

УДК 539.3

ПЛОСКА ТЕРМОПРУЖНА ДЕФОРМАЦІЯ ПРУЖНО ЗЧЕПЛЕНОЇ З ЖОРСТКОЮ ПІВПЛОЩИНОЮ БАГАТОШАРОВОЇ ПЛИТИ

Н. М. АНТОНЕНКО

Запорізький національний технічний університет

Запропоновано спосіб розв'язання плоскої стаціонарної задачі термопружності для багатошарової плити, пружно зчепленої з жорсткою півплощиною, з пружними зв'язками між шарами. Розв'язок ґрунтується на методі функцій податливості з використанням одновимірного інтегрального перетворення Фур'є. Побудовано рекурентні формули для розрахунку функцій податливості, які враховують вплив теплових навантажень та пружні зв'язки між шарами. Для двошарової плити, яка знаходиться під дією теплового навантаження, проаналізовано вплив пружних зв'язків, коефіцієнтів теплового розширення та коефіцієнтів теплопровідності шарів на розподіл напружень на спільній межі шарів.

Ключові слова: *багатошарова плита, пружні зв'язки, матриці податливості, інтегральне перетворення Фур'є, напруження, температура.*

Аеродромні та дорожні покриття, підлоги заводських цехів та елементи інженерних конструкцій, що мають незначну кривизну, можна моделювати з допомогою багатошарових плит. Ці об'єкти зазнають не лише механічних навантажень, але й впливу теплових полів різної природи. Тому привертає увагу сумісна дія механічних та теплових навантажень на напружено-деформований стан (НДС) та розподіл температури в шаруватих конструкціях. Термопружну деформацію таких об'єктів досліджували [1–7] за повного контакту між шарами. Однак у реальних конструкціях між шарами може бути проміжний клейовий шар, який впливає на їх міцність, тому це варто враховувати у розрахунках НДС. Нижче в межах відомої моделі [8] запропоновано спосіб визначення плоского термопружного стану шаруватої плити, пружно зчепленої з жорсткою півплощиною, з пружними зв'язками між шарами. Вважали, що між двома сусідніми шарами існують дотичні (нормальні) пружні зв'язки, якщо різниці горизонтальних (вертикальних) переміщень точок верхньої межі нижнього шару та відповідних точок нижньої межі верхнього шару пропорційні дотичним (нормальним) напруженням на їх межі. Методом функцій податливості отримали розв'язки першої граничної задачі для таких багатошарових основ без урахування впливу теплового поля у [9, 10]. Асимптотичними методами вивчали [11, 12] деформацію шаруватих тіл з пружними зв'язками між шарами. Розв'язано плоску задачу [13] термопружності для багатошарової основи з повним контактом між шарами.

Формулювання задачі. Розглянемо багатошарову плиту, пружно зчеплену з абсолютно жорсткою півплощиною. Під такою плитою розумітимемо пакет із n зчеплених між собою пружних шарів. Плита знаходиться в умовах плоскої термопружної деформації. Матеріал шарів вважаємо однорідним та ізотропним. Кожен шар характеризуємо товщиною h_k , коефіцієнтами Ламе λ_k , μ_k , коефіцієнтом теплопровідності k_{Tk} та приведеним коефіцієнтом теплового розширення

$\alpha_{Tk} = \tilde{\alpha}_{Tk} (3\lambda_k + 2\mu_k) / (\lambda_k + 2\mu_k)$, де $\tilde{\alpha}_{Tk}$ – коефіцієнт теплового розширення матеріалу, $k = \overline{1, n}$. Між шарами плити є пружні зв'язки [13]. Вважатимемо, що на їх спільних межах виконуються умови ідеального теплового контакту. На верхній межі плити відомі напруження та температура. На межі плити та жорсткої півплощини підтримується нульова температура. Необхідно знайти розподіли напружень, переміщень та температури в плиті.

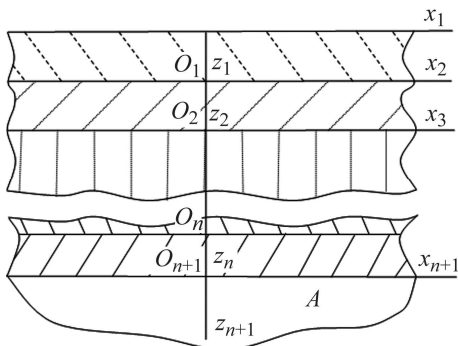


Рис. 1. Багатошарова плита на жорсткій півплощині А.

