.

**Ключові слова:** термопружність, біматеріал, тепловий контактний опір, тонке включення, метод граничних елементів

Через неспинний розвиток технологій та щораз ширше застосування у різноманітних сферах різного роду анізотропних композиційних, зокрема й інтелектуальних матеріалів, виникає необхідність у розробці ефективних методів, що дають можливість враховувати якомога більшу кількість чинників, які впливають на розподіл фізико-механічних полів, міцність та, відповідно, довговічність конструкцій чи їхніх елементів. Дуже часто під час виготовлення комбінують декілька різних за механічними та тепловими властивостями композиційних матеріалів, поєднуючи їх дуже тонким клейовим чи іншим шаром, який діє на поля напружень та температур у всьому тілі. Вплив такого шару зручно моделювати умовами неідеального одночасно чи порізно теплового та механічного контакту складників тіла. Загалом виділяють [1, 2] два типи неідеального теплового контакту для слабкої чи високої теплопровідності межі поділу матеріалів.

Анізотропні матеріали вивчали у багатьох працях [1, 3–8]. Для анізотропних біматеріалів добре себе зарекомендував гранично-елементний метод [4]: отримано розв'язок задачі для тріщин, що лежать на межі поділу термопружного анізотропного біматеріалу [8], а також побудовано [7] двовимірну функцію Гріна для анізотропних біматеріалів із неідеальним слабким тепловим та неідеальним податливим механічним контактами. Одержано [5] явний замкнений вигляд ядер інтегральних рівнянь для термопружного анізотропного біматеріалу з ідеальним контактом його складників. Проте побудові ефективних аналітично-числових методів дослідження анізотропних термопружних кусково-однорідних тіл із урахуванням контактного термоопору складників за присутності тонких неоднорідностей, відмінних від тріщин, уваги не приділено.

Нижче для такої структури за допомогою розширеного формалізму Стро [9], апарата теорії функції комплексної змінної [10] і теорії лінійних диференціальних рівнянь побудовано систему інтегральних співвідношень, що із використанням

модифікованого методу граничних елементів [11] дає можливість створити ефективну числову процедуру для вивчення сформульованої задачі.

**Формулювання задачі.** Розглянемо кусково-однорідне лінійно анізотропне термопружне тіло, розташоване у прямокутній системі координат  $Ox_1x_2x_3$  (рис. 1). Рівняння рівноваги, балансу тепла та конститутивні співвідношення плоскої деформації і плоскої стаціонарної теплопровідності запишемо так [9, 11, 12]:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad h_{i,i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta, \quad h_i = -k_{ij}\theta_{,j}. \quad (2)$$

Тут  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  – компоненти тензора деформацій;  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень;  $h_i$  – компоненти вектора густини теплового потоку;  $u_i$  – компоненти вектора переміщення;  $\theta$  – зміна температури порівняно з відліковою;  $C_{ijkl}$  – пружні сталі;  $k_{ij}$  – коефіцієнти теплопровідності;  $\beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{km}$  ( $i, j, k, m = 1, \dots, 3$ ) – модулі теплового розширення (коефіцієнти теплових напружень);  $\alpha_{ij}$  – коефіцієнти теплового розширення. Тензори з компонентами  $C_{ijkl}$ ,  $k_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$  та  $\beta_{ij}$  симетричні. Кома в індексних позначеннях відповідає диференціюванню за вказаною після коми координатою, тобто  $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ .

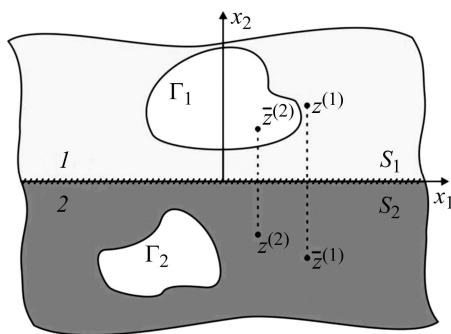


Рис. 1. Термопружний анізотропний біматеріал із неідеальним тепловим контактом складників:  
1 – матеріал 1; 2 – матеріал 2.

Fig. 1. Thermoelastic anisotropic bimaterial with thermally imperfect interface:  
1 – material 1; 2 – material 2.

