

УДК 536.12:621.891:539.3

## ВПЛИВ ПОТУЖНОСТІ ТЕРТЯ НА ТЕМПЕРАТУРУ ПІД ЧАС ГАЛЬМУВАННЯ

К. ТОПЧЕВСКА

*Білостоцька політехніка, Польща*

Для трьох експериментальних залежностей, які описують зміну питомої потужності тертя з часом гальмування, побудовано точні розв'язки відповідних теплових задач тертя. Для цього використано формулу Дюгамеля та відомий аналітичний розв'язок одновимірної крайової задачі теплопровідності для двох напівобмежених тіл за сталої потужності тертя на поверхні контакту. Проілюстровано застосування отриманих розв'язків до моделювання фрикційного нагрівання трибосистеми накладка–диск. Досліджено вплив вибраних часових профілів потужності тертя на розподіл температури в чавунному (ЧНМХ) диску та накладці, виготовленій з ретінаксу ФМ–16Л.

**Ключові слова:** *гальмування, потужність тертя, фрикційне нагрівання, температура.*

Математичні моделі фрикційного нагрівання під час роботи гальмівних систем базуються на розв'язках відповідних теплових задач тертя – одновимірних крайових задач теплопровідності з двома специфічними крайовими умовами на поверхні контакту накладки з диском [1, 2]. Перша з них зв'язана з експериментальними результатами про чистоту обробки стикових поверхонь – їхню шорсткість, наявність оксидних плівок, продуктів зношування тощо [3, 4]. Якщо робочі поверхні фрикційних елементів достатньо гладкі, то температури накладки і диска на поверхні контакту вважають однаковими. Інша крайова умова виражає рівність суми інтенсивностей теплових потоків, скерованих вздовж нормалі від поверхні контакту всередину кожного елемента фрикційної пари, питомій потужності тертя – добутку дотичного напруження і швидкості ковзання [5]. Отже, зміна потужності тертя під час гальмування (часовий профіль) може мати значний вплив на температуру фрикційних елементів гальм.

Більшість аналітичних розв'язків теплових задач тертя під час гальмування отримано за лінійного зменшення з часом потужності тертя [6–8]. Це означає, що сила тертя в номінальній області контакту накладки з диском є постійною, а контактний тиск досягає свого номінального значення миттєво з початком гальмування. Однак, як свідчать експериментальні результати, залежно від характеру зміни коефіцієнта тертя і контактного тиску з часом гальмування часовий профіль потужності тертя може суттєво відрізнятися від лінійного [9, 10]. Перелік експериментальних залежностей, які описують зміну питомої потужності тертя під час одноразового гальмування, наведено раніше [11]. Серед них слід виділити такі, що зменшуються до нуля за наближення до моменту зупинки. Гальмування за такої зміни з часом потужності тертя вважають раціональним.

Мета роботи – побудувати точні розв'язки одновимірної теплової задачі тертя для трьох вибраних часових профілів питомої потужності тертя та дослідити за їх допомогою часово-просторові розподіли температури у фрикційних елементах за одноразового гальмування.

**Формулювання задачі.** Функції, які описують зміну з часом  $t$  питомої потужності тертя під час гальмування до моменту зупинки  $t_s$ , подамо у вигляді

*Контактна особа:* К. ТОПЧЕВСКА, e-mail: k.topczewska@doktoranci.pb.edu.pl

$$q^{(i)}(t) = q_0^{(i)} q^{(i)*}(t), \quad 0 \leq t \leq t_s, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Розглядаємо такі процеси гальмування, під час яких повна робота гальмування є однаковою і рівною  $w_s$  для кожної з функцій  $q^{(i)}(t)$  (1):

$$\int_0^{t_s} q^{(i)}(t) dt = w_s, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Умову (2) задовольнимо, поклавши у формулі (1)  $q_0^{(i)} \equiv q_0 = w_s / t_s$ , а безрозмірні функції  $q^{(i)*}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  взявши у вигляді [11]

$$q^{(1)*}(t) = 3(1 - t/t_s)^2, \quad q^{(2)*}(t) = 6(t/t_s)(1 - t/t_s), \quad q^{(3)*}(t) = 6\sqrt{t/t_s}(1 - \sqrt{t/t_s}). \quad (3)$$

