

ВИЗНАЧЕННЯ РОЗСІЯННЯ ЕНЕРГІЇ В ШАРУВАТИХ БАЛКАХ ЗА ВІБРАЦІЙНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Б. М. ДІВЕСВ¹, І. С. КОГУТ², І. Б. БУТИТЕР², Г. Т. ЧЕРЧИК³

¹ Національний університет "Львівська політехніка";

² Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, Львів;

³ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розглянуто теорію згину шаруватого пакета. Теоретична модель враховує зсувні, нормальні деформації і напруження. Детально розглянуто розподіл напружень у тришаровій балці за різних частот коливань. Оцінено демпфувальні властивості в частотній області. Подані експериментальні результати для сталеві балки з м'якими лицьовими шарами.

Ключові слова: *тришарова балка, композит, згин, коливання, демпфування, частота.*

Шаруваті композитні тонкостінні елементи широко застосовують у сучасних конструкціях. Для визначення пружних, вібраційних, звукозахисних та міцнісних властивостей конструкцій необхідно встановити їхні механічні характеристики, а саме: динамічну жорсткість, демпфування, напружений стан за різних умов навантаження і закріплення. Важливими для шаруватих композитних елементів є їхні демпфувальні властивості, які відіграють значну роль у задачах вібро- та звукозахисту під час проектування як аерокосмічних конструкцій, так і у машино-, приладобудуванні, у будівництві. В цьому плані важливими є побудова уточненої теоретичної моделі та вибір таких схем числових та експериментальних досліджень, які дадуть змогу однозначно визначити ці характеристики.

Аналіз відомих досліджень. Відомі різноманітні підходи до моделювання такого роду конструкцій [1]. Для дослідження динаміки тонкостінних елементів застосовують теорії вищого порядку [2–5]. Порівняльний аналіз теорій шаруватих елементів за різних умов навантаження наведений раніше [6–8]. Важливим завданням є визначення демпфувальних властивостей елементів конструкцій, зокрема тонкостінних шаруватих елементів. Розсіяння енергії у композитах досліджували в працях [9–11], а розсіяння енергії у шаруватих пластинах – у працях [12–15]. Зроблено огляд праць [16] з визначення демпфувальних властивостей тонкостінних елементів типу сендвіч. Здебільшого використовують достатньо прості розрахункові схеми. Це або кінематичні гіпотези балки Тимошенка для всього пакета, або пошарові негнучкі схеми, часто також типу гіпотез Тимошенка. Для шаруватих структур з модулями жорсткості, які відрізняються на порядок або і більше, ці моделі можуть давати невірні результати, особливо у високочастотній області.

Нижче використали адаптивний алгоритм на основі узагальнених кінематичних апроксимацій і класичного методу Гальоркіна для системи рівнянь лінійної теорії пружності [17–20]. Розглянули різні ступені пошарових апроксимацій за шарами пакета та на основі числових експериментів досягнули потрібної точності обчислень. На основі цих співвідношень визначили демпфування у шаруватих

структурах залежно від геометричних та механічних властивостей пакета. Показано, що для адекватного визначення демпфування у шаруватій балці необхідно використовувати уточнені теорії згину балки з пошаровими кінематичними гіпотезами та враховувати розсіяння енергії у затисненні балки.

Основні співвідношення. Розглянемо тришарову (сандвіч) шарнірно оперту балку симетричної структури за динамічного згину силою, прикладеною до середини балки (рис. 1).