Згідно з розширеним формалізмом Стро [9, 12] загальний розв'язок рівнянь (1), (2) має вигляд

$$\theta = 2 \operatorname{Re}\{g'(z_t)\}, \quad \vartheta = 2k_t \operatorname{Im}\{g'(z_t)\}, \quad h_1 = -\vartheta_{,2}, \quad h_2 = \vartheta_{,1}, \quad k_t = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2};$$

$$\mathbf{u} = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{A}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{c}g(z_t)], \quad \boldsymbol{\varphi} = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{B}\mathbf{f}(z_*) + \mathbf{d}g(z_t)], \quad \sigma_{i1} = -\varphi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \varphi_{i,1};$$

$$z_t = x_1 + p_t x_2; \quad z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2; \quad \mathbf{f}(z_*) = [F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3)]^T, \quad (3)$$

де  $\vartheta$  – функція теплового потоку;  $g(z_t)$ ,  $F_\alpha(z_\alpha)$  – певні аналітичні функції своїх аргументів; комплексна стала  $p_t$  – корінь (з додатною уявною частиною) характеристичного рівняння теплопровідності  $k_{22}p_t^2 + 2k_{12}p_t + k_{11} = 0$ . Матриці  $\mathbf{A}$  і  $\mathbf{B}$ , вектори  $\mathbf{c}$  і  $\mathbf{d}$ , сталі  $p_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) визначають із задачі на власні значення формалізму Стро [9].

Вектор  $\mathbf{f}(z_*)$  комплексних потенціалів Стро та вектор-функції переміщень і напружень пов'язані співвідношеннями [11]

$$\mathbf{f}(z_*) = \mathbf{B}^T \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{B}^T \mathbf{u}^t - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\varphi}^t, \quad \mathbf{u}^t = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{c}g(z_t)\}, \quad \boldsymbol{\varphi}^t = 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{d}g(z_t)\}. \quad (4)$$

Згідно з виразами (3) функція  $g'(z_t)$ , температура  $\theta$  і функція  $\vartheta$  теплового потоку пов'язані між собою залежністю

$$2g'(z_t) = \theta + i\vartheta/k_t. \quad (5)$$

Оскільки тіло складене з двох розташованих у півплощинах  $S_1$  ( $x_2 > 0$ ) і  $S_2$  ( $x_2 < 0$ ) термопружних анізотропних матеріалів, то на прямій  $x_2 = 0$ , яка є лінією розмежування цих матеріалів (тонкий проміжний шар з розгляду вилучаємо), припускаємо виконання умови неідеального теплового контакту за моделлю Капіці [1] (індексами 1 і 2 позначаємо півплощини  $S_1$  та  $S_2$ )

$$\theta^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \theta^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} - \rho_0 (\vartheta_{,1}^{(2)}(x_1, x_2)) \Big|_{x_2=0}; \quad (6)$$

$$\vartheta^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \vartheta^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} \quad (7)$$

та ідеального механічного контакту

$$\Phi^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \Phi^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}, \quad \mathbf{u}^{(1)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0} = \mathbf{u}^{(2)}(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}. \quad (8)$$

Крайові умови (6) та (7) відповідають моделі тонкого прошарку, для якого згідно з законом теплопровідності Фур'є різниця температур на межі поділу матеріалів пропорційна до нормального теплового потоку крізь цю межу, який згідно з умовою теплового балансу має однакове значення у протилежних точках поверхонь шару. Таким чином, параметр  $\rho_0$  в умові (6) є термоопором межі поділу матеріалів.

Кожна півплощина містить систему гладких замкнених контурів  $\Gamma_1 = \cup_i \Gamma_i^{(1)}$  та  $\Gamma_2 = \cup_i \Gamma_i^{(2)}$ , де можна задавати ті чи інші теплові й механічні крайові умови.

**Розв'язування задачі. Теплопровідність.** Оскільки задача теплопровідності лінійна, то її розв'язок можна подати як суперпозицію однорідного розв'язку  $g_{1\infty}(z_t^{(1)})$  та  $g_{2\infty}(z_t^{(2)})$ , який повинен задовольняти крайові умови (6), (7), і збудованого, спричиненого контурами  $\Gamma_1, \Gamma_2$  та певними крайовими умовами на них.

Позначимо інтеграли Коші комплексної функції температури  $g'_t(z_t^{(i)})$  як

$$q_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = \int_{\Gamma_i} \frac{g'_t(\tau_t^{(i)}) d\tau_t^{(i)}}{\tau_t^{(i)} - z_t^{(j)}}, \quad \bar{q}_t^{(i)}(z_t^{(j)}) = \int_{\Gamma_i} \frac{\overline{g'_t(\tau_t^{(i)})} d\bar{\tau}_t^{(i)}}{\bar{\tau}_t^{(i)} - z_t^{(j)}}, \quad (9)$$

а невластиві інтеграли по необмеженій прямій інтегрування  $-\infty < x_1 < +\infty$  – через

$$m_t(z_t^{(j)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vartheta(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(j)}}, \quad p_t(z_t^{(j)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta^{(2)}(x_1) dx_1}{x_1 - z_t^{(j)}}. \quad (10)$$

