УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ ІЗ ЗАКРІПЛЕНОЮ МЕЖЕЮ ЗА ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ У ПАРАЛЕЛЬНІЙ ДО НЕЇ КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ

Г. С. КІТ, Р. М. АНДРІЙЧУК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

З використанням термопружних потенціалів переміщень і функцій Буссінеска побудовано функції Ґріна задач термопружності для напівбезмежного простору із жорстко закріпленою межею за нульової температури на ній або теплоізоляції. Визначені температура і напруження, зумовлені тепловиділенням у паралельній до межі круговій області, і досліджено їх значення за певних розподілів теплових джерел в області тепловиділення на межі тіла і в її центрі на віддалі від межі.

Ключові слова: *півпростір із закріпленою межею, задача термопружності, функція Ґріна, тепловиділення в круговій області.*

Для розв'язування тривимірних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіл з тріщинами розроблено метод двовимірних граничних інтегральних рівнянь з використанням теорії ньютонівського потенціалу [1]. Цим методом розв'язані [2] задачі теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області. Методи розв'язування осесиметричних задач теплопровідності та термопружності для безмежного тіла за тепловиділення у круговій області відомі [3–5].

Для напівбезмежних тіл під час розв'язування задач термопружності вигідно використовувати функції Ґріна. Такі функції для півпростору, де на вільній від навантаження межі задана нульова температура або теплоізоляція, побудовані з використанням бігармонічних функцій Лява [6]. Пізніше вони використані [7–9] для визначення термопружного стану півпросторів із паралельною або перпендикулярною до їх межі теплоактивною тріщиною, на якій задана температура або тепловий потік.

Під час дослідження напруженого стану тіл з теплоактивними тріщинами проміжним етапом є визначення напружень на місцерозташуванні тріщин, а подальшим – звільнення їх поверхонь від цих напружень.

Нижче побудовані в явному вигляді функції Буссінеска і функції Ґріна задач термопружності для півпростору, межа якого жорстко закріплена за нульової температури на ній або теплоізоляції. Ці функції Ґріна використані під час дослідження напруженого стану тіла за тепловиділення у паралельній до межі круговій області.

Формулювання задачі. Розглянемо півпростір з жорстко закріпленою межею, на якій задана нульова температура або теплоізоляція. Введемо циліндричну систему координат з початком на межі півпростору і віссю Oz, перпендикулярною до неї. На віддалі h від межі діє джерело тепла одиничної потужності. В цій системі координат для $z = 0$ крайові умови мають вигляд

$$T(r,0)=0\,; \quad \partial T(r,z)/\partial z\big|_{z=0}=0\,,\ u_r(r,0)=0\,,\ u_z(r,0)=0\,. \qquad (1)$$

Контактна особа: Р. М. АНДРІЙЧУК, e-mail: andriychukroman@gmail.com

Температурне поле запишемо у вигляді [6]

$$T(r,z)=\frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1(r,z)}+\frac{(-1)^k}{R_2(r,z)}\right),\quad R_{1,2}(r,z)=\sqrt{r^2+(z\mp h)^2}\ ,$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, $k = 1$ відповідає нульовій температурі межі тіла, а $k = 2$ – її теплоізоляції.

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді

$$u(r,z)=\bar{u}(r,z)+\bar{\bar{u}}(r,z)\,,\ \sigma(r,z)=\bar{\sigma}(r,z)+\bar{\bar{\sigma}}(r,z)\,, \tag{2}$$

де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, зумовлений дзеркально розташованими відносно площини $z = 0$ двома джерелами або джерелом і стоком тепла, а другі – переміщення і напруження у півпросторі $z\ge 0$, які забезпечують виконання умов (1).