Fig. 1. Multilayer plate on rigid half-plane A.

Нумеруватимемо шари зверху до низу, починаючи з одиниці. Усі величини, які відносяться до k -го шару, позначатимемо нижнім індексом k . Якщо це не призводитиме до неоднозначності, то індекси опускатимемо. У кожному шарі введемо локальну декартову систему координат $O_k x_k z_k$ ($k = \overline{1, n+1}$) з початком на верхній межі шару так, щоб усі осі $O_k z_k$ усіх систем координат збіглися і були напрямлені вглиб шарів, а осі $O_k x_k$ – паралельні $O_1 x_1$ та збіглися із межами відповідних шарів (рис. 1).

Задачу зведемо до розв'язання системи диференціальних рівнянь для кожного зі шарів плити [14]:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \omega_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial z} + (1 - \omega_k) \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = \alpha_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial z^2} + \omega_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial z} + (1 - \omega_k) \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} = \alpha_{Tk} \frac{\partial T_k}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_k}{\partial z^2} = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

де $T_k = T_k(x, z)$ – температура; $u_k = u_k(x, z)$, $w_k = w_k(x, z)$ – переміщення точок шару в напрямках $O_k x_k$ та $O_k z_k$ відповідно, $\omega_k = \frac{\lambda_k + \mu_k}{\lambda_k + 2\mu_k}$.

Умови на спільних межах шарів з номерами k та $k+1$ такі:

$$\sigma_{z_{k+1}}(x, 0) = \sigma_{z_k}(x, h_k), \quad \tau_{xz_{k+1}}(x, 0) = \tau_{xz_k}(x, h_k),$$

$$w_{k+1}(x, 0) = w_k(x, h_k) + r_k \sigma_{z_k}(x, h_k), \quad u_{k+1}(x, 0) = u_k(x, h_k) + m_k \tau_{xz_k}(x, h_k), \quad (1)$$

$$T_{k+1}(x, 0) = T_k(x, h_k), \quad k_{T_{k+1}} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(x, 0) = k_{T_k} \frac{\partial T_k}{\partial z}(x, h_k), \quad k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де $m_k \geq 0$, $r_k \geq 0$ – коефіцієнти дотичних та нормальних пружних зв'язків відповідно.

Крайові умови

$$\sigma_{z_1}(x, 0) = \sigma(x), \quad \tau_{xz_1}(x, 0) = \tau(x), \quad T_1(x, 0) = f(x), \quad (3)$$

$$w_{n+1}(x, 0) = 0, \quad u_{n+1}(x, 0) = 0, \quad T_{n+1}(x, 0) = 0, \quad (4)$$

де $\sigma(x)$, $\tau(x)$, $f(x)$ – відомі функції.

Вважатимемо, що всі напруження та переміщення задовольняють умови існування одновимірного інтегрального перетворення Фур'є за змінною x (для будь-якого z):

$$\bar{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx, \quad (5)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (6)$$

Метод розв'язання. Для кожного шару (індекс k опускаємо) введемо шість допоміжних функцій $\alpha = \alpha(\xi)$, $\beta = \beta(\xi)$, $\gamma = \gamma(\xi)$, $\delta = \delta(\xi)$, $\eta = \eta(\xi)$, $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$, які пов'язані з трансформантами напружень і переміщень верхньої межі шару та трансформантами функцій, які описують температуру та потік на цій межі:

$$\alpha = \overline{\sigma_z}(\xi, 0), \quad \beta = \mu W(\xi, 0), \quad \gamma = \mu S(\xi, 0), \quad \delta = \frac{-i\xi}{p} \overline{\tau_{xz}}(\xi, 0),$$

$$\eta = \overline{T}(\xi, 0), \quad \varepsilon = \frac{1}{p} \frac{d\overline{T}}{dz}(\xi, 0), \quad (7)$$

де $S = -i\xi \overline{u}(\xi, z)$; $W = p \overline{w}(\xi, z)$, $p = |\xi|$.

