ВПЛИВ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ НА ПОШИРЕННЯ SH ХВИЛЬ В ІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛАХ

О. Р. ГРИЦИНА

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Показано, що у межах лінійної континуальної нелокального типу теорії пружності, яка враховує взаємозв’язок деформування з локальним зміщенням маси, можна описати поширення неплоских поверхневих зсувних хвиль (SH хвиль) в ізотропному півпросторі. Класична теорія пружності не передбачає існування таких хвиль. Вони можуть поширюватися у півпросторі, якщо задачу формулювати у межах теорії пружності, яка враховує тензорну природу локального зміщення маси. Напружено-деформований стан такого континууму характеризують тензори деформації та наведеної маси, які є незалежними величинами.

Ключові слова: *нелокальна теорія, взаємозв’язані поля, локальне зміщення маси, SH хвилі.*

Класична лінійна теорія пружного деформування твердих тіл передбачає існування поверхневих хвиль в однорідному півпросторі за реалізації у ньому плоского напруженого чи плоско-деформованого стану. Однак ця теорія не допускає можливості поширення неплоских поверхневих поперечних (зсувних) пружних хвиль, незважаючи на експериментальне підтвердження їх існування [1–3]. Така неузгодженість зумовлена тим, що, згідно з класичною лінійною теорією пружності, поширення поверхневих SH хвиль описують рівняння Гельмгольца з нульовими крайовими умовами. А така задача передбачає нульовий розв’язок [4]. Невідповідність між модельним описом і результатами експериментів стимулювала розроблення нових узагальнених моделей механіки, які б повніше та адекватніше описували закономірності зв’язаних полів в об’єктах досліджень. У межах континуального опису одними з таких є нелокальні теорії пружних тіл [5–11]. До них належить також модель механіки твердого тіла, яка враховує взаємозв’язок деформування з локальним зміщенням маси [12]. З останнім пов’язуються зміни структури матеріалу у межах фізично малого елемента тіла. Такі зміни можна спостерігати, для прикладу, у примежових областях новоутворених поверхонь [13]. Для кристалічних тіл вони відомі як поверхнева релаксація, під якою розуміють зміну віддалі між атомними площинами поблизу поверхні порівняно з їх об’ємними значеннями [14]. Нелокальна теорія деформації твердих тіл, запропонована у працях [12, 15], ґрунтується на використанні концепції локального зміщення маси як градієнтності механічних полів. Ця теорія дала змогу описати приповерхневі та масштабні ефекти, а також низку інших експериментально встановлених явищ, які не знайшли обґрунтування у межах класичної лінійної теорії пружності [15].

Застосуємо згадану нелокальну теорію для вивчення закономірностей поширення поверхневих SH хвиль у лінійному ізотропному півпросторі. При цьому використаємо варіант моделі механіки суцільного середовища, який враховує тензорну природу параметрів, пов’язаних із локальним зміщенням маси, а тому до-

Контактна особа: О. Р. ГРИЦИНА, e-mail: gryt045@gmail.com

зволяє описати його вплив на зсувні хвилі [16]. У межах цієї теорії деформування характеризують тензори напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ та деформації $\hat{\mathbf{e}}$, а локальне зміщення маси – тензор локального зміщення маси $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}$, густина наведеної маси $\hat{\boldsymbol{\rho}}^{m}$ і потенціал $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi}$, який визначає зміну внутрішньої енергії системи, зумовлену локальним зміщенням маси [16].

Система вихідних співвідношень. Лінійна система рівнянь градієнтної пружності, яка враховує деформування та локальне зміщення маси, охоплює [16] рівняння руху та балансу наведеної маси:

$$\nabla_j \sigma_{ji} + \rho_0 F_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \rho^m_{ij} = -\nabla_l \pi_{lij}, \tag{1}$$

нелокальні рівняння стану

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} - 2G_{\rho e}\rho^m_{ij} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)e_{ll} - \left(K_{\rho e} - \frac{2}{3}G_{\rho e}\right)\rho^m_{ll}\right]\delta_{ij}, \tag{2}$$

