

УДК 539.319

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ У ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ, З'ЄДНАНИХ ЖОРСТКО З ЦИЛІНДРОМ

Б. Д. ДРОБЕНКО¹, Б. М. КАЛИНЯК¹, Я. П. КОСТЬ², Б. Г. МИЦИК²

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

² Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Методом комп'ютерного моделювання з використанням ізопараметричних скінченних елементів досліджено розподіл напружень у тонкій жорсткій пластині, з'єднаній з товстостінним циліндром. Визначено максимальні напруження в концентраторі (в околі з'єднання пластина–циліндр). Побудовано для різних матеріалів залежності цих напружень від діючого на пластину пневматичного (гідростатичного) тиску, які мають важливе прикладне значення.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, тонка жорстка пластина, переміщення, інтенсивність напружень, пружний гістерезис.

Зразок, який використовували раніше [1–3] для вивчення механічних властивостей металів за дії малих механічних напружень $\sigma \ll \sigma_y$ (σ_y – границя текучості), має суттєвий недолік – концентратор механічних напружень у вигляді прямого кута на контурі з'єднання тонкої жорсткої круглої пластини з товстостінним циліндром (рис. 1а). Раніше вважали, що такий зразок відповідає відомій [4, 5] моделі захищеної на контурі пластини і використовували вирази для оцінки максимальних переміщень ω центра пластини (прогинів) та її максимальних напружень σ на контурі:

$$\omega = 0,17 \frac{pR^4}{Eh^3}, \quad (1)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_r^2} = \frac{3}{4} \frac{pR^2}{h^2} \sqrt{1 + \nu^2} = 0,775 \frac{pR^2}{h^2}, \quad (2)$$

де σ_r і σ_t – радіальні та тангенціальні напруження, які подано виразами [5, 6]

$$\sigma_r = \frac{3p}{8h^2} \left[R^2(1 + \nu) - s^2(3 + \nu) \right], \quad (3)$$

$$\sigma_t = \frac{3p}{8h^2} \left[R^2(1 + \nu) - s^2(1 + 3\nu) \right]. \quad (4)$$

Тут R – радіус пластини; h – її товщина; s – відстань від центра пластини; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона; p – рівномірно розподілене на площі пластини навантаження (наприклад, гідростатичний чи пневматичний тиск); коефіцієнт 0,775 у виразі (2) відповідає $\nu = 0,26$ (маловуглецеві сталі).

Нижче покажемо, що вказаний концентратор напружень суттєво збільшує σ в околі з'єднання пластини з циліндром. Тому для об'єктивного вивчення механічних характеристик в області пружності (наприклад, амплітуд пружного гістерезису та залишкових деформацій, які чутливі до стану металу [1–3]) слід виготовляти зразки із заокругленням радіусом r_0 , сумірним із товщиною h пластини (рис. 1б).

Теоретичний опис. Раніше [1–3] напруження у пластині (рис. 1а) обчислювали на основі простих інженерних співвідношень (2)–(4), отриманих для защемленої на контурі тонкої жорсткої пластини. В цій праці виконали комп'ютерне моделювання для тривимірної області Ω , яку займає пластина з циліндром у просторі, з використанням розробленого [7–10] скінченно-елементного програмного забезпечення. Такий підхід дає можливість врахувати геометричну конфігурацію зразка, а отже, адекватніше описати деформування пластини за дії тиску p .

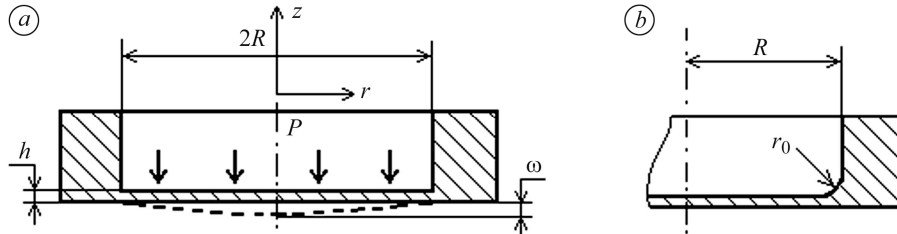


Рис. 1. Схеми зразка для дослідження амплітуд пружного гістерезису і залишкових прогинів [1, 2] (а) та зразка із заокругленням радіусом r_0 в околі з'єднання пластини з циліндром (б).