Під час першого з розглянутих гальмівних процесів питома потужність тертя зменшується за параболічним законом від максимального значення  $q_{\max}^{(1)*} = 3$  у початковий момент часу  $t = 0$  до нуля в момент зупинки (рис. 1,  $i = 1$ ). Відомо, що навіть за миттєвого збільшення тиску в гальмівній системі, навантаження на поверхні контакту, а отже і сила тертя, збільшуються поступово з часом гальмування, випереджуючи при цьому зменшення швидкості [12]. Наслідком цього є зростання питомої потужності тертя з початком гальмування аж до досягнення максимальних значень  $q_{\max}^{(2)*} = q_{\max}^{(3)*} = 1,5$  в моменти часу  $t = 0,5t_s$  ( $i = 2$ ) і  $t = 0,25t_s$  ( $i = 3$ ) (рис. 1,  $i = 2, 3$ ). Після цього зменшення швидкості гальмування починає випереджати ріст сили тертя і питома потужність тертя знижується до нуля під час зупинки.

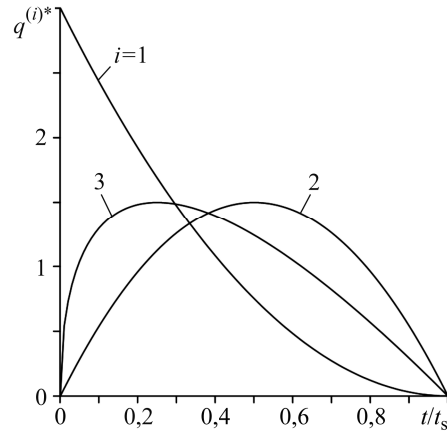


Рис. 1. Часові профілі безрозмірної питомої потужності тертя  $q^{(i)*}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Fig. 1. Temporal profiles of the specific power of friction  $q^{(i)*}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Математичне формулювання теплової задачі тертя під час гальмування для трибосистеми накладка–диск базується на таких головних припущеннях: адіабатичності вільних поверхонь та поширенні генерованого на поверхні контакту тепла всередину кожного елемента вздовж нормалі до цієї поверхні [13]. Тому знаходження температурних полів у накладці та диску зводять до побудови розв'язку одновимірної крайової задачі теплопровідності для двох напівобмежених тіл  $z \geq 0$  та  $z \leq 0$ . Надалі всі величини, що відносяться до кожного з них, позначатимемо нижніми індексами 1 та 2 відповідно. Отже, маємо:

$$\frac{\partial^2 T_1^{(i)*}(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial T_1^{(i)*}(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad \zeta > 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 T_2^{(i)*}(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k^*} \frac{\partial T_2^{(i)*}(\zeta, \tau)}{\partial \tau}, \quad \zeta < 0, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (5)$$

$$K^* \left. \frac{\partial T_2^{(i)*}(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0^-} - \left. \frac{\partial T_1^{(i)*}(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0^+} = q^{(i)*}(\tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (6)$$

$$T_1^{(i)*}(0^+, \tau) = T_2^{(i)*}(0^-, \tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad (7)$$

$$T_k^{(i)*}(\zeta, \tau) \rightarrow 0, \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad 0 < \tau \leq \tau_s, \quad k=1,2, \quad (8)$$

$$T_k^{(i)*}(\zeta, 0) = 0, \quad -\infty < \zeta < \infty, \quad k=1,2, \quad (9)$$