У просторі трансформант Фур'є переміщення, напруження та функції, які описують температуру та потік у точках шару, можна подати як лінійні комбінації допоміжних функцій (7) [13]:

$$2\mu S(\xi, z) = pz\omega shpz \alpha + 2[(1-\omega)shpz + pz\omega chpz]\beta + 2[\omega pzshpz + chpz]\gamma +$$

$$+ [(2-\omega)shpz + \omega pzchpz]\delta - \alpha_T \mu pzshpz \eta + \alpha_T \mu [shpz - pzchpz]\varepsilon, \quad (8)$$

$$2\mu W(\xi, z) = [(2-\omega)shpz - \omega pzchpz]\alpha + 2[-\omega pzshpz + chpz]\beta + 2[(1-\omega)shpz -$$

$$-\omega pzchpz]\gamma - \omega pzshpz \delta + \alpha_T \mu [shpz + pzchpz]\eta + \alpha_T \mu pzshpz \varepsilon, \quad (9)$$

$$\overline{\sigma_z}(\xi, z) = [-\omega pzshpz + chpz]\alpha + 2\omega [shpz - pzchpz]\beta - 2\omega pzshpz \gamma -$$

$$- [(1-\omega)shpz + \omega pzchpz]\delta + \alpha_T \mu \dots pzshpz \eta + \alpha_T \mu [-shpz + pzchpz]\varepsilon, \quad (10)$$

$$-\frac{i\xi}{p} \overline{\tau_{xz}}(\xi, z) = [-(1-\omega)shpz + \omega pzchpz]\alpha + 2\omega \dots pzshpz \beta + 2\omega [shpz + pzchpz]\gamma +$$

$$+ [\omega pzshpz + chpz]\delta - \alpha_T \mu [shpz + pzchpz]\eta - \alpha_T \mu pzshpz \varepsilon, \quad (11)$$

$$\overline{\sigma_x}(\xi, z) = [\omega pzshpz + (2\omega-1)chpz]\alpha + 2\omega [shpz + pzchpz]\beta + 2\omega [pzshpz + 2chpz]\gamma +$$

$$+ [(1+\omega)shpz + \omega pzchpz]\delta - \alpha_T \mu [pzshpz + 2chpz]\eta - \alpha_T \mu [shpz + pzchpz]\varepsilon, \quad (12)$$

$$\overline{T}(\xi, z) = chpz \eta + shpz \varepsilon. \quad (13)$$

Задачу звели до знаходження шести допоміжних функцій (7) для кожного шару плити.

У праці [13] отримали, що

$$\eta_{k+1} = (C_k - D_k S_k) \eta_k, \quad (14)$$

а функції η_k та ε_k пов'язані співвідношенням

$$\varepsilon_k = -D_k \eta_k, \quad (15)$$

де

$$D_k = \frac{D_{k+1} C_k + \Delta_k S_k}{D_{k+1} S_k + \Delta_k C_k}, \quad (16)$$

$$S_k = shp_k, \quad C_k = chp_k, \quad p_k = ph_k, \quad \Delta_k = \frac{k_{Tk}}{k_{Tk+1}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad D_n = cthp_n. \quad (17)$$

Функції D_k (16), (17) назвали функціями податливості термопружної основи.

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують решту допоміжних функцій сусідніх шарів плити. Застосуємо до умов (1) пряме інтегральне перетворення Фур'є (5) та подамо їх так:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{zk+1}(\xi, 0) &= \bar{\sigma}_{zk}(\xi, h_k), \\
\mu_{k+1}W_{k+1}(\xi, 0) &= \mu_{k+1}W_k(\xi, h_k) + r_k p \mu_{k+1} \bar{\sigma}_{zk}(\xi, h_k), \\
\mu_{k+1}S_{k+1}(\xi, 0) &= \mu_{k+1}S_k(\xi, h_k) + m_k p \mu_{k+1} \tau_{xz k}(\xi, h_k), \\
\frac{-i\xi}{p} \tau_{xz k+1}(\xi, 0) &= \frac{-i\xi}{p} \tau_{xz k}(\xi, h_k).
\end{aligned}$$

Застосуємо до лівих частин останніх співвідношень формули (7) та запишемо їх праві частини у вигляді лінійних комбінацій допоміжних функцій, використовуючи вирази (8)–(11). Отримані рівності подамо у матричному вигляді:

$$\bar{\alpha}_{k+1} = M_{11k} \bar{\alpha}_k + M_{12k} \bar{\beta}_k + M_{13k} \eta_k, \quad (18)$$

$$\bar{\beta}_{k+1} = (M_{21k} + N M_{11k}) \bar{\alpha}_k + (M_{22k} + N M_{12k}) \bar{\beta}_k + (M_{23k} + N M_{13k}) \eta_k, \quad (19)$$

