

УДК 539.3

КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПАНЕЛІ ПОДВІЙНОЇ КРИВИНИ З МНОЖИНАМИ ОТВОРІВ ТА ВКЛЮЧЕНЬ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Т. В. ШОПА

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

У межах уточненої моделі, яка враховує деформацію поперечного зсуву, побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множинами отворів та абсолютно жорстких включень довільної геометричної форми, орієнтації та розташування, з різними типами з'єднань з панеллю. Досліджено поступальний рух включень у нормальному напрямку до серединної поверхні панелі, де зовнішня межа є складної геометричної конфігурації. Розглянуто різні гармонічні в часі крайові умови як на зовнішній межі панелі, так і на контурах отворів. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів. Використано секвенціальний підхід до зображення функцій Гріна. Інтегральні рівняння розв'язано методом колокацій.

Ключові слова: коливання, ортотропна панель подвійної кривини, отвори, включення, непрямий метод граничних елементів.

Коліванням суцільних тонкостінних елементів конструкцій традиційної форми багато уваги приділяють чимало фахівців з механіки. Однак недостатньо є опублікованих матеріалів, які стосуються динамічної поведінки неоднорідних панелей складної геометричної конфігурації з отворами та включеннями через значні математичні труднощі. Не відомі також роботи, які стосуються коливань панелей зі зовнішньою межею довільної форми та з отворами і включеннями довільної конфігурації.

Формулювання задачі. Розглянемо задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини, яка має N отворів та абсолютно жорстких включень. Серед них є N_1 включень довільної форми та розташування, які взаємодіють з панеллю через тонкі пружні прошарки типу Вінклера з коефіцієнтами жорсткості $k^{(j)}(\alpha)$, ($j = \overline{1, N_1}$), N_2 включень довільної форми та розташування, які жорстко з'єднані з панеллю, та N_3 включень довільної форми та розташування, які є шарнірно оперті. Товщиною пружних прошарків нехтуємо. Панель також містить N_4 отвори, де на контурах задано компоненти переміщень, N_5 отворів, на контурах яких задано компоненти зусиль, та N_6 отворів, де на контурах задано комбінації компонент переміщень та зусиль. Контурами включень є криві $L^{(j)}$, $j = \overline{1, N_1 + N_2 + N_3}$, отворів – $L^{(j)}$, $j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 1, N}$. Нехай на включення маси $\tilde{m}^{(j)}$ діють сили з головним вектором $P^{(j)}(t) = P_0^{(j)} \sin(\omega t)$, який є нормальним до серединної поверхні панелі і діє в точці центра мас включення. Вважаємо, що включення поступально рухаються вздовж нормального напрямку до серединної поверхні панелі і $\tilde{w}^{(j)}(t) = \tilde{w}_0^{(j)} \sin(\omega t)$ – переміщення j -ого включення. Зовнішня межа панелі є також довільної форми, а її контур – три взаємодоповню-

вальні криві $L^{(N+1)}$, $L^{(N+2)}$ та $L^{(N+3)}$. Введемо криволінійну систему координат та використаємо позначення, як у працях [1–4].

Крайові умови на контурах включень, які взаємодіють з панеллю через пружні прошарки типу Вінклера, мають вигляд

$$Q_n = -p^{(j)}(\alpha, t), \quad M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad M_\tau = 0, \quad N_\tau = 0, \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{1, N_1},$$

де $p^{(j)}(\alpha, t) = -k^{(j)}(\alpha)(\tilde{w}^{(j)}(t) - w(\alpha, t))$ – контактні сили взаємодії панелі та включення.