де

$$\zeta = \frac{z}{a_1}, \quad \tau = \frac{k_1 t}{a_1^2}, \quad \tau_s = \frac{k_1 t_s}{a_1^2}, \quad K^* = \frac{K_2}{K_1}, \quad k^* = \frac{k_2}{k_1}, \quad T_a = \frac{q_0 a_1}{K_1}, \quad T_k^{(i)*} = \frac{T_k^{(i)} - T_0}{T_a}, \quad (10)$$

$T_k^{(i)}$  – температура в першому ( $k=1$ ) та другому ( $k=2$ ) тілі, що відповідає часовому профілю питомої густини тертя  $q^{(i)*}(\tau)$ ,  $i=1,2,3$ ,  $K, k$  – коефіцієнти тепло- і температуропровідності відповідно,  $a_1 = \sqrt{3k_1 t_s}$  – ефективна глибина проникання тепла до першого тіла [12].

**Розв’язування задачі.** Безрозмірні температурні поля  $T_k^{(i)*}(\zeta, \tau)$ ,  $k=1,2$ ,  $i=1,2,3$  шукаємо за допомогою формули Дюгамеля [14]:

$$T_k^{(i)*}(\zeta, \tau) = \int_0^\tau q^{(i)*}(s) \frac{\partial}{\partial \tau} T_k^{(0)*}(\zeta, \tau - s) ds, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (11)$$

де розв’язок крайової задачі (4)–(10) із функцією  $q^{(0)*}(\tau) = 1$  у крайовій умові (6) має вигляд

$$T_k^{(0)*}(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau}(1+\varepsilon)^{-1} F_k(\zeta, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad k=1,2, \quad (12)$$

$$F_k(\zeta, \tau) = e^{-Z_k^2(\zeta, \tau) / \sqrt{\pi}} - Z_k(\zeta, \tau) E_k(\zeta, \tau), \quad E_k(\zeta, \tau) = 1 - \operatorname{erf} Z_k(\zeta, \tau), \quad (13)$$

$$Z_1(\zeta, \tau) = 0,5\zeta / \sqrt{\tau}, \quad \zeta \geq 0, \quad Z_2(\zeta, \tau) = -0,5\zeta / \sqrt{k^* \tau}, \quad \zeta \leq 0, \quad \varepsilon = K^* / \sqrt{k^*}, \quad (14)$$

$\operatorname{erf} x$  – функція помилок Гаусса [15]. З формул (12)–(14) знаходимо:

$$\partial T_k^{(0)*}(\zeta, \tau - s) / \partial \tau = (1+\varepsilon)^{-1} e^{-Z_k^2(\zeta, \tau - s) / \sqrt{\pi(\tau - s)}}. \quad (15)$$

Підставивши функції  $q^{(i)*}(\tau)$ ,  $i=1,2,3$  (3) та частинну похідну (15) під знак інтеграла в формулі (11), отримаємо:

$$T_k^{(1)*}(\zeta, \tau) = 3(1+\varepsilon)^{-1} [I_k^{(0)}(\zeta, \tau) - 2I_k^{(1)}(\zeta, \tau) + I_k^{(2)}(\zeta, \tau)], \quad (16)$$

$$T_k^{(2)*}(\zeta, \tau) = 6(1+\varepsilon)^{-1} [I_k^{(1)}(\zeta, \tau) - I_k^{(2)}(\zeta, \tau)], \quad (17)$$

$$T_k^{(3)*}(\zeta, \tau) = 6(1+\varepsilon)^{-1} [I_k^{(0,5)}(\zeta, \tau) - I_k^{(1)}(\zeta, \tau)], \quad (18)$$

$$I_k^{(\alpha)}(\zeta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \frac{e^{-Z_k^2(\zeta, \tau - s)}}{\sqrt{\tau - s}} \left( \frac{s}{\tau_s} \right)^\alpha ds, \quad k=1,2, \quad \alpha=0;0,5;1;2. \quad (19)$$