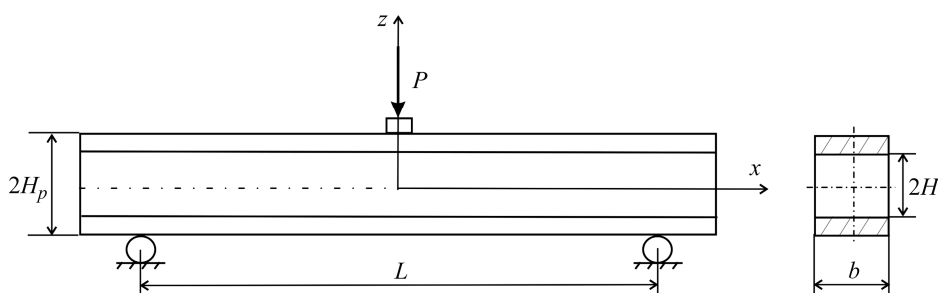


Рис. 1. Симетрична вільно оперта тришарова пластина (сандвіч).

Fig. 1. A symmetrical free supported three-layered plate (sandwich).

Приймемо такі кінематичні апроксимації ($U = U_e \cup U_d$) для симетричної тришарової пластини завтовшки $2H_p$ і внутрішнім шаром $2H$ (розглядали циліндричний згин):

$$U_e - \begin{cases} u = \sum_{i,k} u_{ik}^e z^{2i-1} \phi_k(x), & 0 < z < H, \\ w = \sum_{i,k} w_{ik}^e z^{2i-2} \gamma_k(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (1)$$

$$U_d - \begin{cases} u = \sum_{i,k} u_{ik}^d (z-H)^i \phi_k(x), & H < z < H_p, \\ w = \sum_{i,k} w_{ik}^d (z-H)^i \gamma_k(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (2)$$

де u, w – відповідно тангенціальні та нормальні переміщення шарів; $u_{ik}^e, w_{ik}^e, u_{ik}^d, w_{ik}^d$ – невідомі величини; $\phi_k(x), \gamma_k(x)$ – відомі координатні функції, які залежать від крайових умов на краях балки.

Узагальнений закон Гука для циліндричного згину шарів балки

$$\sigma_{xx} = C_{xx} \epsilon_{xx} + C_{xz} \epsilon_{zz}, \quad \sigma_{zz} = C_{zx} \epsilon_{xx} + C_{zz} \epsilon_{zz}, \quad \tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}. \quad (3)$$

Підставивши вирази (1)–(3) у варіаційне рівняння Гамільтона–Остроградського

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \left(\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{zz} \delta \epsilon_{zz} + \tau_{xz} \delta \epsilon_{xz} - \rho \frac{\partial u}{\partial t} \delta \frac{\partial u}{\partial t} - \rho \frac{\partial w}{\partial t} \delta \frac{\partial w}{\partial t} \right) dV + \int_{S_K} kU \delta U dS - \int_{S_P} P \delta U dS \right) dt = 0 \quad (4)$$

та розглянувши гармонійні коливання

$$u_{ik}^e = \bar{u}_{ik}^e e^{i\omega t}, \quad w_{ik}^e = \bar{w}_{ik}^e e^{i\omega t}, \quad u_{ik}^d = \bar{u}_{ik}^d e^{i\omega t}, \quad w_{ik}^d = \bar{w}_{ik}^d e^{i\omega t}, \quad (5)$$

отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення амплітуд переміщень

$$-\omega^2 [M] \bar{U} + i\omega [C] \bar{U} + [K] \bar{U} = \bar{p}. \quad (6)$$

Тут ε_{ii} – поздовжні деформації; γ_{ij} – деформації зсуву; σ_{ii} – нормальні напруження; τ_{ij} – дотичні напруження; V – об’єм балки; S_k – поверхня пружного затиснення; S_p – поверхня, на яку діють відомими зусиллями; \bar{U} , \bar{p} – вектори амплітуд переміщень і зовнішніх зусиль; k – жорсткість затиснення (основа Вінклера), $[M]$ – матриця мас, $[C]$ – матриця в’язко-пружного демпфування, $[K]$ – матриця жорсткості; $[t_1, t_2]$ – часовий інтервал; ω – частота коливань.