Fig. 1. Schemes of samples for investigation of the amplitude of elastic hysteresis and residual deflections [1, 2] (a) and a sample with a rounding of radius r_0 in the region of joining the plate to the cylinder (b).

У межах сформульованого вище підходу дослідження напружено-деформованого стану полягає у знаходженні векторів переміщень \mathbf{u} , деформацій $\{\varepsilon\}$ та напружень $\{\sigma\}$ в області Ω з рівнянь рівноваги [7]

$$[\mathbf{B}]^T \{\sigma\} + \mathbf{F} = 0, \quad (5)$$

співвідношень Коші та закону Гука $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}] \mathbf{u} \quad (6)$$

$$\{\sigma\} = [\mathbf{G}] \{\varepsilon\} \quad (7)$$

за крайових умов

$$[\mathbf{n}]^T \{\sigma\} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_\sigma, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_u, \quad (8)$$

де $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{G}]$, $[\mathbf{n}]$ – відповідно матриці диференціального оператора геометричних співвідношень теорії пружності, пружних сталих та напрямних косинусів зовнішньої одиничної нормалі до поверхні; \mathbf{F} – вектор масових сил; \mathbf{r} – радіус-вектор точки; Γ_σ та Γ_u – частини поверхні Γ тіла, на яких задано відповідно вектори силового навантаження \mathbf{p} і переміщень \mathbf{u}_0 (верхній індекс T – операція транспонування).

Співвідношення (5)–(8) записані в зручному для числової реалізації матрично-векторному вигляді. Оскільки зразок є осесиметричним (рис. 1), використали циліндричну систему координат, в якій відповідні матрично-векторні характеристики такі:

$$\mathbf{u} = (u_r, u_z)^T; \quad \{\varepsilon\} = (\varepsilon_r, \varepsilon_z, 2\varepsilon_{rz}, \varepsilon_t)^T; \quad \{\sigma\} = (\sigma_r, \sigma_z, 2\sigma_{rz}, \sigma_t)^T; \quad \mathbf{p} = (p_r, p_z)^T;$$

$$[\mathbf{B}]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{G}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{n}] = \begin{bmatrix} n_r & 0 & n_z & 0 \\ 0 & n_z & n_r & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Підставивши в рівняння (5) співвідношення (7) та (6) і застосувавши відому процедуру методу зважених залишків [7], отримаємо ключове рівняння в переміщеннях [7, 9]:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}^T ([\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}] \mathbf{u} + \mathbf{F}) dV = \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{w}^T \mathbf{p} dS, \quad (9)$$

де $\mathbf{w}^T = (w_r, w_z)$ – довільна вагова вектор-функція, компоненти якої мають похідні першого порядку за просторовими змінними; V, S – елементи об'єму і поверхні.

В результаті застосування до рівняння (9) стандартної процедури методу скінченних елементів з урахуванням довільності вагової вектор-функції \mathbf{w} отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь [7, 9]

$$[\mathbf{K}] \mathbf{u}_h = \mathbf{f} \quad (10)$$

відносно значень переміщень у вузлах скінченно-елементного поділу зразка.

Матрицю жорсткості $[\mathbf{K}]$ і вектор навантаження \mathbf{f} визначаємо підсумовуванням відповідних матричних характеристик окремих скінченних елементів Ω_e ($e = 1, 2, \dots, n_e$):

$$[\mathbf{K}]^{(e)} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}] [\mathbf{N}] dV, \quad \mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Gamma_{\sigma}^e} [\mathbf{N}]^T \mathbf{p}_h dS, \quad (11)$$

де $[\mathbf{N}], [\mathbf{N}']$ – функції форми скінченного елемента Ω_e та його межі Γ_{σ}^e відповідно [7]; \mathbf{p}_h – вузлові значення вектора силового навантаження елемента; n_e – кількість скінченних елементів. За відомих переміщень, визначених з рівняння (10), знаходимо деформації та напруження на основі співвідношень (6), (7).