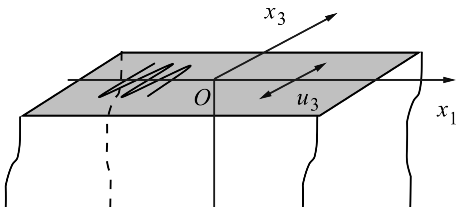
$$\tilde{\mu}'^{\pi}_{ij} = \mu'^{\pi}_{ij} - \mu'^{\pi}_{0ij} = 2G_{\rho}\rho^m_{ij} - \frac{2}{\rho_0}G_{\rho e}e_{ij} + \left[\left(K_{\rho} - \frac{2}{3}G_{\rho}\right)\rho^m_{ll} - \frac{1}{\rho_0}\left(K_{\rho e} - \frac{2}{3}G_{\rho e}\right)e_{ll}\right]\delta_{ij}, \tag{3}$$

$$\pi_{ijk} = -\varsigma_1 \nabla_i \tilde{\mu}'^{\pi}_{ll}\delta_{jk} - \varsigma_2(\nabla_j \tilde{\mu}'^{\pi}_{ll}\delta_{ik} + \nabla_k \tilde{\mu}'^{\pi}_{ll}\delta_{ij}) - \varsigma_3 \nabla_l \tilde{\mu}'^{\pi}_{li}\delta_{jk} -$$

$$-\varsigma_4(\nabla_l \tilde{\mu}'^{\pi}_{lj}\delta_{ik} + \nabla_l \tilde{\mu}'^{\pi}_{lk}\delta_{ij}) - \varsigma_5 \nabla_i \tilde{\mu}'^{\pi}_{kj} - \varsigma_6(\nabla_j \tilde{\mu}'^{\pi}_{ki} + \nabla_k \tilde{\mu}'^{\pi}_{ij}) \tag{4}$$

та співвідношення Коші, які пов’язують тензор деформації $\hat{\mathbf{e}}$ і вектор переміщень $\mathbf{u}$: $e_{ij} = (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)/2$. Тут σ_{ij}, e_{ij}, ρ^m_{ij}, π_{ijk}, $\tilde{\mu}'^{\pi}_{ij}$ – компоненти тензорів напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, деформації $\hat{\mathbf{e}}$, наведеної маси $\hat{\boldsymbol{\rho}}^{m}$, локального зміщення маси $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}$ і збурення потенціалу $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} = \hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi} - \hat{\boldsymbol{\mu}}$ ($\hat{\boldsymbol{\mu}}$ – тензор хімічного потенціалу); δ_{ij} – символ Кронекера; ρ_0 – густина маси у відліковий момент часу; F_i – компоненти питомого вектора масових сил; K, G, K_{ρ}, G_{ρ}, $G_{\rho e}$, $K_{\rho e}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}_0$, ς_i, $i = \overline{1,6}$ – характеристики матеріалу; t – час; ∇_i – просторова похідна за відповідною координатою.

Формулювання задачі. Нехай у напівбезмежному пружному ізотропному тілі, що у декартовій системі координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ займає область $x_2 \geq 0$, $-\infty < x_1 < +\infty$, поширюється горизонтально поляризована поверхнева хвиля. Цю хвилю характеризуємо вектором переміщення $\mathbf{u} = (0, 0, u_3)$, де $u_3 = u_3(x_1, x_2)$ (див. рисунок). Вважаємо, що переміщення u_3 експоненціально загасає за віддалення від поверхні тіла $x_2 = 0$. Поверхня тіла вільна від зовнішньої дії, тому крайові умови задачі запишемо так:



Об’єкт дослідження.
Object of investigation.

$$\sigma_{23}(x_1, 0) = 0, \ \pi_{213}(x_1, 0) = 0, \ \pi_{223}(x_1, 0) = 0 \ \text{для} \ -\infty < x_1 < +\infty. \tag{5}$$