Інтеграли (19) обчислювали за допомогою підстановки  $x = 1/\sqrt{\tau - s}$  та формули [16]

$$\int_u^\infty x^{-1} (x-u)^v e^{-\mu x} dx = u^v \Gamma(v+1) \Gamma(-v; \mu u),$$

де  $\Gamma(v)$  – гамма-функція;  $\Gamma(v, x)$  – неповна гамма-функція [15];  $v = n - 0,5$ ;  $n = 0,1$ ;  $u = 1/\tau$ ;  $\mu = Z_k^2(\zeta, \tau)$ . Беручи до уваги значення  $\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(1,5) = 0,5\sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma[0,5; Z_k^2(\zeta, \tau)] = \sqrt{\pi} E_k(\zeta, \tau)$ ,  $\Gamma[-0,5; Z_k^2(\zeta, \tau)] = 2\sqrt{\pi} F_k(\zeta, \tau) / Z_k(\zeta, \tau)$ , отримуємо:

$$I_k^{(0)}(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} F_k(\zeta, \tau), \quad I_k^{(0,5)}(\zeta, \tau) = 0,5\sqrt{\pi \tau_s} \tau^* [E_k(\zeta, \tau) - 2Z_k(\zeta, \tau) F_k(\zeta, \tau)], \quad (20)$$

$$I_k^{(1)}(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} \tau^* \{2[1 + Z_k^2(\zeta, \tau)]F_k(\zeta, \tau) - Z_k(\zeta, \tau)E_k(\zeta, \tau)\} / 3, \quad (21)$$

$$I_k^{(2)}(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} \tau^{*2} \{[8 + 18Z_k^2(\zeta, \tau) + 4Z_k^4(\zeta, \tau)]F_k(\zeta, \tau) - Z_k(\zeta, \tau)[7 + 2Z_k^2(\zeta, \tau)]E_k(\zeta, \tau)\} / 15. \quad (22)$$

Маючи функції  $I_k^{(\alpha)}(\zeta, \tau)$  (20)–(22), за формулами (16)–(18) знаходимо безрозмірні температурні поля  $T_k^{(i)*}(\zeta, \tau)$ , що відповідають часовим профілям питомої потужності тертя  $q^{(i)*}(\tau)$ ,  $i = 1, 2, 3$  (3) в кожному елементі ( $k = 1, 2$ ) фрикційної пари:

$$T_k^{(1)*}(\zeta, \tau) = \frac{2\sqrt{\tau}}{(1 + \varepsilon)} \times \left\{ \left[ 3 - 4 \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right) [1 + Z_k^2(\zeta, \tau)] + \frac{1}{5} \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right)^2 [8 + 18Z_k^2(\zeta, \tau) + 4Z_k^4(\zeta, \tau)] \right] F_k(\zeta, \tau) + \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right) \left[ 2Z_k(\zeta, \tau) - \frac{1}{5} \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right) Z_k(\zeta, \tau) [7 + 2Z_k^2(\zeta, \tau)] \right] E_k(\zeta, \tau) \right\}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s; \quad (23)$$

$$T_k^{(2)*}(\zeta, \tau) = \frac{4\sqrt{\tau}}{(1 + \varepsilon)} \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right) \times \left\{ \left[ 2[1 + Z_k^2(\zeta, \tau)] - \frac{1}{5} \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right) [8 + 18Z_k^2(\zeta, \tau) + 4Z_k^4(\zeta, \tau)] \right] F_k(\zeta, \tau) - \left[ Z_k(\zeta, \tau) - \frac{1}{5} \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right) Z_k(\zeta, \tau) [7 + 2Z_k^2(\zeta, \tau)] \right] E_k(\zeta, \tau) \right\}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s; \quad (24)$$

$$T_k^{(3)*}(\zeta, \tau) = \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \left( \frac{\tau}{\tau_s} \right) \{ [3\sqrt{\pi\tau_s} + 4\sqrt{\tau}Z_k(\zeta, \tau)]E_k(\zeta, \tau) - 2[3\sqrt{\pi\tau_s}Z_k(\zeta, \tau) + 4\sqrt{\tau}[1 + Z_k^2(\zeta, \tau)]]F_k(\zeta, \tau) \}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_s, \quad (25)$$

де функції  $F_k(\zeta, \tau)$ ,  $E_k(\zeta, \tau)$  і  $Z_k(\zeta, \tau)$  мають вигляд (13) і (14).