Обчислення виконали для нормалізованої сталі 20 за таких параметрів: $E = 202$ GPa; $\nu = 0,26$; $p = 0,1$ МПа; $R_1 = R = 0,03$ m (внутрішній радіус циліндра); $R_2 = 0,035$ m (зовнішній); $h = 0,0009$ m (товщина дна циліндра); $L = 0,007$ m (висота циліндра).

Результати та їх обговорення. Напружено-деформований стан у зразку (рис. 1a) досліджували з використанням осесиметричних ізопараметричних скінченних елементів з вісьмома вузлами [7]. В результаті обчислювальних експериментів встановили хорошу збіжність розв'язків у переміщеннях (розв'язки практично не відрізнялись за використання 5; 10; 20 і 40 скінченних елементів за товщиною мембрани, рис. 2). Однак під час визначення напружень на внутрішній поверхні пластини (з боку дії тиску, див. рис. 1a) в околі кутової точки, де пластинка з'єднується з циліндром, збіжність відсутня (суцільні і штрихові лінії на рис. 3 розходяться). Наприклад, стрімке зростання радіальних деформацій ϵ_r і, відповідно, напружень σ_r (рис. 3, суцільна лінія) зумовлені різким зростанням похідної від переміщення u_r при $s \rightarrow R = 30$ mm. Зі збільшенням кількості елементів за товщиною пластини і циліндра напруження в кутовій точці постійно зростають за їх стійкої збіжності за межами околу цієї точки.

За наявності заокруглення в області з'єднання пластини і циліндра (див. рис. 1b) зникає тенденція до збільшення напружень в околі кутової точки з ущільненням скінченно-елементного поділу. Наприклад, для заокруглення радіусом $r_0 = h$ уже за п'яти скінченних елементів за товщиною пластини отримуємо задовільний розв'язок (рис. 4; напруження на скінченно-елементних поділах з 5; 10; 20 і 40 елементами за товщиною пластини збігаються в межах 1% і практично зливаються в масштабі рисунка). Результати розрахунку (рис. 3–5) подані для компонент σ_r , σ_t та σ_z тензора напружень, а також для інтенсивності напружень

$$\sigma_i = \sqrt{3} \sqrt{[(\sigma_r - \sigma_0)^2 + (\sigma_z - \sigma_0)^2 + (\sigma_t - \sigma_0)^2] / 2 + \sigma_{rz}^2}, \quad \sigma_0 = (\sigma_r + \sigma_z + \sigma_t) / 3. \quad (12)$$

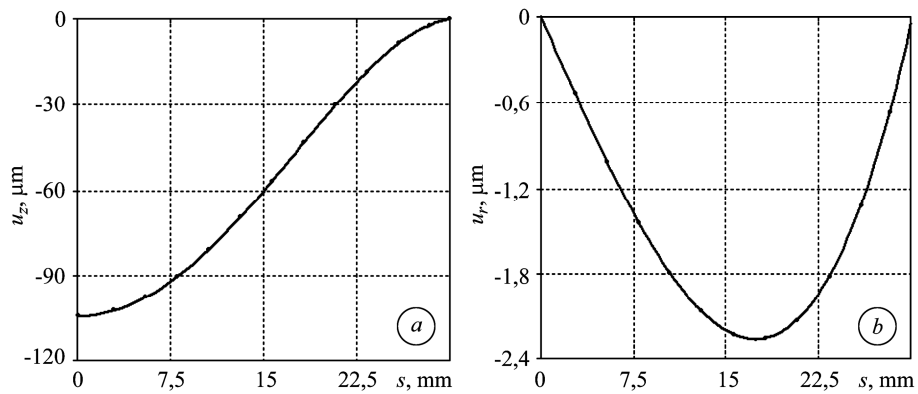


Рис. 2. Переміщення u_z (a) та u_r (b) точок внутрішньої поверхні пластини як функції відстані s від її центра: лінії – для 40 елементів за товщиною пластини, точки – 5 елементів.