Використовуючи співвідношення (5), (9), (10) та крайові умови (6)–(8) на межі поділу матеріалів, інтегральну формулу Коші для функцій  $g'_1(z_t^{(1)})$  та  $g'_2(z_t^{(2)})$  запишемо так:

$$\begin{aligned} g'_1(z_t^{(1)}) &= g'_{1\infty}(z_t^{(1)}) + \frac{1}{2\pi i} q_t^{(1)}(z_t^{(1)}) + \frac{1}{4\pi i} p_t(z_t^{(1)}) + \\ &+ \frac{1}{4\pi k_t^{(1)}} m_t(z_t^{(1)}) - \frac{\rho_0}{4\pi i} m'_t(z_t^{(1)}) \quad (\forall \text{Im}(z_t^{(1)}) > 0), \\ g'_2(z_t^{(2)}) &= g'_{2\infty}(z_t^{(2)}) + \frac{1}{2\pi i} q_t^{(2)}(z_t^{(2)}) - \frac{1}{4\pi i} p_t(z_t^{(2)}) - \\ &- \frac{1}{4\pi k_t^{(2)}} m_t(z_t^{(2)}) \quad (\forall \text{Im}(z_t^{(2)}) < 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Рівняння (11) містять інтеграли (10) по необмеженій області, які суттєво ускладнюють подальше застосування методу граничних елементів. Тому на початковій стадії вилючимо їх зі співвідношень (11). Поступаючи так, і раніше [5], отримаємо систему лінійних диференціальних рівнянь, під час розв'язку якої позбудемось невласливих інтегралів з виразів (11). Остаточно інтегральні подання для температури і теплового потоку у довільній точці  $\xi$  біматеріалу можна записати так:

$$\theta(\xi) = \int_{\Gamma} \left[ \Theta^{\text{IPC}^*}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H^{\text{IPC}^*}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}) + \theta^\infty(\xi) \quad (\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2); \quad (12)$$

$$h_i(\xi) = \int_{\Gamma} \left[ \Theta_i^{\text{IPC}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) h_n(\mathbf{x}) - H_i^{\text{IPC}^{**}}(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}) + h_i^\infty(\xi), \quad (13)$$

де функції  $\theta^\infty(\xi)$  і  $h_i^\infty(\xi)$  – певні однорідні розв'язки для біматеріалу, а ядра  $\Theta^{\text{IPC}^*}$  матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in S_1 \wedge \xi \in S_1: \quad \Theta^{\text{IPC}^*}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{2\pi k_t^{(1)}} \operatorname{Re} \left\{ \ln W_t^{(1,1)} + \ln \bar{W}_t^{(1,1)} + (K-1)L^{(1)}(\bar{W}_t^{(1,1)}) \right\}; \\ \mathbf{x} \in S_2 \wedge \xi \in S_1: \quad \Theta^{\text{IPC}^*}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1-K}{2\pi k_t^{(2)}} \operatorname{Re} \left\{ \ln W_t^{(2,1)} + K(B^{(1)}W_t^{(2,1)}) \right\}; \\ \mathbf{x} \in S_1 \wedge \xi \in S_2: \quad \Theta^{\text{IPC}^*}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1+K}{2\pi k_t^{(1)}} \operatorname{Re} \left\{ \ln W_t^{(1,2)} + K(B^{(2)}W_t^{(1,2)}) \right\}; \\ \mathbf{x} \in S_2 \wedge \xi \in S_2: \quad \Theta^{\text{IPC}^*}(\mathbf{x}, \xi) &= \frac{1}{2\pi k_t^{(2)}} \operatorname{Re} \left\{ \ln W_t^{(2,2)} + \ln \bar{W}_t^{(2,2)} - (K+1)L^{(2)}(\bar{W}_t^{(2,2)}) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут

$$\begin{aligned} W_t^{(i,j)} &= Z_t^{(i)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(j)}(\xi); \quad \bar{W}_t^{(i,j)} = \bar{Z}_t^{(i)}(\mathbf{x}) - Z_t^{(j)}(\xi); \\ n_t^{(i)} &= n_2(\mathbf{x}) - p_t^{(i)} n_1(\mathbf{x}); \quad \delta_t^{(j)} = \delta_{i2} - p_t^{(j)} \delta_{i1}; \quad L^{(i)}(z) = K(B^{(i)}z) + \ln z, \\ B^{(1)} &= \frac{i}{\rho_0} \frac{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}}{k_t^{(1)} \cdot k_t^{(2)}}, \quad B^{(2)} = -\frac{i}{\rho_0} \frac{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}}{k_t^{(1)} \cdot k_t^{(2)}}, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $K(z) = e^z E_1(z)$ , а  $E_1(z)$  – інтегральна показникова функція, тобто  $E_1(z) = \int_z^\infty (e^{-t}/t) dt$ . Решта ядер визначаємо зі співвідношень [13]