де $\bar{\mu}_k = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}$; $S_k = \text{sh } p_k$; $C_k = \text{ch } p_k$; $p_k = p h_k$; $\bar{\alpha}_k = (\alpha_k, \delta_k)^t$; $\bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k)^t$;

$$N = \begin{pmatrix} r_k p \mu_{k+1} & 0 \\ 0 & m_k p \mu_{k+1} \end{pmatrix}; \quad M_{11k} = \begin{pmatrix} C_k - \omega_k p_k S_k & -(1 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k \\ -(1 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k & C_k + \omega_k p_k S_k \end{pmatrix};$$

$$M_{12k} = \begin{pmatrix} 2\omega_k (S_k - p_k C_k) & -2\omega_k p_k S_k \\ 2\omega_k p_k S_k & 2\omega_k (S_k + p_k C_k) \end{pmatrix};$$

$$M_{21k} = \frac{1}{2\bar{\mu}_k} \begin{pmatrix} (2 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k & -\omega_k p_k S_k \\ \omega_k p_k S_k & (2 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k \end{pmatrix};$$

$$M_{22k} = \frac{1}{\bar{\mu}_k} \begin{pmatrix} -\omega_k p_k S_k + C_k & (1 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k \\ (1 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k & \omega_k p_k S_k + C_k \end{pmatrix};$$

$$M_{13k} = \alpha_{T k} \mu_k \begin{pmatrix} p_k S_k + D_k [S_k - p_k C_k] \\ -(S_k + p_k C_k) + D_k p_k S_k \end{pmatrix};$$

$$M_{23k} = \frac{\mu_{k+1} \alpha_{T k}}{2} \begin{pmatrix} S_k + p_k C_k - D_k p_k S_k \\ -p_k S_k - D_k [S_k - p_k C_k] \end{pmatrix}.$$

Оскільки півплощина абсолютно жорстка, то будь-яким напруженням на її межі відповідають нульові переміщення, тобто $\bar{\beta}_{n+1} = \bar{0}$. Зі співвідношення (19) для $k = n$ одержимо:

$$(M_{21n} + N M_{11n}) \bar{\alpha}_n + (M_{22n} + N M_{12n}) \bar{\beta}_n + (M_{23n} + N M_{13n}) \eta_n = \bar{0},$$

$$\bar{\beta}_n = -(M_{22n} + N M_{12n})^{-1} ((M_{21n} + N M_{11n}) \bar{\alpha}_n + (M_{23n} + N M_{13n}) \eta_n). \quad (20)$$

Розглянемо шар з номером k . Виразимо, використавши формули (14), (18), (19), величини $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$, η_n послідовно через $\bar{\alpha}_{n-1}$, $\bar{\beta}_{n-1}$, η_{n-1} , потім – через $\bar{\alpha}_{n-2}$, $\bar{\beta}_{n-2}$, η_{n-2} , і т.д. – до $\bar{\alpha}_k$, $\bar{\beta}_k$, η_k . Вирази для $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$, η_n підставимо в формулу (20) і одержимо співвідношення, яке пов'язує допоміжні функції k -го шару:

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + B_k \eta_k, \quad (21)$$

де матриці A_k та B_k називатимемо матрицями податливості, а їх елементи – функціями податливості k -го шару термопружної плити.

Зі співвідношень (20) та (21) для $k = n$ дістанемо матриці податливості нижнього шару плити:

$$A_n = -(M_{22n} + N M_{12n})^{-1} (M_{21n} + N M_{11n}), \quad (22)$$

$$B_n = -(M_{22n} + N M_{12n})^{-1} (M_{23n} + N M_{13n}). \quad (23)$$

Побудуємо рекурентні формули, які пов'язують матриці податливості сусідніх шарів плити. Обчислимо $\bar{\beta}_{k+1}$ двома способами. З одного боку, з формул (21), (18) та (14)