За такої зовнішньої дії тензор деформації $\hat{\mathbf{e}}$ має дві ненульові компоненти $e_{i3} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u_3}{\partial x_i}$, $(i = 1, 2)$. Врахувавши ці співвідношення і рівняння стану (2)–(4), для ненульових компонент тензорів напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, потенціалу $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$ та локального зміщення маси $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}$ отримаємо такі формули:

$$\sigma_{i3} = G\frac{\partial u_3}{\partial x_i} - 2G_{\rho e}\rho_{i3} = G(1-\overline{\overline{\gamma}})\frac{\partial u_3}{\partial x_i} - \frac{G_{\rho e}}{G_\rho}\tilde{\mu}'^{\pi}_{i3}, \quad (i=1,\ 2), \tag{6}$$

$$\tilde{\mu}'^{\pi}_{i3} = 2G_\rho\rho^m_{i3} - \frac{1}{\rho_0}G_{\rho e}\frac{\partial u_3}{\partial x_i}, \quad (i=1,\ 2). \tag{7}$$

$$\pi_{113} = \pi_{131} = -(\varsigma_4+\varsigma_5+\varsigma_6)\nabla_1\tilde{\mu}'^{\pi}_{13} - \varsigma_4\nabla_2\tilde{\mu}'^{\pi}_{23}, \tag{8}$$

$$\pi_{132} = \pi_{123} = -\varsigma_5\nabla_1\tilde{\mu}'^{\pi}_{23} - \varsigma_6\nabla_2\tilde{\mu}'^{\pi}_{13}, \ \pi_{213} = \pi_{231} = -\varsigma_5\nabla_2\tilde{\mu}'^{\pi}_{13} - \varsigma_6\nabla_1\tilde{\mu}'^{\pi}_{23}, \tag{9}$$

$$\pi_{232} = \pi_{223} = -\varsigma_4\nabla_1\tilde{\mu}'^{\pi}_{13} - (\varsigma_4+\varsigma_5+\varsigma_6)\nabla_2\tilde{\mu}'^{\pi}_{23}, \tag{10}$$

$$\pi_{321} = \pi_{312} = -\varsigma_6(\nabla_2\tilde{\mu}'^{\pi}_{13} + \nabla_1\tilde{\mu}'^{\pi}_{23}), \qquad \pi_{311} = -(\varsigma_3+2\varsigma_6)\nabla_1\tilde{\mu}'^{\pi}_{13} - \varsigma_3\nabla_2\tilde{\mu}'^{\pi}_{23}, \tag{11}$$

$$\pi_{322} = -\varsigma_3\nabla_1\tilde{\mu}'^{\pi}_{13} - (\varsigma_3+2\varsigma_6)\nabla_2\tilde{\mu}'^{\pi}_{23}, \qquad \pi_{333} = -(\varsigma_3+2\varsigma_4)(\nabla_1\tilde{\mu}'^{\pi}_{13} + \nabla_2\tilde{\mu}'^{\pi}_{23}). \tag{12}$$

Тут $\overline{\overline{\gamma}} = G^2_{\rho e}\big/(\rho_0 G G_\rho)$.

Розв'язувальна система рівнянь моделі, яка відповідає рівнянням (1) та фізичним співвідношенням (6)–(12), має вигляд

$$G(1-\overline{\overline{\gamma}})\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) - \frac{G_{\rho e}}{G_\rho}\left(\frac{\partial\tilde{\mu}'^{\pi}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tilde{\mu}'^{\pi}_{23}}{\partial x_2}\right) = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{\mu}'^{\pi}_{i3}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\tilde{\mu}'^{\pi}_{i3}}{\partial x_2^2}\right) - \underline{\lambda}^2\tilde{\mu}'^{\pi}_{i3} + \kappa'\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\tilde{\mu}'^{\pi}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tilde{\mu}'^{\pi}_{23}}{\partial x_2}\right) = b_u\frac{\partial u_3}{\partial x_i}, \ (i=1,\ 2). \tag{14}$$

Тут $\underline{\lambda}^2 = (2G_\rho\varsigma_5)^{-1}$, $\kappa' = (\varsigma_4+\varsigma_6)/\varsigma_5$, $b_u = G_{\rho e}/(2\rho_0 G_\rho\varsigma_5)$. Зазначимо, що результатом урахування у модельному описі локального зміщення маси та його взаємозв'язку з деформуванням є модифікація розв'язувальної системи рівнянь. Порівняно з класичною теорією пружності ця система додатково охоплює два скалярні рівняння (14), які є наслідком рівняння балансу наведеної маси [16]. Модифікації зазнало також рівняння руху, яке додатково містить також просторові градієнти потенціалів $\tilde{\mu}'^{\pi}_{i3}$, $i=1,\ 2$. Як показано нижче, виключення з розв'язувальної системи рівнянь потенціалів $\tilde{\mu}'^{\pi}_{i3}$ $(i=1,\ 2)$ призведе до підвищення порядку диференціального рівняння для визначення вектора переміщення.