$$\begin{aligned} H^{\text{IPC}^*}(\mathbf{x}, \xi) &= -k_{ij} n_i(\mathbf{x}) \Theta_{,j}^{\text{IPC}^*}(\mathbf{x}, \xi), \quad \Theta_i^{\text{IPC}^{**}} = k_{ij} \Theta_{,j}^{\text{IPC}^*}(\mathbf{x}, \xi), \\ H_i^{\text{IPC}^{**}} &= k_{ij} H_{,j}^{\text{IPC}^*}(\mathbf{x}, \xi). \end{aligned} \quad (16)$$

**Термопружність.** Запишемо інтегральну формулу Коші для векторів  $\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)})$  та  $\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)})$  комплексних функцій Стро, які аналітичні в областях  $S_1$  та  $S_2$  відповідно. Оскільки інтегральна формула Коші визначена для аналітичних функцій, які прямують до нуля на нескінченності, то повний розв'язок задачі термопружності біматеріалу можна подати як суму означеного формулою Коші збуреного розв'язку та поданого функціями  $\mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)})$  і  $\mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)})$  однорідного, який задовольняє крайові умови (8). Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)}) + \frac{1}{2\pi i} \left[ \mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \sum_{\beta=1}^3 \mathbf{I}_\beta \left( \mathbf{A}_1^T \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{B}_1^T \mathbf{p}(z_\beta^{(1)}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \langle M_t(z_*^{(1)}) \rangle \boldsymbol{\mu}_1 - \langle P_t(z_*^{(1)}) \rangle \boldsymbol{\lambda}_1 + \rho_0 \langle m_t(z_*^{(1)}) \rangle \boldsymbol{\lambda}_1 \right]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) = \mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)}) + \frac{1}{2\pi i} \left[ \mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \sum_{\beta=1}^3 \mathbf{I}_\beta \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{B}_2^T \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) \right) - \right. \\ \left. - \langle M_t(z_*^{(2)}) \rangle \boldsymbol{\mu}_2 + \langle P_t(z_*^{(2)}) \rangle \boldsymbol{\lambda}_2 \right], \quad (18)$$

де  $\langle F(z_*) \rangle = \text{diag}[F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3)]$ ;  $z_\alpha^{(i)} = x_1 + p_\alpha^{(i)} x_2$ ;  $\mathbf{I}_\beta = \text{diag}[\delta_{1\beta}, \delta_{2\beta}, \delta_{3\beta}]$ , а комплексні сталі  $\boldsymbol{\mu}_i$  і  $\boldsymbol{\lambda}_i$  означені так:

$$\boldsymbol{\mu}_i = \frac{1}{k_t^{(i)}} \left( \mathbf{A}_i^T \text{Im}[\mathbf{d}_i] + \mathbf{B}_i^T \text{Im}[\mathbf{c}_i] \right), \quad \boldsymbol{\lambda}_i = \mathbf{A}_i^T \text{Re}[\mathbf{d}_i] + \mathbf{B}_i^T \text{Re}[\mathbf{c}_i]. \quad (19)$$

У виразах (17), (18) використали такі позначення для інтегралів Коші

$$\mathbf{q}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_j} \left\langle \frac{d\tau_*^{(j)}}{\tau_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(j)}(\tau_*^{(j)}), \quad \bar{\mathbf{q}}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_j} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_*^{(j)}}{\bar{\tau}_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \overline{\mathbf{f}^{(j)}(\tau_*^{(j)})} \quad (20)$$

та невластивих інтегралів

$$\mathbf{m}(z_\beta^{(j)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{\varphi}(x_1) dx_1}{x_1 - z_\beta^{(j)}}, \quad \mathbf{p}(z_\beta^{(j)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{u}(x_1) dx_1}{x_1 - z_\beta^{(j)}}, \quad (21)$$

а  $M_t(z_*^{(i)})$  і  $P_t(z_*^{(i)})$  – первісні функції  $m_t(z_t^{(j)})$  та  $p_t(z_t^{(j)})$  відповідно.