Напружено-деформований стан безмежного тіла. Зумовлені тепловими джерелами напруження і переміщення у безмежному тілі знаходять за допомогою термопружного потенціалу переміщень $\Phi(r,z)$, який задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta\Phi(r,z)=mT(r,z)\,,\quad m=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\,,$$

де α_t і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона відповідно. Частинним розв’язком цього рівняння є функція

$$\Phi(r,z)=A\Big[R_1(r,z)+(-1)^k R_2(r,z)\Big],\quad A=\frac{m}{8\pi\lambda}\,.$$

Переміщення і напруження в циліндричній системі координат визначають за формулами [6]

$$\bar{u}_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,,\quad \bar{u}_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,;\quad \bar{\sigma}_{rr}=-2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi=-2G\left(mT-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right),$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}=-2G\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi=-2G\left(mT-\frac{\partial\Phi}{r\partial r}\right),$$

$$\bar{\sigma}_{zz}=-2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\Phi=-2G\left(mT-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),\quad \bar{\sigma}_{rz}=2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}\,,$$

де G – модуль зсуву.

Після відповідних обчислень маємо:

$$\bar{u}_r=Ar\left[\frac{1}{R_1}+\frac{(-1)^k}{R_2}\right],\quad \bar{u}_z=A\left[\frac{z-h}{R_1}+(-1)^k\frac{z+h}{R_2}\right]; \tag{3}$$

$$\bar{\sigma}_{rr}=-2GA\left[\frac{1}{R_1}\left(2-\frac{(z-h)^2}{R_1^2}\right)+\frac{(-1)^k}{R_2}\left(2-\frac{(z+h)^2}{R_2^2}\right)\right],$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}=-2GA\left(\frac{1}{R_1}+\frac{(-1)^k}{R_2}\right),\quad \bar{\sigma}_{rz}=-2GAr\left[\frac{z-h}{R_1^3}+(-1)^k\frac{z+h}{R_2^3}\right],$$

$$\bar{\sigma}_{zz}=-2GA\left[\frac{1}{R_1}\left(1+\frac{(z-h)^2}{R_1^2}\right)+\frac{(-1)^k}{R_2}\left(1+\frac{(z+h)^2}{R_2^2}\right)\right]. \qquad (4)$$

Із аналізу цих формул випливає, що ними за дзеркального розташування відносно площини z = 0 джерела і стоку тепла або двох джерел тепла описується також напружено-деформований стан півпростору з джерелом тепла, межа якого перебуває за нульової температури (k = 1) і закріплена гнучкою нерозтяжною плівкою $\left(u_r=0,\ \sigma_{zz}=0,\ \sigma_{rr}=0,\ \sigma_{\varphi\varphi}=0\right)$ або теплоізольована (k = 2) і гладко закріплена $\left(u_z=0,\ \sigma_{rz}=0\right)$.

Визначення переміщень і напружень через функцію Буссінеска. Переміщення $\bar{\bar{u}}(r,z)$ і напруження $\bar{\bar{\sigma}}(r,z)$ визначимо за допомогою функції Буссінеска F, яку подамо у вигляді суми двох гармонічних функцій [10]

$$F(r,z)=\varphi(r,z)+z\psi(r,z),\quad \bar{\bar{u}}_r=\frac{\partial F}{\partial r},\quad \bar{\bar{u}}_z=\frac{\partial F}{\partial z}-4(1-\nu)\psi; \qquad (5)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr}=2G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}-2\nu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),\quad \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi}=2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}-2\nu\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz}=2G\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-2(2-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right],\quad \bar{\bar{\sigma}}_{rz}=2G\left[\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial z}-2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]. \qquad (6)$$

Півпростір з нульовою температурою на жорстко закріпленій межі. Функції $\varphi(r,z)$ і $\psi(r,z)$ беремо у вигляді

$$\varphi(r,z)=B\ln\left[R_2(r,z)+z+h\right],\quad \psi(r,z)=C/R_2(r,z).$$

Використовуючи умову (1), подання (2), (3) для $k=1$ і (5), із системи алгебричних рівнянь визначаємо

$$B=0,\quad C=-\frac{2Ah}{3-4\nu}.$$

З формул (5) і (6) отримаємо:

$$\bar{\bar{u}}_r=\frac{Dhrz}{R_2^3},\quad \bar{\bar{u}}_z=\frac{Dh\left[z(z+h)+(3-4\nu)R_2^2\right]}{R_2^3};\quad D=\frac{2A}{3-4\nu}, \qquad (7)$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{rr}=\frac{2DGh}{R_2^3}\left[-2(1+\nu)z-2\nu h+\frac{3z(z+h)^2}{R_2^2}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{zz}=-\frac{2DGh}{R_2^3}\left[(1-2\nu)z+2(1-\nu)h+\frac{3z(z+h)^2}{R_2^2}\right],$$

$$\bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi}=\frac{2DGh}{R_2^3}\left[(1-2\nu)z-2\nu h\right],\quad \bar{\bar{\sigma}}_{rz}=\frac{-2DGhr}{R_2^3}\left[1-2\nu+\frac{3z(z+h)}{R_2^2}\right]. \qquad (8)$$

Напружено-деформований стан півпростору визначаємо за формулами (2), (3), (4) і (7), (8).

Півпростір з теплоізольованою жорстко закріпленою межею. Тоді

$$\varphi(r,z)=B\left\{z\ln\left[R_2(r,z)+z+h\right]-R_2(r,z)\right\},$$

$$\psi(r,z)=C\left\{\ln\left[R_2(r,z)+z+h\right]-\frac{h}{R_2(r,z)}\right\}.$$

Використовуючи умову (1), подання (2), (3) при $k=2$ і (5), одержуємо:

$$B=2A,\quad C=\frac{2A}{3-4\nu};\quad \overset{=}{u}_r=-\frac{Dr}{R_2^3}\left[(3-4\nu)R_2^2-hz-\frac{4(1-\nu)R_2^2z}{R_2+z+h}\right],$$

$$\overset{=}{u}_z=\frac{Dz\left[h(z+h)+R_2^2\right]}{R_2^3};\tag{9}$$

$$\overset{=}{\sigma}_{rr}=\frac{2DG}{R_2^3}\left\{-2\nu R_2^2+(z+h)\left[z-(1-2\nu)h\right]-\right.$$

$$\left.-2h^2-4hz+\frac{3hz(z+h)^2}{R_2^2}-\frac{4(1-\nu)R_2^2z}{R_2+z+h}\right\},$$

$$\overset{=}{\sigma}_{\varphi\varphi}=-\frac{2DG}{R_2^3}\left\{(3-2\nu)R_2^2-h\left[(1-2\nu)z-2\nu h\right]-\frac{4(1-\nu)R_2^2z}{R_2+z+h}\right\},$$

$$\overset{=}{\sigma}_{zz}=\frac{2DG}{R_2^3}\left\{(1-2\nu)R_2^2-(z+h)\left[z+(1+2\nu)h\right]+2h^2+3hz-\frac{3hz(z+h)^2}{R_2^2}\right\},$$

$$\overset{=}{\sigma}_{rz}=\frac{4DGr}{R_2^3}\left\{(1-\nu)\left[R_2-z+\frac{(z+h)^2}{R_2+z+h}\right]-\frac{z\left[R_2^2+3h(z+h)\right]}{2R_2^2}\right\}.\tag{10}$$

Напружено-деформований стан півпростору з теплоізольованою межею визначаємо за формулами (2), (3), (4) і (9), (10). Вирази для переміщень (7), (9) і напружень (8), (10) збігаються з відомими [11], де вони отримані з використанням бігармонічної функції Лява.

Тепловиділення у паралельній до межі півпростору круговій області. Наведені співвідношення для переміщень і напружень є відповідними функціями Ґріна і можуть бути використані під час визначення у півпросторі термопружного стану, зумовленого нагрівом джерелами тепла, розподіленими по області *S*, обмеженій гладким контуром. Для цього необхідно перенести джерело тепла в точку $(\xi_1,\xi_2,0)$ декартової системи координат з початком в області *S*. У прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ напруження виражаються формулами

$$\sigma_{11}=\sigma_{rr}\cos^2\varphi+\sigma_{\varphi\varphi}\sin^2\varphi,\quad \sigma_{22}=\sigma_{rr}\sin^2\varphi+\sigma_{\varphi\varphi}\cos^2\varphi,\quad \sigma_{33}=\sigma_{zz},$$

$$\sigma_{12}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right)\sin 2\varphi,\quad \sigma_{13}=\sigma_{rz}\cos\varphi,\quad \sigma_{23}=\sigma_{rz}\sin\varphi,$$

де $\cos\varphi=\dfrac{x_1-\xi_1}{r}$, $\sin\varphi=\dfrac{x_2-\xi_2}{r}$, $r=\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2\right]^{1/2}$.