Крайові умови на контурах включень, жорстко з'єднаних з панеллю, такі:

$$w = \tilde{w}^{(j)}(t), \quad u_n = 0, \quad \gamma_n = 0, \quad u_\tau = 0, \quad \gamma_\tau = 0, \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2},$$

а на контурах шарнірно опертих включень:

$$w = \tilde{w}^{(j)}(t), \quad u_\tau = 0, \quad \gamma_\tau = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0,$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}.$$

Контактні сили взаємодії панелі та жорстко з'єднаних і шарнірно опертих включень моделюємо так:

$$p^{(j)}(\alpha, t) = -Q_n(\alpha, t) = -Q_n(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 + N_3}.$$

Крайові умови на зовнішній межі панелі та контурах отворів такі:

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad u_n = u_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\gamma_n = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad u_\tau = u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + N_4}, \quad j = N + 1,$$

$$Q_n = Q_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$N_n = N_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad N_\tau = N_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$M_\tau = M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)},$$

$$j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}, \quad j = N + 2,$$

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$N_n = N_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad u_\tau = u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + 1, N}, \quad j = N + 3.$$

Розв'язок задачі. Для дослідження використали рівняння оболонок, які враховують поперечні зсуви та всі інерційні компоненти, включно з інерцією обертання [1–3].

Рівняння руху абсолютно жорстких включень матимуть вигляд

$$\tilde{m}^{(j)} \frac{\partial^2 \tilde{w}^{(j)}(t)}{\partial t^2} = P^{(j)}(t) - \int_{L^{(j)}} k^{(j)}(\zeta)(\tilde{w}^{(j)}(t) - w(\zeta, t)) dl(\zeta), \quad j = \overline{1, N_1},$$

$$\tilde{m}^{(j)} \frac{\partial^2 \tilde{w}^{(j)}(t)}{\partial t^2} = P^{(j)}(t) - \int_{L^{(j)}} Q_n(\zeta, t) dl(\zeta), \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 + N_3}.$$

Розв'язок крайової задачі шукаємо на основі непрямого методу граничних елемен-

тів. Вводимо узагальнений контур $L = L^{(1)} \cup \dots \cup L^{(N)} \cup L^{(N+1)} \cup L^{(N+2)} \cup L^{(N+3)}$. Розв'язок подаємо у вигляді потенціалу простого шару, використовуючи функції Гріна, побудовані раніше [1–3] на основі послідовнісного підходу до зображення дельта-функції Дірака у вигляді послідовності дельта-подібних функцій [5, 6]. Для побудови інтегральних рівнянь за крайових умов, коли на контурах задано компоненти зусиль, використовуємо метод фіктивного контуру, щоб уникнути стрибка похідної від потенціалу простого шару на межі. Він полягає в тому, що крайові умови задовольняємо не на реальній межі, а на фіктивно зміщеній всередину розглядуваної області на малу відстань ϵ . Криві зміщених контурів позначатимемо $L^{\epsilon(j)}$. Систему $5(N+3) + N_1 + N_2 + N_3$ інтегральних рівнянь та співвідношень відносно невідомих функцій густин $\{T(\xi)\}$ та амплітуд переміщень включень $\tilde{w}_0^{(j)}$ розв'язуємо методом колокацій [1–3]. Відповідно система $5 \sum_{j=1}^{N+3} S^{(j)} + N_1 + N_2 + N_3$ лінійних алгебричних рівнянь відносно дискретних значень невідомих густин $\{T^{(j)r}\}$, $j = \overline{1, N+3}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$ та амплітуд переміщень включень $\tilde{w}_0^{(j)}$, $j = \overline{1, N_1 + N_2 + N_3}$ набуває вигляду

$$\left\{ u_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T = \\ = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\epsilon) \left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{ T^{(f)r} \},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad q = \overline{1, S^{(j)}}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2},$$

$$j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + N_4}, \quad j = N + 1,$$

$$\left\{ N_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), N_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), Q_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T = \\ = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\epsilon) \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{ T^{(f)r} \},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{\epsilon(j)}, \quad q = \overline{1, S^{(j)}}, \quad j = \overline{1, N_1},$$

$$j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}, \quad j = N + 2,$$

$$w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\epsilon) w_i(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r},$$