Щоб позбутися невластивих інтегралів у рівняннях (17) та (18), аналогічно, як і у праці [5], отримали систему лінійних алгебричних рівнянь, розв'язок якої дає можливість записати співвідношення, що пов'язують напруження та переміщення у довільній точці термопружного біматеріалу із значеннями на контурі  $\Gamma_i$  температури, теплового потоку та векторів переміщень і напружень. Отже, використовуючи вирази (3), (4), одержимо такі інтегральні формули типу Сомільяни для біматеріалу із неідеальним тепловим контактом складників:

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}^\infty(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} + \\ + \int_{\Gamma} \left[ \mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{r}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}), \\ \boldsymbol{\sigma}_j(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\sigma}_j^\infty(\boldsymbol{\xi}) + \\ + \int_{\Gamma} \left[ \mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{q}_j^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta(\mathbf{x}) + \mathbf{w}_j^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) h_n(\mathbf{x}) \right] ds(\mathbf{x}), \quad (22)$$

де ядра  $\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  такі ж, як у співвідношеннях для біматеріалу з ідеальним контактом складників [5], а інші означені виразами  $\mathbf{x} \in S_1 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_1$ :

$$\mathbf{v}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \left[ - \langle f^*(W_*^{(1,1)}) \rangle \boldsymbol{\mu}_1 - \sum_{\beta=1}^3 \langle f^*(\bar{W}_\beta^{(1,1)}) \rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\boldsymbol{\mu}}_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i}{2k_t^{(1)}} \langle f^*(\bar{W}_t^{(1,1)}) \rangle \boldsymbol{\delta}_1^{(1)} - \frac{\rho_0(1-K)}{4} L^{(1)}(\bar{W}_t^{(1,1)}) \boldsymbol{\kappa}^{(1)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{i\mathbf{c}_1}{2k_t^{(1)}} \left[ f^*(W_t^{(1,1)}) + K f^*(\bar{W}_t^{(1,1)}) \right] + \frac{\rho_0 \mathbf{c}_1 (K-1)^2}{4} L^{(1)}(\bar{W}_t^{(1,1)}) \right\}; \quad (23)$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \xi \in S_1 :$

$$\mathbf{v}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \left[ \sum_{\beta=1}^3 \langle f^*(W_\beta^{(2,1)}) \rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \boldsymbol{\mu}_2 + \frac{i}{2k_t^{(2)}} \langle f^*(W_{t^*}^{(2,1)}) \rangle \boldsymbol{\delta}_2^{(1)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho_0(1+K)}{4} L^{(1)}(W_{t^*}^{(2,1)}) \boldsymbol{\kappa}^{(1)} \right] + \frac{i\mathbf{c}_1(1-K)}{2k_t^{(2)}} f^*(W_t^{(2,1)}) - \frac{\rho_0\mathbf{c}_1(K^2-1)}{4} L^{(1)}(W_t^{(2,1)}) \right\}; \quad (24)$$

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \xi \in S_2 :$

$$\mathbf{v}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \left[ \sum_{\beta=1}^3 \langle f^*(W_\beta^{(1,2)}) \rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \boldsymbol{\mu}_1 - \frac{i}{2k_t^{(1)}} \langle f^*(W_{t^*}^{(1,2)}) \rangle \boldsymbol{\delta}_1^{(2)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho_0(1-K)}{4} L^{(2)}(W_{t^*}^{(1,2)}) \boldsymbol{\kappa}^{(2)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{i\mathbf{c}_2}{2k_t^{(1)}} (1+K) f^*(W_t^{(1,2)}) - \frac{\rho_0\mathbf{c}_2(K^2-1)}{4} L^{(2)}(W_t^{(1,2)}) \right\}; \quad (25)$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \xi \in S_2 :$

$$\mathbf{v}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \left[ -\langle f^*(W_*^{(2,2)}) \rangle \boldsymbol{\mu}_2 + \sum_{\beta=1}^3 \langle f^*(\bar{W}_\beta^{(2,2)}) \rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\boldsymbol{\mu}}_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i}{2k_t^{(2)}} \langle f^*(\bar{W}_{t^*}^{(2,2)}) \rangle \boldsymbol{\delta}_2^{(2)} + \frac{\rho_0(1+K)}{4} L^{(2)}(\bar{W}_{t^*}^{(2,2)}) \boldsymbol{\kappa}^{(2)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{i\mathbf{c}_2}{2k_t^{(2)}} \left[ f^*(W_t^{(2,2)}) - K f^*(\bar{W}_t^{(2,2)}) \right] - \frac{\rho_0\mathbf{c}_2(K+1)^2}{4} L^{(2)}(\bar{W}_t^{(2,2)}) \right\} \quad (26)$$

та співвідношеннями [13]

$$\begin{aligned} r_i^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \xi) &= k_{pq} v_{i,q}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \xi) n_p(\mathbf{x}), \\ q_{ij}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \xi) &= -C_{ijmp} r_{m,p}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \xi) + \beta_{ij} H^{\text{ITC}*}(\mathbf{x}, \xi), \\ w_{ij}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \xi) &= -C_{ijmp} v_{m,p}^{\text{ITC}}(\mathbf{x}, \xi) - \beta_{ij} \Theta^{\text{ITC}*}(\mathbf{x}, \xi). \end{aligned} \quad (27)$$