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} &= A_{k+1} \bar{\alpha}_{k+1} + B_{k+1} \eta_{k+1} = \\ &= A_{k+1} (M_{11k} + M_{12k} A_k) \bar{\alpha}_k + (A_{k+1} M_{12k} B_k + A_{k+1} M_{13k} + B_{k+1} (C_k - D_k S_k)) \eta_k, \end{aligned} \quad (24)$$

а з іншого – з формул (19) та (21)

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} &= (M_{21k} + N M_{11k} + (M_{22k} + N M_{12k}) A_k) \bar{\alpha}_k + \\ &+ ((M_{22k} + N M_{12k}) B_k + M_{23k} + N M_{13k}) \eta_k. \end{aligned}$$

Прирівнюючи праві частини останніх рівностей, одержимо рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості сусідніх шарів:

$$A_k = (A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} (M_{21k} + N M_{11k} - A_{k+1} M_{11k}), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} B_k &= (A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} (M_{23k} + N M_{13k} - A_{k+1} M_{13k}) - \\ &- (A_{k+1} M_{12k} - M_{22k} - N M_{12k})^{-1} B_{k+1} (C_k - D_k S_k), \quad k = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Побудуємо формули, за якими обчислимо трійку допоміжних функцій α , δ , η для $k+1$ -го шару, якщо ця трійка відома для k -го шару. Для цього вираз (21) підставимо в формулу (18):

$$\bar{\alpha}_{k+1} = (M_{11k} + M_{12k} A_k) \bar{\alpha}_k + (M_{12k} B_k + M_{13k}) \eta_k. \quad (27)$$

Отже, маючи функції податливості для нижнього шару, можна за формулами (16), (25) та (26) знайти їх для інших шарів. Далі з крайових умов знаходимо три допоміжні функції α_1 , δ_1 , η_1 , а за формулами (14), (15), (27) та (21) – решту. Для пошуку напружень, переміщень та температури в k -му шарі плити ці допоміжні функції підставляємо у вирази для трансформант напружень, переміщень, температури (8)–(13) та застосовуємо до них обернене перетворення Фур'є (6). Зауважимо, що якщо багатошарова плита знаходиться під дією лише механічних навантажень, то рекурентні співвідношення (22), (23), (25) та (26) з точністю до позначень збігаються з відомими формулами [10]. А якщо пружні зв'язки відсутні, тобто $r_k = m_k = 0$ – то з формулами, побудованими в праці [13].

Числові дослідження. Розраховували для двошарової плити з параметрами шарів $h_1 = h_2 = h$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\omega_1 = \omega_2 = 0,8$ за крайових умов: $T_1(x, 0) = \begin{cases} T_0, & |x| < h, \\ 0, & |x| \geq h, \end{cases}$ $\sigma_{z1}(x, 0) = 0$, $\tau_{xz1}(x, 0) = 0$. Знайшли відносні нормальні $\sigma_{z1}^* = 10\sigma_{z1}(x, h)/(\alpha_{T1} T_0 \mu_1)$ (рис. 2a) та дотичні $\tau_{xz1}^* = 10\tau_{xz1}(x, h)/(\alpha_{T1} T_0 \mu_1)$ (рис. 2b) напруження вздовж спільної межі двошарової плити для різних відношень коефіцієнтів теплопровідності шарів: $\Delta = k_{T1}/k_{T2}$ для $\tilde{\Delta} = \alpha_{T1}/\alpha_{T2} = 1$. Побудували (рис. 2c, d) аналогічні графіки для різних відношень коефіцієнтів теплового розширення шарів $\tilde{\Delta} = \alpha_{T1}/\alpha_{T2}$, $\Delta = 1$.

Із аналізу отриманих результатів можна зробити такі висновки:

- пружні зв'язки призводять до зменшення напружень на спільній межі шарів;
- якщо коефіцієнт теплопровідності верхнього шару суттєво більший, ніж нижнього, то нормальні напруження $\sigma_{z1}(x, h)$ поблизу лінії дії теплового поля є стискальні (рис. 2a);
- якщо коефіцієнт теплового розширення нижнього шару суттєво більший, ніж верхнього, то нормальні $\sigma_{z1}(x, h)$ і дотичні $\tau_{xz1}(x, h)$ напруження змінюють

знак (рис. 2c, d);

– зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності відчутніше змінюється розподіл нормальних напружень $\sigma_{z1}(x, h)$, ніж дотичних $\tau_{xz1}(x, h)$ (рис. 2a, b);

– зі збільшенням коефіцієнта теплового розширення верхнього шару розподіл напружень $\sigma_{z1}(x, h)$ та $\tau_{xz1}(x, h)$ змінюється сильніше, ніж нижнього.