Розв'язок задачі та його аналіз. Введемо у розгляд функцію $m(x_1,x_2,t)$, означену формулою

$$m(x_1,x_2,t) = \frac{\partial\tilde{\mu}'^{\pi}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\tilde{\mu}'^{\pi}_{23}}{\partial x_2}. \tag{15}$$

Для знаходження цієї функції на основі рівнянь (14) отримаємо:

$$\Delta m - \Lambda^2 m = b_u\frac{\Lambda^2}{\underline{\lambda}^2}\Delta u_3. \tag{16}$$

Тут $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – двовимірний оператор Лапласа, а $\Lambda^2 = \dfrac{\underline{\lambda}^2}{1+\kappa'}$. Зазначимо, що параметр $l_* = \Lambda^{-1}$ має розмірність довжини і є характерною віддаллю для приповерхневих явищ.

До рівнянь (15), (16) долучаємо також рівняння руху, яке запишемо так:

$$G(1-\bar{\bar{\gamma}})\Delta u_3 - \frac{G_{\rho e}}{G_\rho} m = \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\,. \qquad (17)$$

Виходячи зі зв'язаної системи рівнянь (16) та (17), для визначення компоненти $u_3(x_1, x_2, t)$ вектора переміщення отримаємо диференціальне рівняння не другого, як у класичній пружності, а четвертого порядку:

$$G(1-\bar{\bar{\gamma}})\Delta\Delta u_3 - \Lambda^2\left[G(1-\bar{\bar{\gamma}}) + \frac{G_{\rho e}}{G_\rho}\frac{b_u}{\underline{\lambda}^2}\right]\Delta u_3 = \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u_3 - \Lambda^2 u_3)\,. \qquad (18)$$

Обмежившись розглядом усталеного режиму, приймемо, що $u_3(x_1, x_2, t) = = w(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$, де ω – частота. Для знаходження функції $w(x_1, x_2)$ на основі (18) маємо рівняння

$$b'\Delta\Delta w - g(\omega)\Delta w - k^2(\omega) w = 0\,. \qquad (19)$$

Тут $k(\omega) = \omega / c_2$, $c_2 = \sqrt{G/\rho_0}$, $b' = (1-\bar{\bar{\gamma}})/\Lambda^2$, $g(\omega) = 1 - k^2/\Lambda^2$.

Рівняння (19) описує дисперсійні властивості середовища. Бачимо, що коефіцієнти цього рівняння g та k – функції частоти. Коефіцієнт $g(\omega)$ може набувати як додатних, так і від'ємних значень, а також може дорівнювати нулеві – залежно від частоти ω, параметрів Λ та c_2 (c_2 – швидкість поперечної хвилі у межах класичної теорії пружності). Знак параметра $g(\omega)$ впливає на розв'язок диференціального рівняння (19). Оскільки Λ – достатньо велика величина, то на основі наведених співвідношень можемо прийняти, що для низьких частот $g \approx 1$. Умові $g < 0$ відповідають частоти $\omega > \Lambda\sqrt{G/\rho_0}$. Для кристалічних тіл $G = O(10^9)$ N/m^2; $\rho_0 = O(10^3)$ kg/m^3, а тому: $\omega > 3{,}162 \cdot 10^2\ \Lambda$. Ґрунтуючись на результатах, наведених у літературі [8, 10], для кристалічних тіл приймемо, що $\Lambda = O(10^9)$ m^{-1}. Тоді $\omega > 3{,}162 \cdot 10^{11}$ Hz, тобто ω належить до гіперзвукового діапазону. Зазначимо, що для гранульованих матеріалів характерна віддаль порядку 10^{-4} m [10]. Отже, умові $g < 0$ у гранульованих матеріалах відповідатимуть частоти $\omega > 3{,}162 \cdot 10^6$ Hz.