Fig. 2. Displacements u_z (a) and u_r (b) of the points at the inner surface of the plate as a function of distance s from the center: lines correspond to 40 elements by the plate thickness, points correspond to 5 elements.

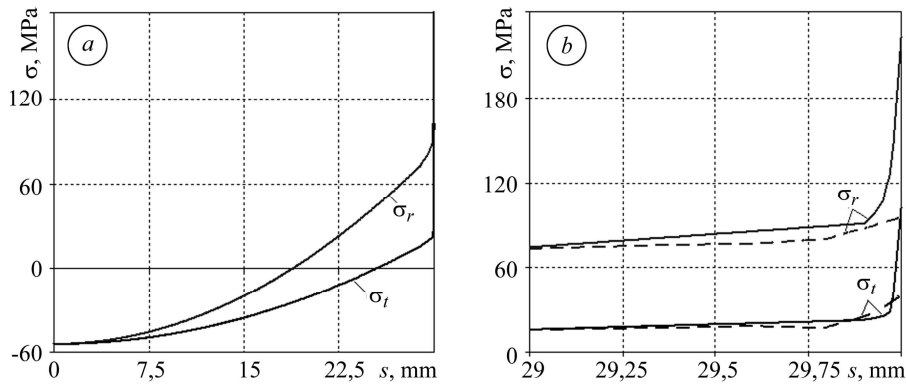


Рис. 3. Напруження на внутрішній поверхні пластини (a) та детальніше в околі кутової точки з'єднання пластини з циліндром (b): суцільна лінія – розв'язки для 40 елементів за товщиною пластини, штрихова – для 5 елементів.

Fig. 3. Stresses on the inner surface of the plate (a) and namely in the region of the corner point of joining the plate to the cylinder (b): solid line corresponds to the solution for 40 elements, dashed line corresponds to 5 elements.

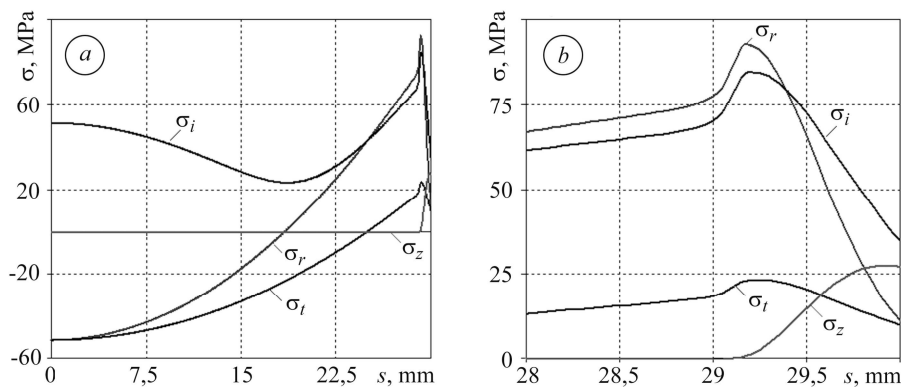


Рис. 4. Напруження на внутрішній поверхні пластини за наявності заокруглення $r_0 = h$: загальний вигляд (a) та деталізований – в околі заокруглення (b).

Fig. 4. Stresses on the inner surface of the plate at the presence of rounding of radius $r_0 = h$: general view (a) and view in details in the rounding region (b).

Зі зменшенням радіуса заокруглення максимальні напруження в околі з'єднання пластини з циліндром зростають, що ілюструє рис. 5.