Числові результати. Як тестовий приклад розглянемо вільно оперту тришарову балку з такими геометричними параметрами: довжина $L = 0,6$ м, товщина $H = 0,0132$ м. Товщина ядра балки залежить від товщини зовнішніх шарів. Пружні константи (пінопласт) приймемо такими: $C_{xx} = C_{zz} = 150$ МПа, $G = G_{xz} = 40$ МПа і $C_{xz} = 60$ МПа ($\nu = 0,4$); густина $\rho = 240$ кг/м³. Пружні константи для лицевих шарів (вуглепластик) такі: $C_{xx} = 40$ ГПа, $C_{zz} = 7,5$ ГПа, $G = 2$ ГПа, і $C_{xz} = 3$ ГПа; $\rho = 2400$ кг/м³.

Під час розрахунку за координатні функції вибирали тригонометричні функції $\varphi_k(x) = \sin \frac{(2k-1)\pi x}{L/2}$, $\gamma_k(x) = \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L/2}$.

Розглянемо вплив демпфувального прошарку на демпфування в пакеті (рис. 1). Використаємо для цього матрицю жорсткості K вирішувальної системи рівнянь (6). Сумарне демпфування буде

$$\eta = \frac{\eta_1 [q_1]^T [K_1] [q_1] + \eta_2 [q_2]^T [K_2] [q_2] + \dots + \eta_N [q_N]^T [K_N] [q_N]}{[q]^T [K] [q]}. \quad (7)$$

Тут $[K_i]$ – компоненти матриці жорсткості, що відповідають i -му прошарку, η_i – демпфування у i -му прошарку, $|q|$ – вектор розв’язку, T – індекс транспонування. Вважаємо, зазвичай, що матриця демпфування пропорційна матриці жорсткості $C_i = \eta_i [K_i]$. На рис. 2а показано демпфування η у сендвічі та для симетричної тришарової балки з м’якими демпфувальними лицевими шарами (рис. 2b): у м’яких шарах $\eta = 0,015$, у жорстких – $\eta = 0,003$. Демпфування наведено для різних товщин жорстких шарів. Тут використано програму Фортран з бібліотекою допоміжних програм.

На рис. 2с, d показано демпфування у центрально-стисненій балці.

Під час розрахунку для цього випадку за координатні функції вибрали тригонометричні функції $\varphi(x) = \gamma_k(x) = \sin(k\pi x / 2L)$. На рис. 3 показано демпфування у п’ятишаровій балці з проміжними демпфувальними прошарками різної товщини.

Можна зауважити, що демпфування за різного способу кріплення балки дещо відрізняється (рис. 2). У п’ятишаровій балці воно більше, ніж у тришаровій (рис. 3) внаслідок незначного притиску жорсткого шару [1–10].