$$u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\epsilon) u_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r},$$

$$\gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\epsilon) \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad q = \overline{1, S^{(j)}}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3},$$

$$j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + 1, N}, \quad j = N + 3,$$

$$M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\epsilon) M_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r},$$

$$\begin{aligned}
N_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= \sum_{f=1}^{N+3S^{(f)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^5 C_{km}(\varepsilon) N_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r}, \\
\alpha^{(j)q} &\in L^{\varepsilon(j)}, \quad q=1, S^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}, \\
&\quad j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + 1, N}, \quad j = \overline{N + 3}, \\
P_0^{(j)} &= - \sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{f=1}^{N+3S^{(f)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^5 C_{km}(\varepsilon) \Psi_{km}^{ss}(\alpha^{(j)p}) w_{km}^i \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} + \\
&\quad + \tilde{w}_0^{(j)} \left(\sum_{p=1}^{S^{(j)}} \Theta(\alpha^{(j)p}) - \omega^2 \tilde{m}^{(j)} \right), \quad j = \overline{1, N_1}, \\
P_0^{(j)} &= \sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{f=1}^{N+3S^{(f)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^5 C_{km}(\varepsilon) \Psi_{in}(\alpha^{(j)p}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}^{(j)}, \\
&\quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 + N_3},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
u_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = 0, \quad w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \tilde{w}_0^{(j)}, \\
&\quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2}, \\
N_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= N_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = 0, \\
Q_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= k^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \times \\
&\times \left(\tilde{w}_0^{(j)} - \sum_{f=1}^{N+3S^{(f)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^5 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} \right), \quad j = \overline{1, N_1}, \\
N_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= u_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = 0, \quad w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \tilde{w}_0^{(j)}, \\
&\quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}, \\
\Psi_{in}(\alpha^{(j)p}) &= \Lambda_1 \Psi_{km}^{cs}(\alpha^{(j)p}) (\gamma_{1km}^i + \lambda_{1k} w_{km}^i - k_1 u_{1km}^i) + \\
&\quad + \Lambda_2 \Psi_{km}^{sc}(\alpha^{(j)p}) (\gamma_{2km}^i + \lambda_{2m} w_{km}^i - k_2 u_{2km}^i), \\
\Psi_{km}^{cs}(\alpha^{(j)p}) &= n_1(\alpha^{(j)p}) \int_{L^{\varepsilon(j)p}} \Phi_{km}^{cs}(\zeta) dl(\zeta), \\
\Psi_{km}^{sc}(\alpha^{(j)p}) &= n_2(\alpha^{(j)p}) \int_{L^{\varepsilon(j)p}} \Phi_{km}^{sc}(\zeta) dl(\zeta), \quad \alpha^{(j)p} \in L^{\varepsilon(j)p}.
\end{aligned}$$

Власні частоти шукаємо, прирівнюючи визначник системи лінійних алгебричних рівнянь до нуля, а характеристики напружено-деформованого стану – на основі знайдених дискретних значень функцій густин $\{T^{(j)r}\}$, $j = \overline{1, N+3}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$ за формулами

$$\begin{pmatrix} u_n(\alpha, t) \\ u_\tau(\alpha, t) \\ w(\alpha, t) \\ \gamma_n(\alpha, t) \\ \gamma_\tau(\alpha, t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N+3S^{(j)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^5 C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha) \right] \left[E_{km}(\alpha^r) \right] \{T^{(j)r}\} \sin(\omega t),$$

$$\begin{cases} N_n(\alpha, t) \\ N_\tau(\alpha, t) \\ Q_n(\alpha, t) \\ M_n(\alpha, t) \\ M_\tau(\alpha, t) \end{cases} = \sum_{j=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\epsilon) \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha) \right] \left[E_{km}(\alpha^r) \right] \left\{ T^{(j)r} \right\} \sin(\omega t).$$

Комбінуючи побудовані алгебричні рівняння, можна отримати розв'язки для довільних крайових умов на зовнішній межі панелі та контурах отворів. Також допускаються різні крайові умови на складових частинах контурів отворів та зовнішньої межі панелі.