У формули для температури, переміщень і напружень у циліндричній системі координат слід підставити

$$R_1(r,z)=\sqrt{r^2+z^2},\quad R_2(r,z)=\sqrt{r^2+(z+2h)^2}.$$

За відомою функцією Ґріна визначаємо температуру і напруження, викликані розподіленими в області S джерелами тепла з інтенсивністю $w(\xi_1,\xi_2)$, за формулами

$$T^*(x_1,x_2,z)=\iint_S w(\xi_1,\xi_2)\,T(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2\,, \tag{11}$$

$$\sigma_{ij}^*(x_1,x_2,z)=\iint_S w(\xi_1,\xi_2)\,\sigma_{ij}(x_1,x_2,z;\,\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2\,. \tag{12}$$

В осесиметричному випадку, коли область S є кругом радіуса a, температуру вигідно визначати за формулою [3]

$$T(r,z)=\frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty\int_0^a \rho w(\rho) J_0(\eta\rho)\left[e^{-\eta|z|}+(-1)^k e^{-\eta|z+2h|}\right] J_0(\eta r)\,d\rho d\eta\,, \tag{13}$$

де $\rho=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$.

Інтеграли у виразах (11)–(13) можна знайти числовими методами, проте на межі півпростору $(z=0,\ h=0)$ і в центрі області тепловиділення $(z=0,\ r=0)$ їх можна обчислити аналітично.

Числові результати. Визначимо температуру і напруження, коли в круговій області S радіуса a розподіл джерел тепла задамо виразами

$$w(\rho)=\frac{w_0}{\sqrt{1-\rho^2/a^2}}\,;\quad w(\rho)=w_0\,;\quad w(r)=w_0\sqrt{1-\rho^2/a^2}\,. \tag{14}$$

Тоді на межі півпростору, згідно з формулою (13),

$$T_1(r)=\frac{\pi w_0 a}{2\lambda},\quad r\le a\,;\quad T_1(r)=\frac{w_0 a}{\lambda}\arcsin\frac{a}{r},\quad r\ge a\,;$$

$$T_2(r)=\frac{2w_0 a}{\pi\lambda}E\left(\frac{r}{a}\right),\quad r\le a\,;\quad T_2(r)=\frac{w_0 a^2}{2\lambda r}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2,\frac{a^2}{r^2}\right),\quad r\ge a\,;$$

$$T_3(r)=\frac{\pi w_0 a}{4\lambda}\left(1-\frac{r^2}{2a^2}\right),\quad r\le a\,;\quad T_3(r)=\frac{w_0 a^2}{3\lambda r}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{a^2}{r^2}\right),\quad r\ge a\,.$$

Тут E – повний еліптичний інтеграл другого роду, F – гіпергеометрична функція.

В центрі області S для r = 0 маємо:

$$T_1(h)=\frac{w_0 a}{2\lambda}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+4h^2}}\right),\quad T_2(h)=\frac{w_0}{2\lambda}\left(a+\sqrt{a^2+4h^2}-2h\right),$$

$$T_3(h)=\frac{w_0 a}{6\lambda}\left[F\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},1\right)+\frac{a}{\sqrt{a^2+4h^2}}F\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{a^2}{a^2+4h^2}\right)\right].$$

На рис. 1 побудовано графіки, які характеризують зміну температури $\overline{T}_i(r,h)=\dfrac{\lambda T_i(r,h)}{w_0 a}$ на межі півпростору (a) і в центрі області тепловиділення (b).