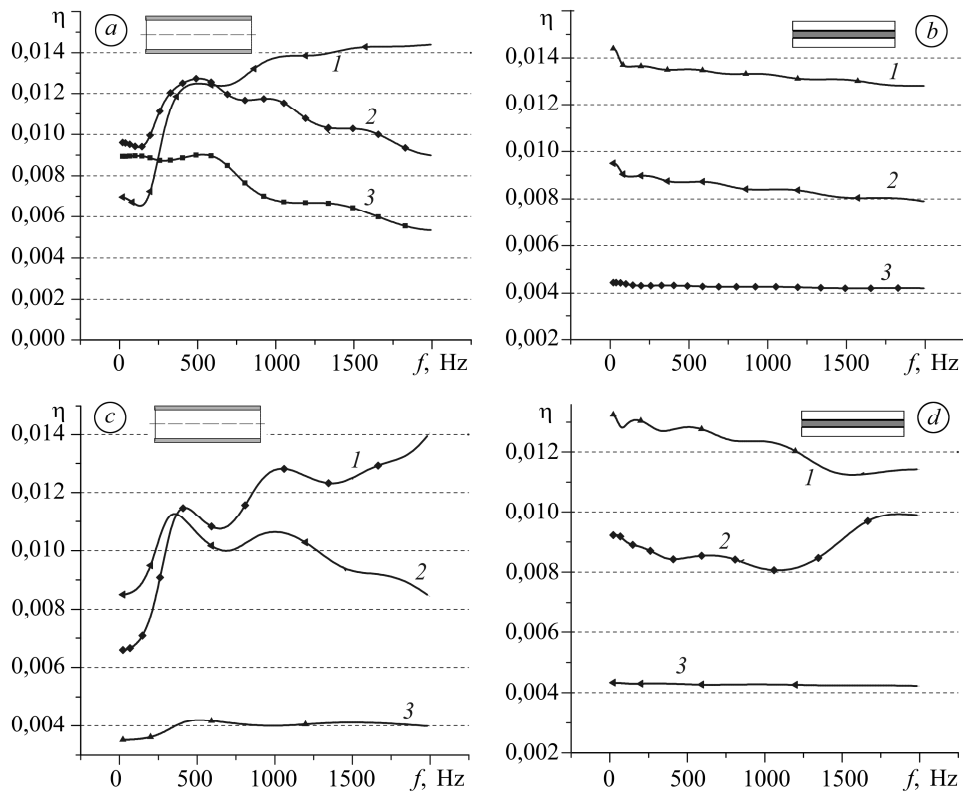


Рис. 2. Демпфування η у сендвічі (а) з лицевим прошарками різної товщини та у балці з м'якими лицевими шарами (b); c, d – централь-стиснена балка; a, c – $H_f = 0,001$ м (1); 0,004 м (2); 0,008 м (3); b, d – $H_{\text{демп}} = 0,008$ м (1); 0,004 м (2); 0,002 м (3).

Fig. 2. Damping η in sandwich (a) with the various face sheets thickness and in the beam with soft face sheets (b); c, d – centrally clamped beam; a, c – $H_f = 0,001$ m (1); 0,004 m (2); 0,008 m (3); b, d – $H_{\text{демп}} = 0,008$ m (1); 0,004 m (2); 0,002 m (3).

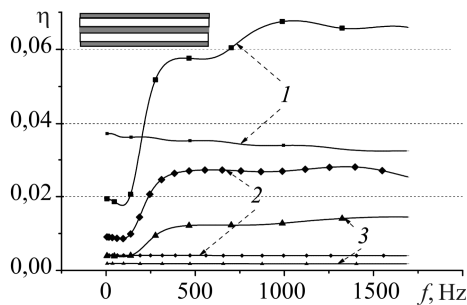


Рис. 3. Демпфування у п'ятишаровій балці з проміжними демпфувальними прошарками різної товщини та у тришаровій балці з ідентичними м'якими лицевими шарами (малі значки): $H_{\text{демп}} = 0,008$ м (1); 0,005 м (2); 0,003 м (3).

Експериментальні дослідження. Експериментально досліджували фазовим методом [11] жорсткість K і коефіцієнт демпфування C сталевих пластинчастих зразків і зразків з гумово-бітумним покритвом (рис. 4) за кінематичного збудження поперечних коливань балкового зразка.