Оскільки вивчаємо можливість поширення поверхневої хвилі, то невідому функцію $w(x_1, x_2)$ подамо у вигляді $w(x_1, x_2) = w_*(q, x_2)e^{iqx_1}$, де q – хвильове число, яке слід визначити. Виходячи із рівняння (19), для знаходження функції $w_*(q, x_2)$ одержуємо звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку:

$$b'\frac{d^4 w_*}{dx_2^4} - (g + 2q^2 b')\frac{d^2 w_*}{dx_2^2} + (gq^2 + b'q^4 - k^2)w_* = 0\,. \qquad (20)$$

Розв'язок рівняння (20) є лінійною комбінацією експоненціальних функцій на взірець $e^{\alpha x_2}$, де α – корені біквадратного рівняння:

$$b'\alpha^4 - (g + 2q^2 b')\alpha^2 + gq^2 + b'q^4 - k^2 = 0\,.$$

Із чотирьох коренів цього рівняння беремо лише ті, які задовольняють умову випромінювання Зоммерфельда [4]. Тому запишемо

$$w_*(q, x_2) = B(q)e^{-\alpha_1(q)x_2} + C(q)e^{-\alpha_2(q)x_2}\,, \qquad (21)$$

де $B(q)$ та $C(q)$ – невідомі величини, які залежать від хвильового числа q, а

$$\alpha_j = \sqrt{q^2 + (-1)^{j+1}\tau_j^2}\,,\ \tau_j = \sqrt{\frac{\sqrt{D} + (-1)^{j+1} g}{2b'}}\,,\ (\alpha_j > 0,\ j = 1, 2), \qquad (22)$$

$$D = (1 + k^2/\Lambda^2)^2 - 4\bar{\bar{\gamma}}k^2/\Lambda^2 \ . \qquad (23)$$

Частота, за якої параметри α_1 та α_2 змінюють значення з дійсного на комплексне (уявне), є частотою запирання хвилі. Параметри α_1 та α_2 будуть дійсними і додатними числами, якщо q – дійсне число, модуль якого більший від τ_2: $|q| > \tau_2$. Отже, маємо обмеження на хвильове число q: $-\infty < q < -\tau_2$ і $\tau_2 < q < +\infty$. З умови додатної визначеності параметра D отримаємо також таке обмеження на значення параметра $\bar{\bar{\gamma}}$: $\bar{\bar{\gamma}} \le 1/2$. Якщо $k^2/\Lambda^2 << 1$, що відповідає частотам $\omega << c_2\Lambda$, то із достатньою точністю можна прийняти, що $D \approx (1 + k^2/\Lambda^2)^2(1 - 4\bar{\bar{\gamma}}k^2/\Lambda^2)$. Для таких частот: $\tau_1^2 \approx (\Lambda^2 - \bar{\bar{\gamma}}k^2)/(1 - \bar{\bar{\gamma}})$, $\tau_2^2 \approx k^2$.

Таким чином, для компоненти u_3 вектора переміщень маємо подання

$$u_3(x_1, x_2, t) = \left[B(q)e^{-\alpha_1(q)x_2} + C(q)e^{-\alpha_2(q)x_2} \right] e^{i(qx_1 - \omega t)}, \qquad (24)$$

де $x_2 \ge 0$, $\alpha_1 > 0$ та $\alpha_2 > 0$, а $B(q)$, $C(q)$ – невідомі амплітуди.

Ґрунтуючись на рівнянні (17) та поданні (24), одержуємо такий вираз для функції $m(x_1, x_2, t)$:

$$m(x_1, x_2, t) = \frac{GG_\rho}{G_{\rho e}} \left\{ \left[\left(1 - \bar{\bar{\gamma}}\right)\left(\alpha_1^2 - q^2\right) + k^2 \right] B(q)e^{-\alpha_1 x_2} + \right.$$

$$\left. + \left[(1 - \bar{\bar{\gamma}})(\alpha_2^2 - q^2) + k^2 \right] C(q)e^{-\alpha_2 x_2} \right\} e^{i(qx_1 - \omega t)}. \qquad (25)$$