Числові результати. Розглянули сталеву шарнірно оперту панель подвійної кривини прямокутну в плані з круглими підкріпленим отвором та жорстко закріпленим включенням. Тут уявно розширену область Π доцільно вибрати так, щоб її межа збігалася зі зовнішньою межею панелі. Геометричні та фізичні параметри панелі такі: $l_1 = 2$ m, $l_2 = 1$ m, $k_1 = 0,1$ m⁻¹, $k_2 = 0,2$ m⁻¹, $h = 0,0025$ m; $E_1 = E_2 = 210$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,3$, $\rho = 7800$ kg/m³. Параметри апроксимації: $K = 50$; $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$; $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,01$ m. Метод узагальненого підсумовування:

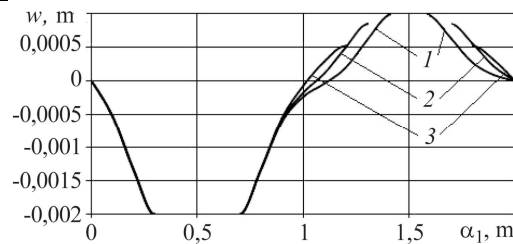
$$C_{km}(\epsilon) = \mu_{km} \frac{4 \left(\sin\left(\frac{\lambda_{1k}\epsilon_1}{2}\right) \right)^2 \left(\sin\left(\frac{\lambda_{2m}\epsilon_2}{2}\right) \right)^2}{l_1 l_2 \left(\frac{\lambda_{1k}\epsilon_1}{2} \right)^2 \left(\frac{\lambda_{2m}\epsilon_2}{2} \right)^2}.$$

Зображено (рис. 1) амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0,5l_2$ з частотою 5 Hz за різних радіусів включення. Маса включення 73,476 kg. Розглянули отвір радіуса 0,2 m з координатами центра $\alpha_1 = 0,5$ m, $\alpha_2 = 0,5$ m. Координати центра включення $\alpha_1 = 1,5$ m, $\alpha_2 = 0,5$ m. На включення діє сила $P = 3000$ N. На отворі задано такі амплітуди компонент переміщень: $w_0^{(2)} = -0,002$ m, $u_{0n}^{(2)} = u_{0\tau}^{(2)} = \gamma_{0n}^{(2)} = \gamma_{0\tau}^{(2)} = 0$.

Бачимо, що зі збільшенням радіуса включення прогин у точках на межі включення та поблизу нього зменшується, а в точках на межі отвору прогин не змінюється і чітко узгоджується з крайовими умовами.

Рис. 1. Амплітуда прогину панелі за різних радіусів включення: 1 – $R = 0,1$ m; 2 – $R = 0,2$ m; 3 – $R = 0,3$ m.

Fig. 1. Deflection amplitude of the panel for different of the inclusion's radiuses: 1 – $R = 0.1$ m; 2 – $R = 0.2$ m; 3 – $R = 0.3$ m.



На рис. 2 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0,5l_2$ з частотою 5 Hz за різного розташування центра включення. Маса включення, сила, яка діє на нього, радіус та розташування центра отвору такі ж, як і в першому випадку. Радіус включення 0,2 m. На отворі задано такі амплітуди компонент переміщень: $w_0^{(2)} = -0,001$ m, $u_{0n}^{(2)} = u_{0\tau}^{(2)} = \gamma_{0n}^{(2)} = \gamma_{0\tau}^{(2)} = 0$.

Легко помітити, що зі зближенням вплив підкріпленого отвору на переміщення включення та на прогин точок панелі між отвором і включенням суттєво збільшується порівняно з попереднім випадком.