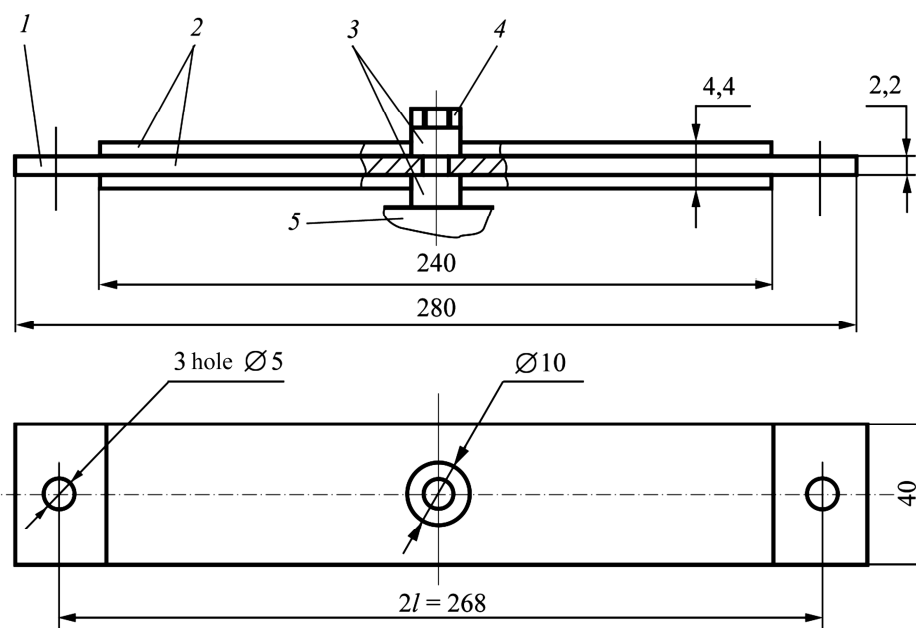


Рис. 4. Схема затиснення балки на столі вібратора: 1 – пластина сталевая; 2 – шар гумово-бітумний; 3 – шайба сталевая; 4 – болт М5×20; 5 – стіл вібратора електродинамічного ВЕДС 10А.

Fig. 4. A chart of beam fastening on the table of vibrator: 1 – steel plate; 2 – rubber-bitumen layer; 3 – steel washer; 4 – screw-bolt of M5×20; 5 – table of electrodynamic vibrator VEDS of 10A.

Метод ґрунтується на вимірюванні амплітуд a і a_0 – відповідно вільного і защемленого кінців консольної балки, а також кута зсуву фаз між їх переміщеннями. Пластиначасті зразки вирізали із листової сталі (Ст.3) вздовж вальцювання; чистота необроблених поверхонь і термообробка зразків у стані постачання; гумово-бітумні шари приклеєні. Біконсольні зразки закріплювали на столі електродинамічного вібратора симетрично відносно його вертикальної осі за допомогою болта і шайб. На кінцях зразка встановлювали інерційні вантажі (маса вантажу разом з модульовальною діафрагмою, болтом і гайкою 33 г).

Зразки випробовували в околі основного резонансу, коли зсув фаз між переміщеннями становив 90° . Амплітуду вільного кінця зразка вимірювали і контролювали (безконтактним методом) за допомогою модульовальної діафрагми і координатного фотоприймача і розраховували за прискоренням w за відомою формулою $a = w/\omega^2$. Прискорення вимірювали акселерометром АВС 017-10, встановленим замість інерційного вантажу. Розсіяння енергії ΔE внаслідок конструкційного демпфування в затисненні оцінювали за площею спрощеної петлі гістерезису (рис. 5a), знятої за триточкового згину сталеві пластина з шайбами, притиснутими болтом (рис. 5b).

Еквівалентний коефіцієнт демпфування C_1 розраховували за формулою

$$C_1 = \Delta E / \pi a^1 \omega,$$

де $\Delta E = 0,228 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$.

В таблиці наведені середні значення вимірних величин за результатами випробувань трьох зразків.

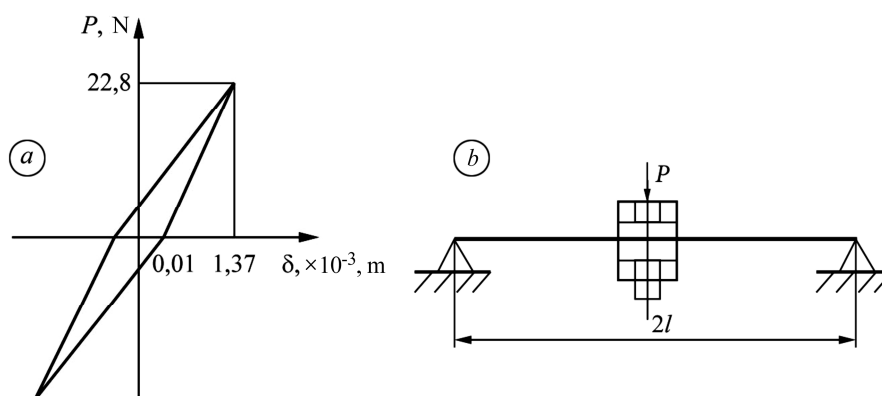


Рис. 5. Петля гістерезису (а) і схема згину пластини із затиснутими шайбами (b).
 Fig. 5. A hysteresis loop (a) and a chart of bending a plate with the pressed washers (b).