Зважаючи на рівняння (14), а також формули (24) і (25), для знаходження потенціалів $\tilde{\mu}_{13}'^{\pi}$ та $\tilde{\mu}_{23}'^{\pi}$ одержуємо неоднорідні рівняння:

$$\Delta\tilde{\mu}_{13}'^{\pi} - \underline{\lambda}^2\tilde{\mu}_{13}'^{\pi} = iqb_u \left\langle \left(1 - \frac{\kappa' d_1}{\bar{\bar{\gamma}}\underline{\lambda}^2}\right) B(q)e^{-\alpha_1 x_2} + \left(1 - \frac{\kappa' d_2}{\bar{\bar{\gamma}}\underline{\lambda}^2}\right) C(q)e^{-\alpha_2 x_2} \right\rangle e^{i(qx_1 - \omega t)}, \qquad (26)$$

$$\Delta\tilde{\mu}_{23}'^{\pi} - \underline{\lambda}^2\tilde{\mu}_{23}'^{\pi} = -b_u \left\langle \alpha_1 B(q)\left(1 - \frac{\kappa' d_1}{\bar{\bar{\gamma}}\underline{\lambda}^2}\right) e^{-\alpha_1 x_2} + \alpha_2 C(q)\left(1 - \frac{\kappa' d_2}{\bar{\bar{\gamma}}\underline{\lambda}^2}\right) e^{-\alpha_2 x_2} \right\rangle e^{i(qx_1 - \omega t)}. \qquad (27)$$

Тут $d_j = k^2 + (-1)^{j+1}(1 - \bar{\bar{\gamma}})\tau_j^2, \quad (j = 1, 2)$.

Розв'язками рівнянь (26), (27), які справджують умову обмеженості потенціалів у разі $x_2 \to +\infty$, є функції

$$\tilde{\mu}_{13}'^{\pi}(x_1, x_2, t) = \left(A(q)e^{-\lambda x_2} + iqB(q)N_1 e^{-\alpha_1 x_2} - iqC(q)N_2 e^{-\alpha_2 x_2} \right) e^{i(qx_1 - \omega t)}, \qquad (28)$$

$$\tilde{\mu}_{23}'^{\pi}(x_1, x_2, t) = \left(iA(q)\frac{q}{\lambda}e^{-\lambda x_2} - B(q)\alpha_1 N_1 e^{-\alpha_1 x_2} + C(q)\alpha_2 N_2 e^{-\alpha_2 x_2} \right) e^{i(qx_1 - \omega t)}, \qquad (29)$$

де $\lambda = \left| \sqrt{\underline{\lambda}^2 + q^2} \right|$, $N_j = b_u d_j \big/ (\bar{\bar{\gamma}}\underline{\lambda}^2\tau_j^2)$, $(j = 1, 2)$.

Таким чином, розв'язок сформульованої задачі подаємо формулами (24), (28), (29), у яких сталі A, B, C визначають із крайових умов (5) на поверхні півпростору $x_2 = 0$. Виходячи із визначальних співвідношень (6), (9), (10), формул (24), (28), (29) та крайових умов (5), для знаходження невідомих сталих A, B, C одержуємо однорідну лінійну алгебраїчну систему рівнянь:

$$A\frac{iq\underline{\lambda}^2\bar{\bar{\gamma}}}{\lambda b_u} + B\alpha_1\left(1 - \bar{\bar{\gamma}} - \frac{d_1}{\tau_1^2}\right) + C\alpha_2\left(1 - \bar{\bar{\gamma}} + \frac{d_2}{\tau_2^2}\right) = 0, \qquad (30)$$

$$A\left(\varsigma_5\lambda+\frac{\varsigma_6 q^2}{\lambda}\right)+iq\left(\varsigma_5+\varsigma_6\right)\left(B\alpha_1 N_1-C\alpha_2 N_2\right)=0\,, \tag{31}$$

$$Aiq\left(\varsigma_5+\varsigma_6\right)-BN_1\left[\varsigma_4\tau_1^2+\left(\varsigma_5+\varsigma_6\right)\alpha_1^2\right]-CN_2\left[\varsigma_4\tau_2^2-\left(\varsigma_5+\varsigma_6\right)\alpha_2^2\right]=0\,. \tag{32}$$