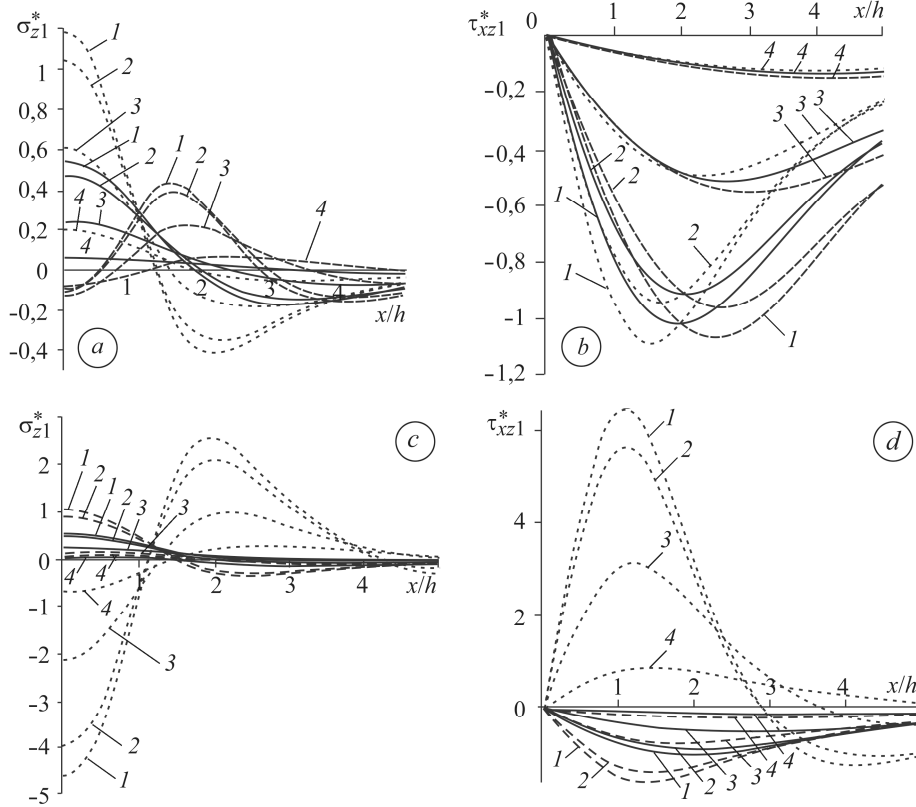


Рис. 2. Відносні нормальні σ_{z1}^* та дотичні τ_{xz1}^* напруження на спільній межі шарів двошарової плити для $\tilde{\Delta} = 1$ та різних теплопровідностей шарів (a, b), а також для $\Delta = 1$ та різних їх теплових розширень (c, d): суцільні лінії – $\tilde{\Delta}, \Delta = 1$; штрихові – 10 і пунктирні – 0,1; 1 – $m_i = r_i = 0$; 2 – 0,1; 3 – 1; 4 – 10, $i = 1, 2$.

Fig. 2. Normal σ_{z1}^* and tangential stresses τ_{xz1}^* on the common boundary of two-layer plate for $\tilde{\Delta} = 1$ and different thermal conductivity of layers (a, b), for $\Delta = 1$ and their different thermal expansions (c, d): solid lines – $\tilde{\Delta}, \Delta = 1$; dashed – 10 and dotted – 0.1; 1 – $m_i = r_i = 0$; 2 – 0.1; 3 – 1; 4 – 10, $i = 1, 2$.

Оскільки, коефіцієнти пружних зв'язків не входять у формули (13)–(17) для розрахунку температури в шарах плити, то можна припустити, що на межах шарів виконуються умови ідеального теплового контакту, а тому пружні зв'язки не впливають на розподіл температури в плиті.