**Числові результати.** Обчислювали за допомогою формул (16)–(18), (23)–(25). Безрозмірними вхідними параметрами задачі є просторова змінна  $\zeta$  і числа Фур'є  $\tau$  та  $\tau_s$  (10). Перший елемент фрикційної пари  $\zeta \geq 0$  (диск) виготовлено з чавуну ЧНМХ ( $K_1 = 51 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $k_1 = 14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ), а другий  $\zeta \leq 0$  (накладка) – з фрикційного матеріалу регінакс ФМ–16Л ( $K_2 = 0,65 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $k_2 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ) [9]. Для цієї фрикційної пари за формулою (14) знаходимо значення коефіцієнта відносної теплової активності  $\varepsilon = 0,075$ .

Еволюція безрозмірної температури  $T_k^{(i)*}(\zeta, \tau)$ ,  $k = 1, 2$ ;  $i = 1, 2, 3$  під час гальмування показана на рис. 2. Найвища температура досягається на поверхні контакту  $\zeta = 0$  накладки з диском. Зміна з часом температури на цій поверхні є типова для одноразового гальмівного процесу – підвищення з початком гальмування аж до досягнення максимального значення з подальшим охолодженням до моменту зупинки. Максимальні значення безрозмірних температури  $T_{\max}^{(i)*} \equiv T_k^{(i)*}(0, \tau_{\max}^{(i)})$  та часу її досягнення  $\tau_{\max}^{(i)}$  становлять відповідно 1,12 і 0,32 для  $i = 1$  (рис. 2a), 1,09 і 0,75 для  $i = 2$  (рис. 2b), 1,02 і 0,62 для  $i = 3$  (рис. 2c). Без роз-

мірна температура на поверхні контакту в момент зупинки рівна  $T_k^{(i)*}(0, \tau_s) = 0,63; 0,84; 0,75$  для  $i = 1; 2; 3$  відповідно.

Внаслідок того, що ретінакс значно гірше проводить тепло, ніж чавун, температура з віддаленням від поверхні контакту в накладці знижується значно швидше, ніж у диску. При цьому спостерігаємо ефект запізнення – зі збільшенням відстані від поверхні тертя час досягнення температурою максимального значення наближається до моменту зупинки. Монотонне зростання температури диска від початку гальмування до зупинки розпочинається на ефективній глибині  $z = a_1$  ( $\zeta = 1$ ), а в накладці – вже при  $z = -0,2a_1$  ( $\zeta = -0,2$ ).