У виразах для ядер

$$\begin{aligned} Z_*^{(i)}(\mathbf{x}) &= x_1 + p_*^{(i)} x_2, \quad W_*^{(i,j)} = Z_*^{(i)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(j)}(\xi), \quad W_\beta^{(i,j)} = Z_\beta^{(i)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(j)}(\xi), \\ \bar{W}_\beta^{(i,j)} &= \bar{Z}_\beta^{(i)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(j)}(\xi), \quad W_{t^*}^{(i,j)} = Z_t^{(i)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(j)}(\xi), \quad \bar{W}_{t^*}^{(i,j)} = \bar{Z}_t^{(i)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(j)}(\xi), \end{aligned}$$

$$f^*(z) = z(\ln(z) - 1), \quad K = \frac{k_t^{(1)} - k_t^{(2)}}{k_t^{(1)} + k_t^{(2)}}, \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{(1)} = -\boldsymbol{\delta}_2^{(1)} + 2\mathbf{G}_2^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_2; \quad \boldsymbol{\kappa}^{(2)} = -\boldsymbol{\delta}_1^{(2)} - 2\mathbf{G}_1^{(2)} \boldsymbol{\lambda}_1.$$

а  $\boldsymbol{\delta}_i^{(j)}$ ,  $\mathbf{G}_i^{(j)}$  такі ж, як і в праці [5].

Зі співвідношень (22) випливає, що для визначення температури, теплового потоку, переміщень і напружень у довільній точці біматеріалу потрібно, щоб крайові умови на контурах  $\Gamma$  були окреслені для всіх компонент функцій  $\theta(\mathbf{x})$ ,  $h_n(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  та  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  ( $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$ ). Однак під час формулювання крайових задач задають

тільки узгоджену між собою половину із цих компонент. Для визначення інших невідомих крайових значень функцій застосуємо формулу Сохоцького–Племеля [10], яка пов’язує граничне значення функції з головним значенням інтеграла Коші. Схема побудови таких інтегральних рівнянь для біматеріалу така ж, як і для однорідного тіла [11]. Проте вони вироджуються, коли окремі замкнуті контури  $\Gamma_j$  лінії  $\Gamma$  стають берегами математичних розрізів  $\Gamma_{Cj}$  (простих розімкнутих дуг). Тоді слід застосовувати теорію дуальних гіперсингулярних інтегральних рівнянь [11, 13, 14].

Поле напружень та переміщень в околі вершин тонких неоднорідностей, що не лежать на межі поділу матеріалів, описують [13] узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень (КІН), які визначають у локальній системі координат із початком у вершині через функції стрибка за формулами

$$\mathbf{k}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{u}(s), \quad \mathbf{k}^{(2)} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma \mathbf{t}(s), \quad (29)$$

де  $\mathbf{k}^{(1)}$ ,  $\mathbf{k}^{(2)}$  – вектори узагальнених КІН  $K_{ij}$  [13–15];  $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T$  – дійсний тензор Барнетт–Лоте (Barnett–Lothe) [6].

Побудовані на основі отриманих інтегральних подань рівняння разом із моделлю тонкого термопружного включення [13] дають можливість розв’язувати задачі термопружності для біматеріалу з неідеальним тепловим контактом його основних складників, що містять тонкі неоднорідності.

**Числовий аналіз.** Побудовано системи рівнянь ввели в модифікований метод граничних елементів [13]. Щоб продемонструвати ефективність та універсальність розробленого методу, розв’язували задачу термопружності для скінченного біматеріалу із однаковими властивостями складників, враховуючи контактний термоопір його межі поділу. Для розбиття межі біматеріального тіла застосували 32 граничні елементи, а для розбиття включення – 10 разом з двома спеціальними кінцевими.

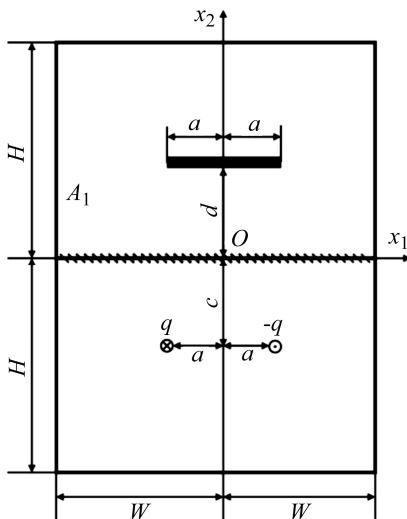


Рис. 2. Скінченна біматеріальна пластина із тонким пружним включенням.