На межі півпростору напруження

$$\sigma_{rr}(r,0)=\sigma_{\varphi\varphi}(r,0)=-\frac{24GA(1-\nu)}{(3-4\nu)r},\quad \sigma_{zz}(r,0)=-\frac{8GA(1-\nu)}{(3-4\nu)r}\,,$$

а далеко від неї (при $h \to \infty$) у площині тепловиділення $(z = 0)$

$$\sigma_{zz}(r,0) = \sigma_{\varphi\varphi}(r,0) = -2GA/r, \quad \sigma_{rr}(r,0) = -4GA/r,$$

тобто вони пропорційні температурі, тому їх розподіл буде таким, як на рис. 1*a*. При цьому на межі σ_{zz} втричі менші, ніж σ_{rr} і $\sigma_{\varphi\varphi}$, а далеко від неї σ_{rr} вдвічі більші, ніж σ_{zz} і $\sigma_{\varphi\varphi}$. Зображено (рис. 2) розподіл напружень $\bar{\sigma}(h) = \sigma(h)/GA$ у центрі області тепловиділення залежно від віддалі *h* до межі. Під час обчислення приймали $\nu = 0,3$.

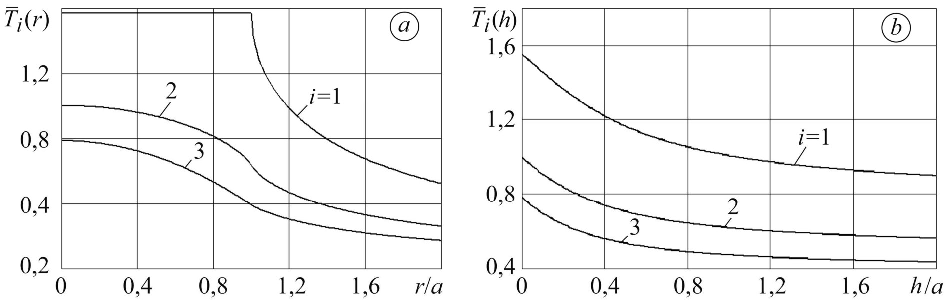

Рис. 1. Температура на межі півпростору (*a*) і в центрі області тепловиділення (*b*) за розподілу джерел тепла (14) для *i* = 1, 2, 3.

Fig. 1. Temperature on the boundary of semi-infinite body (*a*) and in the center of heat-generating domain (*b*) with the distribution of heat sources (14) for *i* = 1, 2, 3.

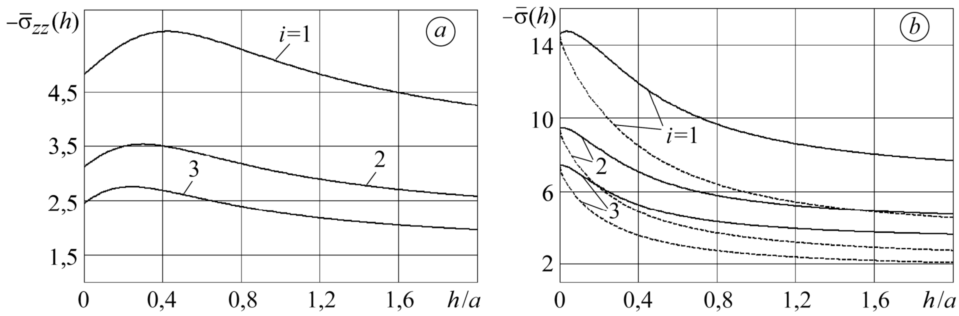

Рис. 2. Напруження σ_{zz} (*a*), σ_{rr} (суцільна лінія) і $\sigma_{\varphi\varphi}$ (штрихова) (*b*) в центрі області тепловиділення за розподілу джерел тепла (14) для *i* = 1, 2, 3.

Fig. 2. Stresses σ_{zz} (*a*), σ_{rr} (solid line) and $\sigma_{\varphi\varphi}$ (dashed line) (*b*) in the center of heat-generating domain with the distribution of heat sources (14) for *i* = 1, 2, 3.