Виміряні величини за результатами випробувань трьох зразків

Зразки	f, s^{-1}	$C, N\cdot s/m$	$K, N/m$	$C_1, N\cdot s/m$
Сталеві	60,1	0,4147	7934,34	0,1058
З покривом	58,4	0,8170	8202,20	0,1058

Як бачимо, покрив підвищує демпфування зразків приблизно у 2 рази.

Додаткові приклади. На підставі співвідношень (1)–(6) уточненої теорії згину шаруватих пластин досліджували динамічні характеристики сталеві пластини з м'яким покривом. На підставі аналізу теоретичних і експериментальних амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) можна визначити модуль Юнга та демпфування покриття. На рис. 6 наведені АЧХ та демпфування в області резонансу сталеві балки з двостороннім покривом (див. рис. 4). Теоретичні та експериментальні результати узгоджуються на основі уточнених теорій [17–20].

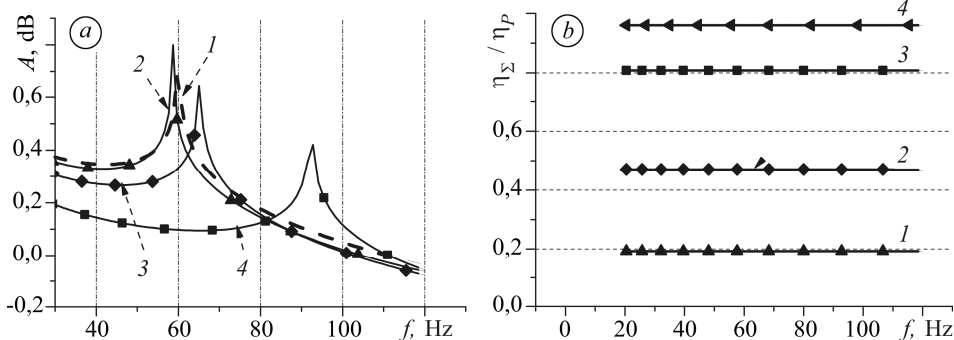


Рис. 6. АЧХ в області резонансу сталеві балки з покривом різної товщини (а) та відносне демпфування (відношення демпфування в пакеті η_{Σ} до демпфування у покриві η_{ρ}) (b):
 1 – $H_{\text{демп}} = 0,011$ м; 2 – 0,022 м; 3 – 0,044 м; 4 – 0,088 м.

Fig. 6. Frequency-amplitude features of a steel beam with different coating thickness (a) and relative damping (ratio of damping in the package η_{Σ} to damping in the coating η_{ρ}) (b):
 1 – $H_{\text{демп}} = 0.011$ m; 2 – 0.022 m; 3 – 0.044 m; 4 – 0.088 m.

Можна відмітити, що якщо АЧХ цих балок досить близькі, то демпфування (рис. 6b) суттєво зростає зі зміною товщини покриття. Практично зі збільшенням товщини покриття у 8 разів відносне демпфування становить 100%. Якщо не враховувати демпфування в місці затиснення балки, то на підставі результатів, пока-

заних на рис. 6, можна визначити демпфування в матеріалі покриву. Коли виготовити зразки з достатньо товстим покривом, то можна не тільки точніше визначити демпфування в його матеріалі, але і в місці затиснення. Це демпфування можна елімінувати за іншої схеми експерименту: балка підвішена на струнах. Показано [17–20], що використання класичних теорій згину балок не дає точних результатів. Розглянемо, наприклад, класичну теорію прямої нормалі та кінематичних гіпотез для всього пакета. На рис. 7 показані механічні характеристики для цього випадку.