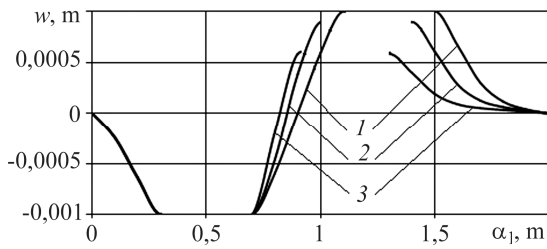


Рис. 2. Амплітуда прогину панелі за різного розташування центра включення:

- 1 – $\alpha_1 = 1,3$ m, $\alpha_2 = 0,5$ m;
- 2 – $\alpha_1 = 1,2$ m, $\alpha_2 = 0,5$ m;
- 3 – $\alpha_1 = 1,1$ m, $\alpha_2 = 0,5$ m.

Fig. 2. Deflection amplitude of the panel for different locations of the center of the inclusion:
1 – $\alpha_1 = 1.3$ m, $\alpha_2 = 0.5$ m; 2 – $\alpha_1 = 1.2$ m, $\alpha_2 = 0.5$ m; 3 – $\alpha_1 = 1.1$ m, $\alpha_2 = 0.5$ m.

На рис. 3 зображено амплітуду прогину панелі на лінії $\alpha_2 = 0,5l_2$ з частотою 5 Hz за різних заданих значень $w_0^{(2)}$ на межі отвору. Решта амплітуд компонент переміщень на межі отвору такі: $u_{0n}^{(2)} = u_{0\tau}^{(2)} = \gamma_{0n}^{(2)} = \gamma_{0\tau}^{(2)} = 0$. Радіуси отвору та включення 0,2 m. Маса включення, координати центра отвору та включення такі ж, як в першому випадку. На включення діє сила $P = 2000$ N.

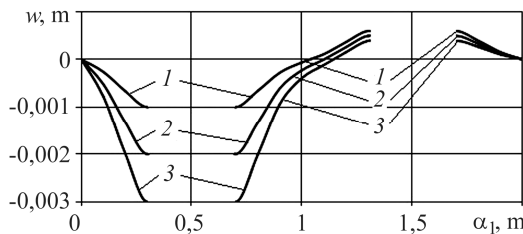


Рис. 3. Амплітуда прогину панелі для різних крайових умов на контурі отвору:

- 1 – $w_0^{(2)} = -0,001$ m ;
- 2 – $w_0^{(2)} = -0,002$ m ;
- 3 – $w_0^{(2)} = -0,003$ m .

Fig. 3. Deflection amplitude of the panel for different values of the boundary conditions on the contour of the cutout: 1 – $w_0^{(2)} = -0.001$ m ; 2 – $w_0^{(2)} = -0.002$ m ; 3 – $w_0^{(2)} = -0.003$ m .

Бачимо (рис. 3), що амплітуда прогину на межі підкріпленого отвору впливає не тільки в зоні поблизу отвору, а й по всій області панелі і, зокрема, на переміщення включення.

На рис. 4 зображено амплітуда прогину на лінії $\alpha_2 = 0,5l_2$ за зміни частоти вимушувальних чинників. Розглянуто отвір та включення радіусів 0,1 m. Координати центра отвору та включення, сила, яка діє на включення, такі ж, як і в першому випадку. Маса включення 18,369 kg. На отворі задано такі амплітуди компонент переміщень: $w_0^{(2)} = -0,001$ m, $u_{0n}^{(2)} = u_{0\tau}^{(2)} = \gamma_{0n}^{(2)} = \gamma_{0\tau}^{(2)} = 0$.