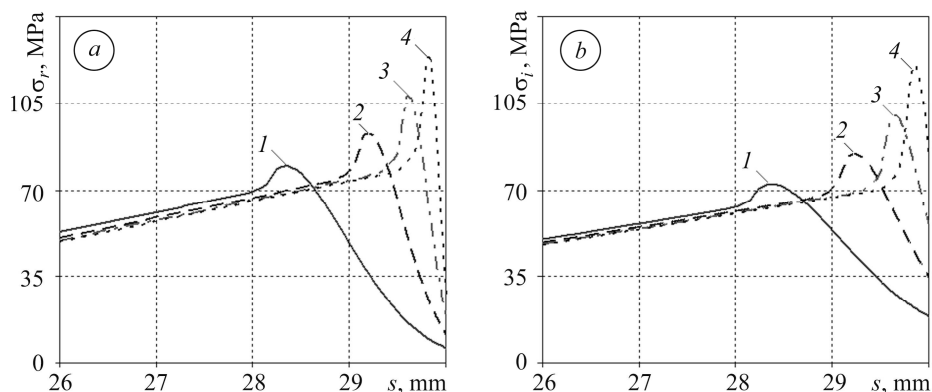


Рис. 5. Радіальні напруження (а) та інтенсивність напружень (б) на внутрішній поверхні пластини в околі її з'єднання з циліндром за різних радіусів заокруглення r_0 :
 $1 - r_0 = 2h$; $2 - h$; $3 - h/2$; $4 - h/4$.

Fig. 5. Radial stresses (a) and stress intensity (b) on the inner surface of the plate in the region of its joining to a cylinder at different rounding of radii r_0 : $1 - r_0 = 2h$; $2 - h$; $3 - h/2$; $4 - h/4$.

Підсумуємо основні результати.

За строго прямого кута з'єднання пластини з циліндром (див. рис. 1а) радіальні σ_r і тангенціальні σ_t напруження на контурі внутрішньої поверхні пластини (з боку дії p) прямують до безмежності (рис. 3). Тому на таких зразках дослідження механічних властивостей в “області пружності” некоректні, хоча розраховані за виразами (2)–(4) значення σ на контурі пластини є суттєво меншими від границі текучості σ_y нормалізованої сталі 20 (320 МПа): $\sigma_r = 83,3$; $\sigma_t = 21,7$; $\sigma = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_t^2} = 86,1$ (МПа); усе за дії $p = 0,1$ МПа. Отже, слід використовувати зразки із заокругленням r_0 в околі з'єднання пластини з циліндром (див. рис. 1б). Оптимальним радіусом заокруглення є $r_0 = h$, оскільки за менших r_0 суттєво зростає екстремальне значення σ (рис. 5), а за більших r_0 , наприклад $r_0 = 2h$, зменшується “діючий” радіус пластини і, відповідно, чутливість методики [1–3] визначення прогинів ω , амплітуд пружного гістерезису ω_h та залишкових прогинів ω_{res} .

Із рис. 4b випливає, що за $r_0 = h$ максимальні значення σ_i^{\max} в околі стінки циліндра лише на 8% менші від радіальних напружень σ_r^{\max} , тобто напруження на контурі пластини формуються переважно радіальними напруженнями. З другого боку, розрахунок σ_r на контурі за простою формулою (3) дає результат $\sigma_r = 83,3$ МПа, а σ_r^{\max} , визначене на основі рис. 4b, рівне 92,5 МПа, тобто похибка розрахунку σ_r на основі рівняння (3) становить ~10%. Для менших радіусів заокруглення $r_0 = h/2$ і $r_0 = h/4$ вона суттєво зростає та становить 30 і 49%, відповідно.

Окіл, в якому спостерігаємо максимуми залежностей $\sigma_r(s)$ та $\sigma_i(s)$, лежить на відстані $\sim r_0$ від внутрішньої стінки циліндра (рис. 4 і 5). Підкреслимо, що на зовнішній поверхні пластини екстремумів типу σ_r^{\max} та σ_i^{\max} не виявили.