Fig. 2. Finite bimaterial plate containing a thin elastic inclusion.

Розглянемо (рис. 2) скінченне анізотропне термопружне біматеріальне тіло (пластину із теплоізованими бічними поверхнями), складники якого мають однакові механічні та теплові властивості, а тепловий контактний опір внутрішньої прямолінійної склейки поданий залежністю  $\rho_0 = (a/k_{11}) \cdot 10^n$ . Ширина тіла  $2W$ , висота  $2H$  ( $H = 2W$ ). Біматеріал містить тонке прямолінійне ізотропне включення з модулем зсуву  $G^i$  завдовжки  $2a$  ( $a = a_0 \cdot W$ ), завтовшки  $2h = 0,02a$ , яке розташоване в області  $x_2 > 0$  тіла і не зазнає теплового розширення та теплоізоване. Центр включення розташований на відстані  $d = d_0 \cdot W$  до межі поділу матеріалів. В області  $x_2 < 0$  тіла на однаковій відстані  $c = c_0 \cdot W$  від межі поділу та на відстані  $a$  правобіч та лівобіч від опущеного з центра включення до межі поділу перпендикуляра розміщені джерело та стік тепла. Складники біматеріалу виготовлені із ортотропного склопластика з такими властивостями

ми:  $E_1 = 55$  GPa,  $E_2 = 21$  GPa;  $G_{12} = 9,7$  GPa;  $\nu_{12} = 0,25$ ;  $\alpha_{11} = 6,3 \cdot 10^{-6}$   $K^{-1}$ ;  $\alpha_{22} = 2,0 \cdot 10^{-5}$   $K^{-1}$ ;  $k_{11} = 3,46$  W/(m·K);  $k_{22} = 0,35$  W/(m·K). Осі ортотропії збігаються із поданими на рисунку осями системи координат. Відносна жорсткість включення  $k = G^i / G_{12}$ .

Досліджували залежність нормованих величиною  $K_0 = \sqrt{\pi a} \cdot E_1 \cdot \alpha_{11} / k_{11} \cdot q$  двох ненульових узагальнених КІН у правій вершині тонкого включення від безрозмірного параметра  $\eta$  термоопору  $\rho_0$  (рис. 3). Обчислювали для різних значень безрозмірних параметрів  $a_0$ ,  $d_0$  та  $c_0$  при  $k = 10^5$  та за коефіцієнта теплопровідності включення  $k_i = k_{11} \cdot 10^{-10}$  (практично абсолютно жорстке теплоізольоване включення). Суцільні лінії – КІН для відносної довжини включення  $a_0 = 0,2$  за окремих значень параметрів  $d_0$  та  $c_0$ ; штрихові – для відносної відстані  $c_0 = 0,2$  джерел до межі матеріалів та окреслених значень цих параметрів. У всіх випадках КІН залежать від величини  $\eta$ . Причому в околі точки  $\eta = 0$  їх зміна між двома горизонтальними асимптотами для дуже малого і дуже великого термоопору  $\rho_0$  найвідчутніша. Зі збільшенням параметра  $d_0$  абсолютні значення КІН швидко зменшуються, прямуючи до нуля. За фіксованого  $d_0$  зі збільшенням значення  $c_0$  КІН різко зростає, що свідчить про суттєвий вплив на нього неідеальності теплового контакту півплощин у вершинах включення. Для фіксованого значення  $\eta$  та відстані  $c_0$  джерел зі збільшенням довжини включення за невеликих значень  $d_0$  (скажімо,  $d_0 < 0,5$  для  $c_0 = 0,2$ ) КІН спочатку різко зростає, а потім так само швидко зменшується, прямуючи до нуля за розташування вершини включення на межі тіла.

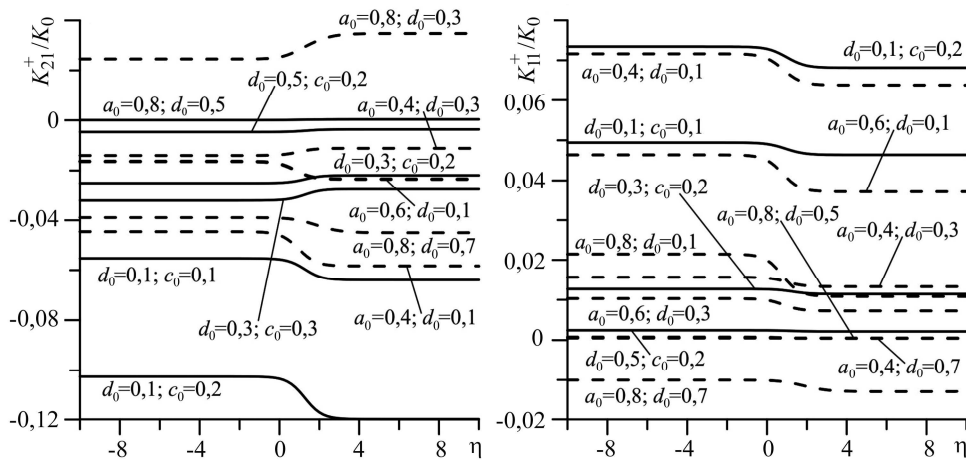


Рис. 3. Узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень.