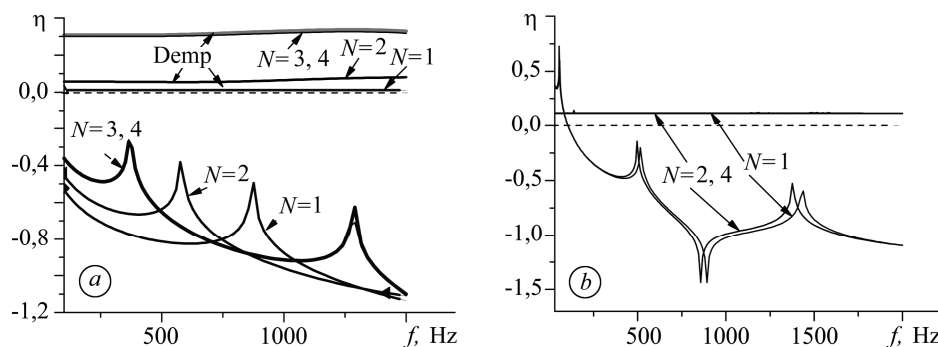


Рис. 7. Вплив порядку апроксимації в пакетах типу сендвіч (а), а також з м'якими лицьовими шарами (б) за гіпотези прямої лінії для всього пакета ($N = 1$, балка Тимошенка).

Fig. 7. Influence of the order of approximation in the sandwich type package (a) and also in a package with soft facial sheets (b) according to the hypothesis of a straight line for all package ($N = 1$, Timoshenko beam).

Тут для сендвіча збіг результатів відбувається тільки при $N \geq 3$, тобто теорія прямої нормалі ($N = 1$) для нього повністю неадекватна.

ВИСНОВКИ

Для визначення демпфування у шаруватих балках за згину запропоновані адаптивні розрахункові схеми, в яких порядок рівнянь не обмежений (розглядається довільна кількість апроксимацій за товщиною пластини). Використано класичний метод Гальоркіна для еліптичної системи рівнянь лінійної теорії пружності. Розглянута схема шаруватої балки за різних умов кріплення за синфазних гармонійних коливань. На підставі уточнених розрахункових схем визначений вплив анізотропії властивостей однорідної, три- і п'ятишарової балки на демпфування. Експериментально досліджено демпфування у балці з тонкими демпфувальними накладками. Біконсольні зразки закріплювали на столі електродинамічного вібратора симетрично відносно його вертикальної осі за допомогою болта і шайб. Зразки випробовували в околі основного резонансу, коли зсув фаз між переміщеннями становив 90° . Це дало змогу не лише точно визначити резонансну частоту, але й демпфування. Для адекватного визначення демпфування у шаруватій балці показана необхідність використання уточненої теорії згину балки з пошаровими кінематичними гіпотезами. Класичні теорії згину неадекватні. Для затиснених балок вказано спосіб визначення розсіяння енергії у затисненні.

РЕЗЮМЕ. Представлена теория изгиба слоистого пакета. Теоретическая модель учитывает сдвиговые, нормальные деформации и напряжения. Детально рассмотрено распределение напряжений в трехслойной балке при разных частотах колебаний. Проведена оценка демпфирующих свойств в частотной области. Представлены экспериментальные результаты для стальной балки с мягкими лицевыми слоями.

SUMMARY. The theory of the layered package bending is presented. A theoretical model takes into account the shear and normal strains and stresses. Distribution in a three-layer beam at

different vibration frequencies is discussed in details. Damping properties in the frequency region are evaluated. The experimental results for a steel beam with the soft face sheets are presented.