ВИСНОВКИ

Метод функцій податливості розповсюджено на стаціонарну задачу про визначення плоского термопружного стану багатшарової плити, пружно зчепленої з жорсткою півплощиною, з пружними зв'язками між шарами. Побудовано формули, які дають можливість визначати напруження, переміщення та температуру в будь-якій точці плити. Для двошарової плити досліджено вплив коефіцієнтів пружних

зв'язків, коефіцієнтів теплового розширення та теплопровідності шарів на розподіл нормальних та дотичних напружень на спільній межі шарів. Поданий спосіб визначення напружено-деформованого стану багатошарових плит з пружними зв'язками між шарами дає можливість детально проаналізувати вплив механічних та температурних характеристик шарів на розподіл напружень і переміщень у шарах плити з пружними зв'язками між ними з будь-якою скінченною їх кількістю.

РЕЗЮМЕ. Предложен способ решения стационарной плоской задачи термоупругости для многослойной плиты, упруго сцепленной с жесткой полуплоскостью, с упругими связями между слоями. Для решения задачи использованы одномерное интегральное преобразование Фурье и идея метода функций податливости. Построены рекуррентные соотношения для вычисления вспомогательных функций и функций податливости, которые учитывают влияние теплового поля и упругие связи между слоями плиты. Для двухслойной плиты, которая находится под действием тепловой нагрузки, проанализировано влияние упругих связей и тепловых характеристик слоев на распределение напряжений на их общей границе.

SUMMARY. The solution method of stationary plane thermoelastic problem of multilayer plate with elastic links between its layers is proposed. The technique is based on the compliance functions method. Fourier integral transformation is used. The recurrence formulas for calculation of the auxiliary and compliance functions are built. For a two-layer plate subjected to thermal load applied to the upper boundary of the plate, the influence of elastic links, thermal expansion and thermal conductivity coefficients on the distribution of normal and tangential stresses on its common boundary is investigated.

1. *Chien-Ching Ma and Shin-Wen Chang.* Analytical exact solutions of heat conduction problems for anisotropic multi-layered media // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 2004. – **47**, № 8–9. – P. 1643–1655.
2. *Benjeddou A. and Orlando Andrianarison O.* A heat mixed variational theorem for thermoelastic multilayered composites // *Comp. and Struct.* – 2006. – **84**, № 19–20. – 2006. – P. 1247–1255.
3. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
4. *Brischetto S, and Carrera E.* Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates // *Comp. Struct.* – 2010. – **92**, № 8. – P. 1793–1812.
5. *Амтеков А. В., Волков И. К., Тверская Е. С.* Температурное поле многослойного полупространства при неидеальном тепловом контакте между слоями // *Изв. РАН. Энергетика.* – 2010. – № 3. – С. 83–91.
6. *Chien-Ching Ma and Yi-Tzu Chen.* Theoretical analysis of heat conduction problems of nonhomogeneous functionally graded materials for a layer sandwiched between two half-planes // *Acta Mech.* – 2011. – **221**, № 3. – P. 223–237.
7. *Cetkovic M.* Thermo-mechanical bending of laminated composite and sandwich plates using layerwise displacement model // *Comp. Struct.* – 2015. – **125**. – P. 388–399.
8. *Jones J. P. and Whitter J. S.* Waves at a flexibly bonded interface // *Trans. ASME; Ser. E. J. Appl. Mech.* – 1967. – **34**, № 4. – P. 178–183.
9. *Годес Ю. Я.* Функции податливости многослойного основания с упругими связями между слоями // *Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости.* – Днепропетровск, 1987. – С. 92–97.
10. *Антоненко Н. М., Величко І. Г.* Узагальнення методу функцій податливості на випадок плоскої деформації багатошарової основи при наявності дотичних і нормальних пружних зв'язків між шарами // *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* – 2010. – Вип. 14. – **1**, № 5. – С. 39–45.
11. *Агаловян Л. А., Хачатрян А. М.* О двух задачах анизотропной двухслойной полосы при неполном контакте между слоями // *Изв. НАН Армении. Механика.* – 1997. – **50**, № 3–4. – С. 34–41.
12. *Барсегян В. М., Хачатрян А. М.* Об асимптотическом решении смешанной краевой задачи для трехслойной полосы при различных условиях контакта слоев // *Изв. НАН Армении. Механика.* – 2001. – **54**, № 1. – С. 17–25.
13. *Величко І. Г., Ткаченко І. Г.* Плоска термопружна деформація багатошарової основи // *Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка.* – 2004. – **1**. – Вип. 8. – С. 154–161.
14. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – К.: Вищ. шк., 1975. – 216 с.

Одержано 04.02.2016