Fig. 3. Generalized stress intensity factors.

## ВИСНОВКИ

За допомогою теорії аналітичних функцій та формалізму Стро отримано інтегральні співвідношення типу Сомільяни для термопружного анізотропного біматеріалу із неідеальним тепловим контактом базових складників і внутрішніми тонкими включеннями. Їхні ядра, які мають сенс функцій Гріна задач теплопровідності й термопружності для кусково-однорідної площини з внутрішньою лінією задання ускладнених крайових умов, записано в явному вигляді. Після додання до отриманих залежностей математичної моделі тонкого включення можна за допомогою гранично-елементного методу функцій стрибка розв'язувати відповідні задачі для необмежених і скінченних тіл із тонкими деформівними



включеннями і тріщинами. Під час вивчення задачі для квадратної біметалевої пластини з тонким включенням виявлено суттєвий вплив геометричних параметрів і термоопору інтерфейсу основних складників на концентрацію температурних напружень.

*РЕЗЮМЕ.* С использованием расширенного формализма Стroh и теории функций комплексной переменной получены интегральные уравнения типа Сомиглианы и соответствующие уравнения для термоупругих анизотропных биматериальных тел с неидеальным тепловым контактом прямолинейной границы раздела его составляющих. С помощью математической модели тонкого деформируемого теплоизолированного включения на основе полученных интегральных соотношений решена задача для конечного термоупругого анизотропного биматериального тела с учетом термосопротивления на контакте составляющих и тонким включением внутри одной из них.

*SUMMARY.* Using the extended Stroh formalism and the theory of complex variable the Somigliana type integral equations and the corresponding equations for an anisotropic thermoelastic bimaterial with thermally imperfect rectilinear interface are obtained. Applying the mathematical model of a thin deformable thermally insulated inclusion and the obtained integral relations the problem for a finite anisotropic thermoelastic bimaterial solid containing a thin elastic inclusion is solved with the account of the thermal resistance at the interface.

1. *Kaessmair S., Javili A., and Steinmann P.* Thermomechanics of solids with general imperfect coherent interfaces // *Archive of Appl. Mech.* – 2014. – **84** (9–11). – P. 1409–1426.
2. *Benvensite Y.* A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2006. – **54**. – P. 708–734.
3. *Kattis M. A. and Mavroyannis G.* Feeble interfaces in bimetals // *Acta Mech.* – 2006. – **185**. – P. 11–29.
4. *Pan E. and Amadei B.* Boundary element analysis of fracture mechanics in anisotropic bimetals // *Eng. Analysis with Boundary Elements.* – 1999. – **23**. – P. 683–691.
5. *Pasternak Ia., Pasternak R., and Sulym H.* Boundary integral equations and Green's functions for 2D thermoelectroelastic bimaterial // *Eng. Analysis with Boundary Elements.* – 2014. – **48**. – P. 87–101.
6. *Qin Q.H.* Green's function and boundary elements of multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 254 p.
7. *Wang X. and Pan E.* Thermal Green's functions in plane anisotropic bimetals with spring-type and Kapitza-type imperfect interface // *Acta Mech.* – 2010. – **209**. – P. 115–128.
8. *Hwu C.* Thermoelastic interface crack problems in dissimilar anisotropic media // *Int. J. Solids. Struct.* – 1992. – **18**. – P. 2077–2090.
9. *Ting T. C.* Anisotropic elasticity: theory and applications. – New York: Oxford University Press, 1996. – 568 p.
10. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
11. *Pasternak Ia.* Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity // *Eng. Analysis with Boundary Elements.* – 2012. – **36**. – P. 1931–1941.
12. *Hwu C.* Anisotropic elastic plates. – London: Springer, 2010. – 674 p.
13. *Pasternak Ia., Pasternak R., and Sulym H.* A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities // *Eng. Analysis with Boundary Elements.* – 2013. – **37**, № 2. – P. 419–433.
14. *Pasternak Ia., Pasternak R., and Sulym H.* Boundary integral equations for 2D thermoelectroelasticity of a half-space with cracks and thin inclusions // *Eng. Analysis with Boundary Elements.* – 2013. – **37**. – P. 1514–1523.
15. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.

Одержано 08.09.2015