1. *Механика композитных материалов и элементов конструкций*. – К.: Наук. думка, 1982. – Т. 1. – 368 с.; 1983. – Т. 2. – 464 с.; Т. 3. – 264 с.
2. *Frostig Y. and Thomsen O. T.* High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // *J. of Solids and Structures*. – 2004. – **41**. – P. 1697–1724.
3. *Effects of higher-order global-local shear deformations on bending, vibration and buckling of multilayered plates* / W. Zhen, Y. K. Cheung, S. H. Lo, and C. Wanji // *Composite Structures*. – 2007. – **20**. – doi:10.1016/j.compstruct.2007.01.017.
4. *Woodcock R. L.* Free vibration of advanced anisotropic multilayered composites with arbitrary boundary conditions // *J. of Sound and Vibration*. – 2008. – **312**. – P. 769–788.
5. *Kim J.-S.* Free vibration of laminated and sandwich plates using enhanced plate theories // *J. of Sound and Vibration*. – 2007. – **308**. – P. 268–286.
6. *Reddy J. N.* A review of refined theories of laminated composite plates // *Shock and Vibration Digest*. – 1990. – **22**. – P. 3–17.
7. *Carrera E.* Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // *Appl. Mech. Rev.* – 2003. – **56**. – P. 287–308.
8. *Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites* / Heng Hu, Salim Belouettar, Michel Potier-Ferry, and El Mostafa Daya // *Composite Structures*. – 2008. – **84**. – P. 282–292.
9. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Мамзеев В. В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наук. думка, 1971. – 376 с.
10. *Seungjin Han and Chung D. D. L.* Mechanical energy dissipation using carbon fiber polymer–matrix structural composites with filler incorporation // *J. Mater. Sci.* – 2012. – **47**, № 5. – P. 2434–2453.
11. *Когут І. С.* Міцність і демпфування стрижневих конструкцій із армованих полімерів. – Львів: Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2011. – 198 с.
12. *Ross D., Ungar E. E., and Kerwin E. M.* Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate // *ASME, Structural Damping*. – 1959. – P. 49–87.
13. *Zhang S. H., Chen H. L., and Wang X. P.* Numerical parametric investigation of loss factor of laminated composites with interleaved viscoelastic layers // *Int. J. of Vehicle Noise and Vibration*. – 2006. – **2**. – P. 62–74.
14. *Kostopoulos V. and Korontzis D. Th.* A new method for the determination of viscoelastic properties of composite laminates: a mixed analytical–experimental approach // *Composites Science and Technology*. – 2003. – **63**. – P. 1441–1452.
15. *Yabin Liao and Valana Wells.* Estimation of complex Young’s modulus of non-stiff materials using a modified Oberst beam technique // *J. of Sound and Vibration*. – 2008. – **316**. – P. 87–100.
16. *Li Z. and Crocker M. J.* A review of vibration damping in sandwich composite structures // *Int. J. of Acoustics and Vibration*. – 2005. – **10**. – P. 159–169.
17. *Дивеев Б., Бутитер И., Щербина Н.* Идентификация упругих модулей композитных пластин на базе уточненных теорий. 1. Теоретический подход // *Механика композитных материалов*. – 2008. – **44**, № 1. – С. 35–50.
18. *Дивеев Б., Бутитер И., Щербина Н.* Идентификация упругих модулей композитных пластин на базе уточненных теорий. 2. Теоретико-экспериментальный подход // *Механика композитных материалов*. – 2008. – **44**, № 2. – С. 207–216.
19. *Визначення механічних характеристик шаруватих елементів. Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні* / І. Б. Бутитер, Б. М. Дівеев, І. С. Когут, А. Г. Смольський // *Укр. міжвідомчий наук.-техн. збірник*. – 2011. – № 45. – С. 21–27.
20. *Дивеев Б., Бутитер И., Щербина Н.* Влияние условий защемления и анизотропии материала на частотный спектр слоистых балок // *Механика композитных материалов*. – 2011. – **47**, № 2. – С. 217–234.

Одержано 20.08.2015