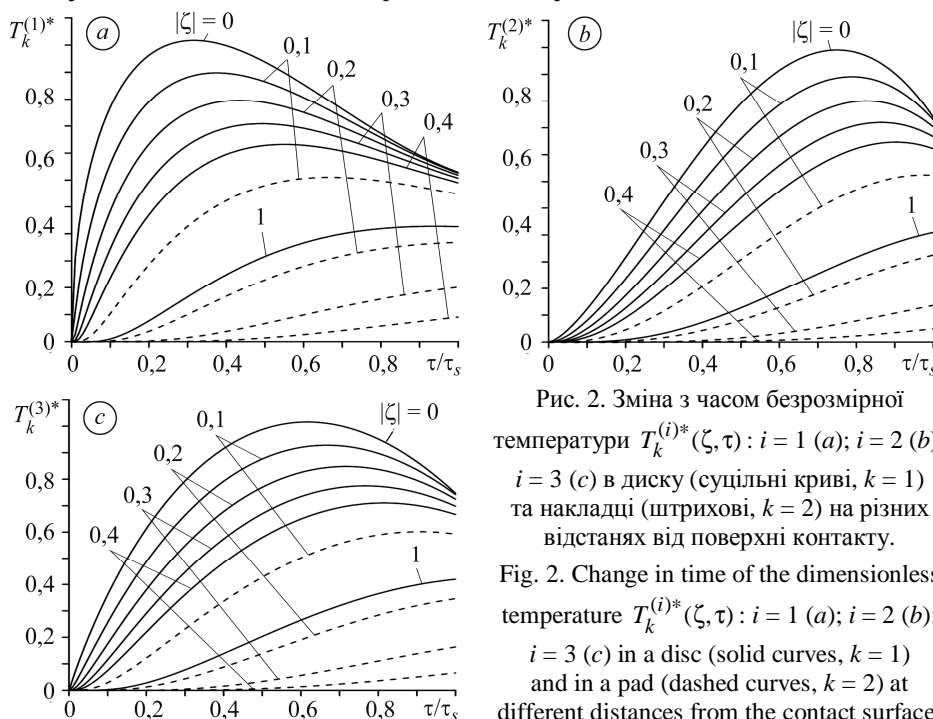


Рис. 2. Зміна з часом безрозмірної температури  $T_k^{(i)*}(\zeta, \tau)$ :  $i = 1$  (a);  $i = 2$  (b);  $i = 3$  (c) в диску (суцільні криві,  $k = 1$ ) та накладці (штрихові,  $k = 2$ ) на різних відстанях від поверхні контакту.  
Fig. 2. Change in time of the dimensionless temperature  $T_k^{(i)*}(\zeta, \tau)$ :  $i = 1$  (a);  $i = 2$  (b);  $i = 3$  (c) in a disc (solid curves,  $k = 1$ ) and in a pad (dashed curves,  $k = 2$ ) at different distances from the contact surface.

### ВИСНОВКИ

Дослідження показали, що розподіл температурних полів у фрикційних елементах гальм (накладка, диск) суттєво залежить від часового профілю питомої потужності тертя. Найбільше це помітно на поверхні контакту, де температура найвища. Виявлено, що існує пряма залежність між часом досягнення максимального значення потужності тертя  $q_{\max}^{(i)*}$  та температури  $T_{\max}^{(i)*}$ ,  $i = 1, 2, 3$  – зі збільшенням часу досягнення  $q_{\max}^{(i)*}$  зростає і час встановлення температурного максимуму  $T_{\max}^{(i)*}$ . Водночас вплив величини  $q_{\max}^{(i)*}$  на значення  $T_{\max}^{(i)*}$  є незначним – для  $q_{\max}^{(1)*} = 3$  отримали  $T_{\max}^{(1)*} = 1,12$ , а для  $q_{\max}^{(2)*} = q_{\max}^{(3)*} = 1,5$  знайдено, що  $T_{\max}^{(2)*} = 1,09$ , а  $T_{\max}^{(3)*} = 1,02$ . Перебіг охолодження поверхні контакту після досягнення температурного максимуму також суттєво залежить від еволюції питомої потужності тертя – температура в момент зупинки становить 56,2%, 77% і 73,5% від максимальних температур  $T_{\max}^{(i)*}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Встановлені точні розв'язки теплових задач тертя дають змогу отримати формули для визначення важливого триботехнічного параметра – коефіцієнта розподілу теплових потоків, які нагрівають диск та накладку під час гальмування із заданим часовим профілем потужності тертя.