ВИСНОВКИ

Отримано замкнений розв'язок тривимірної задачі термопружності для півпростору, що нагрівається стаціонарним джерелом тепла, із жорстко закріпленою межею за нульової температури на ній або теплоізоляції. Співвідношення для переміщень і напружень, які є відповідними функціями Ґріна, використані для визначення термопружного стану, зумовленого нагрівом півпростору джерелами тепла, розподіленими по паралельній до межі круговій області *S*. Виявлено, що температура і напруження $\sigma_{\varphi\varphi}$ досягають максимального значення за тепловиділення на межі тіла, а напруження σ_{rr} і σ_{zz} – на певній віддалі від межі; на самій межі напруження пропорційні температурі. Формули (11) і (13) можна використати для розв'язування задач електростатики для півпростору із нульовим електричним потенціалом на межі або з її електроізоляцією і тонкою круговою пластиною S, на якій задано електричні заряди $w(\xi_1, \xi_2)$. Функції (11), (13) описують електричний потенціал.

РЕЗЮМЕ. С использованием термоупругих потенциалов перемещений и функций Буссинеска построены функции Грина задач термоупругости для полубесконечного пространства с жестко защемленной границей при нулевой температуре на ней или теплоизоляции. Определены температура и напряжения, обусловленные тепловыделением в параллельной к границе круговой области, и исследованы их значения при определенном распределении тепловых источников в области тепловыделения на границе тела и в ее центре на расстоянии от границы.

SUMMARY. Using the potentials of thermoelastic displacements and Boussinesq's functions Green's functions of thermoelasticity problems for semi-infinite body are presented. Boundary of body is hardly clamped at zero temperature on it or on boundary is insulated. Temperature and stresses caused by heat generation in a parallel to the boundary circular domain are determined, and their values for certain distributions of heat sources in the heat-generating domain on the boundary of the body and in the centre of the domain at the distance of the boundary are analyzed.

1. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 284 с.
2. *Кіт Г. С.* Задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з тепловиділенням на круговій області (тріщині) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 120–128.

   (*Kit H. S.* Problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with heat release on a circular domain (crack) // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, № 2. – P. 141–153.)
3. *Андрійчук Р. М., Кіт Г. С.* Осесиметричне стаціонарне температурне поле у біматеріальному тілі за тепловиділення на круговій області // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2015. – Вип. 13. – С. 58–62.
4. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізольованим дисковим включенням (тріщиною) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 58–70.

   (*Kit H. S. and Sushko O. P.* Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, № 4. – P. 561–577.)
5. *Галазюк В. А., Кіт Г. С.* Осесиметричний напружено-деформований стан тіла з плоскою пеленою теплових джерел // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 141–152.

   (*Halazyuk V. A. and Kit H. S.* Axially symmetric stress-strain state of a body with plane sheet of heat sources // J. Math. Sci. – 2012. – **183**, № 2. – P. 162–176.)
6. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
7. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Термоупругое состояние полупространства с параллельной к его границе теплоактивной трещиной // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 4. – С. 46–54.

   (*Kit H. S. and Sushko O. P.* Axially Thermoelastic state of a half-space having a thermally active crack parallel to its boundary // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, № 4. – P. 395–402.)
8. *Кит Г. С., Сушко О. П.* Напряженное состояние полубесконечного тела при тепловыделении в параллельной к его границе дисковой области // Теорет. и прикл. механика. – 2007. – Вип. 43. – С. 3–8.
9. *Кіт Г. С., Сушко О. П.* Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його краю теплоактивною круговою тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 2. – С. 16–23.

   (*Kit H. S. and Sushko O. P.* Thermoelastic state of a half-space containing a thermally active circular crack perpendicular to its edge // Mater. Sci. – 2005. – **41**, № 2. – P. 150–157.)
10. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
11. *Кіт Г. С., Андрійчук Р. М.* Вплив стаціонарного джерела тепла на напружений стан півпростору з жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 78–86.

Одержано 09.09.2016