Слід зазначити, що тут $d_i=d_i(k)$, $\tau_i=\tau_i(k)$, $\alpha_i=\alpha_i(q,k)$, $\lambda=\lambda(q)$. Задача матиме ненульовий розв'язок лише тоді, коли визначник системи (30)–(32) дорівнюватиме нулеві. Таким чином, для поверхневої зсувної хвилі отримаємо дисперсійне рівняння

$$\alpha_1\left(\nu_1\tau_2^2-\alpha_2^2\right)\left[\frac{k^2}{d_1}\left(1+\nu_2\frac{\underline{\lambda}^2}{q^2}\right)-1\right]+\alpha_2\left(\nu_1\tau_1^2+\alpha_1^2\right)\left[\frac{k^2}{d_2}\left(1+\nu_2\frac{\underline{\lambda}^2}{q^2}\right)-1\right]+ \\ +\alpha_1\alpha_2\lambda k^2\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_2}\right)=0, \tag{33}$$

з якого визначаємо хвильове число q як функцію k, а відтак, знаходимо з якою фазовою швидкістю $v=\omega/q$ може поширюватися в однорідному ізотропному півпросторі поверхнева поперечна хвиля заданої частоти ω. У формулі (33) $\nu_1=\varsigma_4/(\varsigma_5+\varsigma_6)$, $\nu_2=\varsigma_5/(\varsigma_5+\varsigma_6)$. За відомих характеристик матеріалу розв'язки алгебраїчного рівняння (33) можна знайти числовими методами. Із знайдених розв'язків слід вибрати дійсні додатні корені, які задовольняють рівняння і відповідають записаним вище обмеженням, зокрема, умові $|\tau_2|<|q|$. Комплексні корені відповідають частоті запирання хвилі.

Рівняння (33) свідчить, що фазова швидкість SH хвилі залежить від частоти, тобто середовище є дисперсійне. Це рівняння можна записати ще так:

$$\Lambda^2\left\langle\left[\left(1+\nu_2\frac{\underline{\lambda}^2}{q^2}\right)\left(1+\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)+2\overline{\overline{\gamma}}\right]\left[\alpha_1-\alpha_2+\nu_1\left(\frac{\tau_1^2}{\alpha_1}+\frac{\tau_2^2}{\alpha_2}\right)\right]+\right. \\ \left.+\left(1+\nu_2\frac{\underline{\lambda}^2}{q^2}\right)\left(1+\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)\left[\alpha_1+\alpha_2+\nu_1\left(\frac{\tau_1^2}{\alpha_1}-\frac{\tau_2^2}{\alpha_2}\right)\right]\sqrt{1-\frac{4\overline{\overline{\gamma}}k^2}{\Lambda^2(1+k^2/\Lambda^2)^2}}\right\rangle- \\ -2\lambda(1-\overline{\overline{\gamma}})(\tau_1^2+\tau_2^2)=0\,.$$

Оскільки $\tau_1^2+\tau_2^2\geq 0$, $\overline{\overline{\gamma}}\leq 1/2$ і $\lambda=\left|\sqrt{\underline{\lambda}^2+q^2}\right|>0$, то умовою існування SH хвилі є відмінність від нуля параметра Λ ($\Lambda\neq 0$), а також справдження нерівності

$$\left[\left(1+\nu_2\frac{\underline{\lambda}^2}{q^2}\right)\left(1+\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)+2\overline{\overline{\gamma}}\right]\left[\alpha_1-\alpha_2+\nu_1\left(\frac{\tau_1^2}{\alpha_1}+\frac{\tau_2^2}{\alpha_2}\right)\right]+ \\ +\left(1+\nu_2\frac{\underline{\lambda}^2}{q^2}\right)\left(1+\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)\left[\alpha_1+\alpha_2+\nu_1\left(\frac{\tau_1^2}{\alpha_1}-\frac{\tau_2^2}{\alpha_2}\right)\right]\sqrt{1-\frac{4\overline{\overline{\gamma}}k^2}{\Lambda^2(1+k^2/\Lambda^2)^2}}>0.$$

Ця умова визначає частотний діапазон існування поверхневих SH хвиль для конкретного матеріалу.