*РЕЗЮМЕ.* Для трех экспериментальных зависимостей, описывающих изменение удельной мощности трения со временем торможения, построены точные решения соответствующих тепловых задач трения. При этом использовано формулу Дюгамеля и известное аналитическое решение одномерной краевой задачи теплопроводности для двух полуограниченных тел при постоянной мощности трения на поверхности контакта. Показано, что на основании полученных решений можно моделировать фрикционное нагревание трибосистемы накладка–диск. Исследовано влияние выбранных временных профилей мощности трения на распределение температуры в чугунном (ЧНМХ) диске и накладке, изготовленной из ретинакса ФМ–16Л.

*SUMMARY.* For three experimental dependences describing variation of specific power of friction during braking, the exact solutions of the corresponding thermal problems of friction were obtained. In this case we use the Duhamel formula and known analytical solution of one-dimensional boundary-value problem of heat conduction for two semi-infinite bodies at a constant specific power of friction on the contact surface. It is shown that on the basis of the obtained solutions a frictional heating process in a tribosystem pad–disc can be modelled. The influence of chosen temporal profiles of the specific power of friction on the temperature distribution in the cast-iron (ЧНМХ) disc and the retinax FM–16L pad has been investigated.

1. *Грилицький Д. В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: Ін-т змісту і методів навчання Міністерства освіти України, 1996. – 204 с.
2. *Kuciej M.* Analytical models of transient frictional heating. – Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, 2012. – 236 s.
3. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту тіл // Доп. АН УССР. – 1963. – № 7. – С. 872–874.
4. *Грилицький Д. В., Баран В. П.* Про постановку контактних задач термопружності при неідеальному тепловому контакті тіл // Вісник Львівського ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1987. – Вип. 27. – С. 10–13.
5. *Ling F. F.* A quasi-iterative method for computing interface temperature distribution // *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)*. – 1959. – **10**, № 5. – P. 461–475.
6. *Євтушенко О. О., Пир'єв Ю. О.* Розрахунок контактної взаємодії та зносу фрикційних елементів гальм // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1998. – **34**, № 2. – С. 93–96.  
(*Evtushenko O. O. and Pyr'ev Yu. O.* Calculation of the contact temperature and wear of frictional elements of brakes // *Materials Science*. – 1998. – **34**, № 2. – P. 249–254.)
7. *Євтушенко О., Куцєй М., Євтушенко Ол.* Моделювання фрикційного нагрівання під час гальмування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 5. – С. 27–33.  
(*Evtushenko O., Kuciej M., Evtushenko Ol.* Modeling of frictional heating in the process of braking // *Materials Science*. – 2013. – **48**, № 5. – P. 582–590.)
8. *Євтушенко О., Куцєй М., Ох Е.* Моделювання температурного режиму гальмівної системи з урахуванням термочутливості матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – **50**, № 3. – С. 77–83.  
(*Evtushenko O., Kuciej M., Och E.* Modeling of temperature conditions for a braking system with regard for the heat sensitivity of materials // *Materials Science*. – 2014. – **50**, № 3. – P. 397–405.)
9. *Чичинадзе А. В., Матвеевский Р. М., Браун Э. Д.* Материалы в триботехнике нестационарных процессов. – М.: Наука, 1986. – 248 с.
10. *Балакин В., Сергиенко В.* Тепловые расчеты тормозов и узлов трения. – Гомель: Ин-т механики металлополимерных систем им. В. А. Белого НАНБ, 1999. – 220 с.
11. *Чичинадзе А. В.* Расчет и исследование внешнего трения при торможении. – М.: Наука, 1967. – 572 с.
12. *Расчет, испытание и подбор фрикционных пар* / А. В. Чичинадзе, Э. Д. Браун, А. Г. Гинзбург, З. В. Игнатъева. – М.: Наука, 1979. – 268 с.
13. *Yevtushenko A. A., Kuciej M.* One-dimensional thermal problem of friction during braking: The history of development and actual state // *Int. J. Heat Mass Trans.* – 2012. – **55**, № 15–16. – P. 4118–4153.
14. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
15. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
16. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

Одержано 28.11.2016