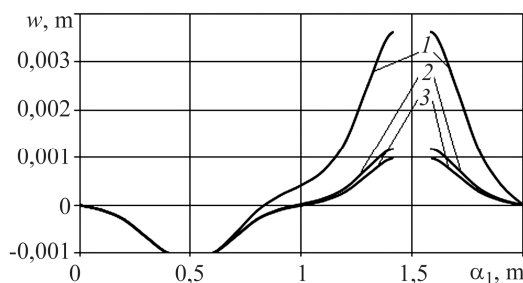


Рис. 4. Амплітуда прогину панелі за різних частот вимушувальних чинників: 1 – $\omega = 50$ Hz; 2 – $\omega = 25$ Hz; 3 – $\omega = 5$ Hz.

Fig. 4. Deflection amplitude of the panel for different values of the frequency of the excitation factors:
1 – $\omega = 50$ Hz; 2 – $\omega = 25$ Hz;
3 – $\omega = 5$ Hz.

Бачимо (рис. 4), що динамічний прогин суттєво залежить від частоти.

ВИСНОВКИ

Розв'язано задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множинами отворів та включень довільної форми, орієнтації та розташування за різних типів з'єднань включень з панеллю та з довільними гармонічними в часі крайовими умовами на зовнішній довільної форми межі панелі та на контурах отворів. Досліджено шарнірно оперту прямокутну панель подвійної кривини з одним підкріпленим круглим отвором та одним круглим включенням, жорстко з'єднаним з панеллю. На основі отриманих числових результатів можна стверджувати, що значення динамічного прогину істотно залежить від частоти, крайових умов, взаємного розташування отворів та включень, а також їх розмірів. Отримані розв'язки дають змогу оптимально вибрати параметри отворів та включень для підвищення надійності конструкцій за певного діапазону частот зовнішніх вимушувальних чинників. Це підкреслює важливу практичну необхідність таких розрахунків. Запропонована числова схема є загальною для досліджень поведінки розв'язків за різних часткових випадків задачі.

РЕЗЮМЕ. В рамках уточненої моделі, учитывающей деформацию поперечного сдвига, построено решение задачи об установившихся колебаниях ортотропной панели двойной кривизны с множествами отверстий и абсолютно жестких включений произвольной геометрической формы, ориентации и расположения. Исследовано поступательное движение включений в нормальном направлении к средней поверхности панели, где внешняя граница имеет сложную геометрическую конфигурацию. Рассмотрены разные гармонические во времени краевые условия как на внешней границе панели, так и на контурах отверстий. Решение построено на основе непрямого метода граничных элементов. Использовано секвенциальный подход к изображению функций Грина. Интегральные уравнения решено методом коллокации.

SUMMARY. In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation, the solution of the problem on the steady state vibrations of the orthotropic doubly curved panel with the sets of cutouts and rigid inclusions of the arbitrary geometrical form, orientation, and location is constructed. Inclusions have different types of connections with the panel. The case of the translational motion of the inclusions along the normal direction to the middle surface of the panel is investigated. External boundary of the panel is of complex geometrical configuration. Different harmonic in time boundary conditions are considered both on the external boundary of the panel and on the contours of the cutouts. The solution is built on the basis of the indirect boundary elements method. The sequential approach to Green's functions representation is used. Integral equations are solved by the collocation method.

1. *Shopa T.* Vibration of orthotropic double curvature panel with a set of cutouts of arbitrary configuration // 19th Int. Congress on Sound and Vibration (ICSV 19) (4 Vols). – New York: Curran Associates Inc., 2013. – 2. – P. 1171–1179.
2. *Шона Т.* Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною отворів довільної конфігурації // Вісник ТНТУ. – 2012. – № 3. – С. 63–74.
3. *Шона Т.* Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною включень довільної конфігурації з пружними прошарками // Вісник ТНТУ. – 2013. – № 1. – С. 71–84.
4. *Шона Т.* Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною включень довільної конфігурації // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. – Львів, 2013. – 2. – С. 187–188.
5. *Бурак Я. Й., Рудацький Ю. К., Сухорольський М. А.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.
6. *Lighthill J.* Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. – Cambridge University Press, 1958. – 79 p.

Одержано 25.12.2013