ВИСНОВКИ

Співвідношення нелокальної теорії деформації твердих тіл, яка враховує взаємозв'язок деформування з локальним зміщенням маси, дають змогу вивчати закономірності поширення SH хвиль (неплоских зсувних хвиль, амплітуда яких експоненціально знижується зі збільшенням віддалі від вільної поверхні тіла) в однорідному ізотропному півпросторі. При цьому задачу слід формулювати у межах градієнтної теорії пружності, яка враховує тензорну природу параметрів, пов'язаних із локальним зміщенням маси. Одержані співвідношення дають змогу у лінійному наближенні аналізувати дисперсійні властивості поверхневих зсувних хвиль і визначати частотний діапазон їхнього існування.

РЕЗЮМЕ. Показано, что в рамках линейной континуальной нелокального типа теории упругости, учитывающей взаимосвязь деформирования с локальным смещением массы, удается описать распространение неплоских поверхностных сдвиговых волн (SH волн) в изотропном полупространстве. Классическая теория упругости не допускает существования таких волн. Упомянутые выше поверхностные волны могут распространяться в полупространстве, если задачу формулировать в рамках теории упругости, учитывающей тензорную природу локального смещения массы. Напряженно-деформированное состояние такого континуума характеризуют тензоры деформации и наведенной массы, являющимися независимыми величинами.

SUMMARY. The existence of anti-plane surface shear wave motions (SH waves) in an isotropic half-space is possible within the framework of a linear continuum non-local theory of elasticity, which takes into account coupled fields of deformation and local mass displacement. Such SH surface waves are not predicted by the classical theory of elasticity. It is shown that the above-mentioned surface waves may exist in a half-space if the problem is analyzed by the theory which assumes the tensorial character of the local displacement of mass. The stress-strained state of such continuum is characterized by independent strain tensor and tensor of induced mass density.

1. *Meissner E.* Elastische Oberflachender mit Dispersion in einem inhomogenen Medium // Vierteljahrsschrift der Naturfirschenden Gesellschaft in Zurich. – 1921. – **66**. – S. 181–195.
2. *Kraut E. A.* Surface elastic waves // Acoustic surface wave and acousto-optic devises. – New York: Optosonic Press, 1971. – P. 18–20.
3. *Bullen K. E., Bolt B. A.* An introduction to the theory of seismology. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – P. 499.
4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
5. *Nowinski J. L.* On the nonlocal aspects of the propagation of Love waves // Int. J. Eng. Sci. – 1984. – **22**. – P. 383–392.
6. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
7. *Ерофеев В. И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 1999. – 328 с.
8. *Mindlin R. D.* Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // J. Elast. – 1972. – **2**, № 4. – P. 217–282.
9. *Nowacki W.* The linear theory of micropolar elasticity. – Wien: Springer-Verlag, 1974. – 44 p.
10. *Vardoulakis I., Georgiadis H. G.* SH surface waves in a homogeneous gradient-elastic half-space with surface energy // J. Elasticity. – 1997. – **47**. – P. 147–165.
11. *Eringen A. C.* Nonlocal continuum field theories. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 376 p.
12. *Математичне* моделювання термомеханічних процесів у пружних тілах із врахуванням локального зміщення маси / Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, В. Ф. Кондрат, О. Р. Грицина // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 45–49.
13. *Марченко И. Г., Неклюдов И. М., Марченко И. И.* Коллективные процессы атомного упорядочения при низкотемпературном осаждении пленок // Доп. НАН України. – 2009. – № 10. – С. 97–103.
14. *Нагаев Э. Л.* Малые металлические частицы // Успехи физических наук. – 1992. – **162**, № 9. – С. 49–124.
15. *Бурак Я., Кондрат В., Грицина О.* Основи локально градієнтної теорії діелектриків. – Ужгород: Поліграфцентр "Ліра", 2011. – 208 с.
16. *Грицина О.* До опису впливу локального зміщення маси на зсувні напруження // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 16. – С. 61–75.

Одержано 08.04.2015