На основі залежностей $\sigma_i(s)$ для різних значень тиску p побудовано залежності максимальних значень інтенсивності напружень σ_i^{\max} в околі з'єднання пластини–циліндр від p (рис. 6). Ці залежності отримані за різних коефіцієнтів Пуассона в інтервалі від $\nu = 0,17$ (плавлений кварц) до $\nu = 0,46$ (індій). На основі результатів (рис. 6), можна побудувати для заданих значень p графіки $\sigma_i^{\max}(\nu)$ і, від-

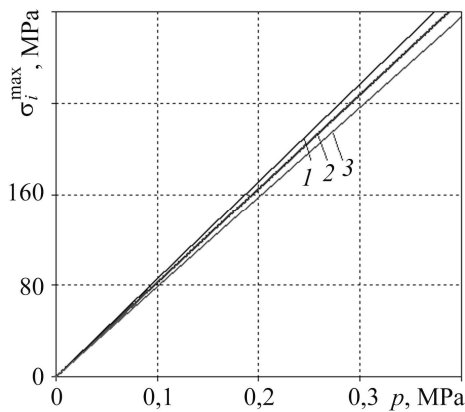


Рис. 6. Залежність максимальної інтенсивності напружень в околі з'єднання пластина–циліндр від тиску ($r_0 = h$): 1 – $\nu = 0,17$; 2 – $\nu = 0,26$; 3 – $\nu = 0,46$.

Fig. 6. Dependence of the maximal stress intensity on pressure in the joining region plate–cylinder ($r_0 = h$): 1 – $\nu = 0.17$; 2 – $\nu = 0.26$; 3 – $\nu = 0.46$.

значення в околі з'єднання пластина–циліндр. Залежностей вказаних деформацій від s (відстані від центра пластини) не подаємо, оскільки вони однозначно пов'язані з відповідними напруженнями σ_r , σ_t і σ_i (див. рис. 3–5). Наприклад, розраховане на основі закону Гука і за $\sigma_r^{\max} = 92,5$ МПа (рис. 4b) екстремальне значення $\epsilon_r^{\max} = 4,6 \cdot 10^{-3}$.

Для експериментального виявлення аномалій деформацій і механічного напруження пластини в околі її з'єднання з циліндром за $r_0 = h/2$ використали відомий оптичний метод цифрової кореляції зображень для реєстрації полів переміщень і деформацій поверхні твердого тіла [13, 14]. Отримані результати для переміщення u_r (вздовж радіуса R зразка) відповідають розрахунку (див. рис. 2b). Однак виявити аномалії ϵ_r і σ_r в околі з'єднання пластини з циліндром не вдалося. Це пов'язано з флуктуаціями (розкидом точок) експериментальних залежностей $u_r(s)$ і $\epsilon_r(s)$, зумовленими неякісною поверхнею зразків (якісне шліфування і полірування внутрішньої поверхні пластини, особливо в околі заокруглення r_0 , є складною технологічною задачею).

ВИСНОВКИ

На основі рівнянь теорії пружності отримано залежності максимальних напружень в околі з'єднання пластина–циліндр від тиску p за різних коефіцієнтів Пуассона, які мають важливе прикладне значення, оскільки дають змогу задавати об'єктивні значення максимальних напружень на контурі пластини для будь-яких твердотільних матеріалів.

РЕЗЮМЕ. Методом комп'ютерного моделювання з використанням ізопараметричних кінцевих елементів досліджено розподілення механічних напружень в тонкій жорсткій пластині, з'єднаній з товстостінним циліндром. Определены максимальные напряжения в концентраторе (в окрестности соединения пластина–цилиндр). Построены для разных материалов зависимости этих напряжений от действующего на пластину пневматического (гидростатического) давления, которые имеют важное практическое значение.

повідно, знайти σ_i^{\max} для будь-якого твердотільного матеріалу (значення ν більшості твердих тіл лежать у вказаному вище інтервалі [11, 12]). Залежності $\sigma_i^{\max}(\nu)$ і $\sigma_i^{\max}(p)$ мають велике прикладне значення, оскільки дають змогу знайти значення p , які зумовлюють задані в експерименті чи в експлуатації максимальні напруження σ_i^{\max} в інтервалі від нуля до σ_y . Зрозуміло, що для матеріалів, які мають вищу границю текучості, подані на рис. 6 залежності $\sigma_i^{\max}(p)$ можна екстраполювати до більших значень p .

Підкреслимо, що від модуля Юнга E напруження σ_r , σ_t і, відповідно, σ_i не залежать, що підтверджують також вирази (3) і (4).

Звернемо увагу на те, що деформації ϵ_r , ϵ_t і ϵ_i також мають екстремальні

SUMMARY. A method of computer simulation with application of isoparametric finite elements was used for studying distribution of mechanical stresses in the thin rigid plate connected to a thick-walled cylinder. Maximum stresses were determined in the concentrator (near the plate-cylinder joint). Dependences of these stresses versus pneumatic (hydrostatic) pressure (acting on the plate), which are of great practical importance, were built for different materials.

1. *Мыцьк Б. Г., Кость Я. П., Демьянишин Н. М.* Влияние термообработки сплава Д16 на его механические свойства при малых напряжениях // Физ. тверд. тела. – 2014. – **56**, № 11. – С. 2156–2161.
2. *Механические свойства стали 20 при малых деформациях / Б. Г. Мыцьк, Я. П. Кость, Б. И. Турко, Г. И. Гаськевич* // Физ. тверд. тела. – 2015. – **57**, № 8. – С. 1539–1543.
3. *Study of hydrogen influence on 1020 steel by low deformation method / B. G. Mytsyk, Ya. L. Ivanytskyi, A. I. Balitskii, Ya. P. Kost', and O. M. Sakharuk* // Materials Letters. – 2016. – **184**. – P. 328–331.
4. *Рудицын М. Н., Артемов П. Я., Любошиц М. И.* Справочное пособие по сопротивлению материалов / Под. ред. М. Н. Рудицына. – Минск: Вышэйш. шк., 1970. – 630 с.
5. *Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, П. Я. Агарев, А. Л. Квитка, В. Г. Попков, Э. С. Уманский.* – К.: Виц. шк., 1986. – 776 с.
6. *Микроэлектронные преобразователи неэлектрических величин / О. А. Агеев, В. М. Мамиконова, В. В. Петров, В. Н. Котов, О. Н. Негоденко.* – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. – 154 с.
7. *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 4: Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д.* Термомеханіка намагнетичуваних електропровідних термомочувливих тіл. – Львів: Сполом, 2010. – 256 с.
8. *Drobenko B., Nachkevych O., and Kournytskyi T.* Thermomechanical behaviour of polarizable and magnetizable electroconductive solids subjected to induction heating // J. of Eng. Mathem. – 2008. – **61**, № 2–4. – P. 249–269.
9. *Будз С. Ф., Дробенко Б. Д., Михайлишин В. С.* Компьютерное моделирование термоупругопластического поведения механических систем // ИПИММ АН УССР. – 1992. – Препринт 34–89. – С. 60.
10. *Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д.* Фізико-механічні процеси у ферромагнетних тілах під час індукційної обробки // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 2. – С. 2935.
(*Nachkevych O. R. and Drobenko B. D.* Physicomechanical processes in ferromagnetic bodies in the course of induction treatment // Materials Science. – 2004. – **40**, № 2. – P. 185–192.)
11. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.* Справочник по сопротивлению материалов / Под. ред. Г. С. Писаренко. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.
12. *Физические величины. Справ. / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова.* – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
13. *Мольков Ю. В.* Застосування методу цифрової кореляції зображень до побудови діаграм деформування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 6. – С. 121–125.
(*Mol'kov Yu. V.* Application of the method of digital image correlation to the construction of stress-strain diagrams // Materials Science. – 2013. – **48**, № 6. – P. 832–837.)
14. *Визначення локальної деформації біля концентраторів напружень методом цифрової кореляції зображень / Я. Л. Іваницький, Ю. В. Мольков, П. С. Кунь, Т. М. Ленковський, М. Войтович* // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 4. – С. 18–24.
(*Determination of the local strains near stress concentrators by the digital image correlation technique / Ya. L. Ivanyts'kyi, Yu. V. Mol'kov, P. S. Kun, T. M. Lenkovs'kyi, M. Wójtowicz* // Materials Science. – 2015. – **50**, № 4. – P. 488–495.)

Одержано 01.04.2016