

УДК 539.374

## МОДЕЛЮВАННЯ НЕЗВОРОТНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ҐРУНТІВ І МАСИВІВ ГІРСЬКИХ ПОРІД МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Л. М. ЗАХАРОВА

*Інститут фізики гірничих процесів НАН України, Дніпро*

Проаналізовано існуючі алгоритми, моделі і схеми обчислення і доведено перевагу моделі Кундала для дослідження незворотних процесів зрушення й деформування ґрунтів і масивів гірських порід, яка передбачає циклічну у часі схему обчислення інкрементальних швидкостей деформування за допомогою другого закону Ньютона й напружень та деформацій на основі узагальненого закону Гука та моделі міцності Кулона–Мора, модифікованої введенням границі міцності на розтяг. Дисипація ж кінетичної енергії, що виникає під дією тимчасового дисбалансу сил, реалізується шляхом введення демпфувальних сил, які пропорційні активним силам та швидкостям деформування. Новизна результатів дослідження полягає у поєднанні вказаних алгоритмів і моделей на основі скінченно-різницевої схеми обчислень, яка забезпечує достовірний розрахунок великих незворотних деформацій гірських порід, що дасть змогу відтворити реальну історію їх зрушень і деформацій за границею міцності. Практичну значущість досліджень підтверджено порівнянням результатів моделювання з даними геодезичних спостережень зсувів ґрунтових схилів.

**Ключові слова:** незворотні деформації, другий закон Ньютона, асоційований закон текучості, модель міцності Кулона–Мора, дисипація кінетичної енергії, метод скінченних різниць, гірські породи.

Деформування реальних ґрунтів і масивів гірських порід нерозривно пов'язано з незворотними переміщеннями й деформаціями, які відіграють важливу роль у їх еволюції. Суто пружний стан ґрунтів й гірських масивів у реальності реалізується рідко, а залежність між напруженнями й деформаціями зазвичай нелінійна. На сьогодні розроблено десятки алгоритмів для розрахунку незворотних зрушень і деформацій масивів гірських порід. Найбільшу популярність отримали метод скінченних [1, 2] та граничних елементів [3], а також скінченно-різницеві алгоритми розв'язку систем диференціальних рівнянь [4]. Наразі розроблено низку алгоритмів, які комбінують вказані методи [5], або розвивають їх [6]. Проте кожен алгоритм має свої переваги й недоліки, які варто враховувати під час вибору раціональної моделі поведінки реальних ґрунтів й гірських порід. Отже, мета роботи – вибрати й обґрунтувати такий алгоритм й модель, які б найадекватніше могли описати нелінійне деформування ґрунтів та масивів гірських порід за границею їх міцності.

**Вибір й обґрунтування алгоритму і моделі.** Незворотність деформування ґрунтів й гірських порід характеризується не тільки переходом матеріалу через границю міцності, але й суттєвою залежністю кінцевих результатів його випробувань від шляху навантаження. Наочно продемонстровано і доведено [7], що залежно від шляху навантаження однієї й тієї ж породи границя міцності може змінюватись майже удвічі, а деформації ще більше. Встановлено [8], що параметри незворотного деформування зразків осадових вуглевісних порід залежать не тільки від шляху навантаження зразків під час їх випробувань, але й від швидкості

навантаження. Також шлях навантаження й швидкість деформування можуть суттєво змінювати патерни дисипативних структур, які виникають у масиві гірських порід під час його незворотних зрушень й деформування [9]. Отже, важливо, щоб алгоритм і модель враховували як шлях навантаження, так й час незворотних процесів.

Незважаючи на те, що фактично системи рівнянь у методах скінченних елементів (МСЕ) і різниць (МСР) однакові, традиційно склалось так, що МСЕ програми формують узагальнену матрицю жорсткості [2], тоді як для МСР вигідніше регенерувати систему диференціальних рівнянь на кожному кроці обчислень. Як показала практика, це дозволило адекватно моделювати й відслідковувати шлях навантаження моделі, а отже, й відображати історію поведінки моделі ґрунту або гірського масиву, яка максимально відповідає дійсності.

Раніше запропоновано [10] просту послідовність обчислень незворотних зрушень і деформацій масиву у вигляді двох законів: Ньютона й Гука. Саме такий підхід дає змогу отримувати стійкі, однозначні розв'язки для систем, які характеризуються фізичною нестабільністю. Після руйнування певної ділянки ґрунту рівновага порушується і це повинно відображатись моделлю як об'єктивно існуючий процес, який завжди супроводжує порушення статичної рівноваги гірського масиву. Оскільки всі моделі Кундала базуються на другому законі Ньютона, який враховує інерційні сили, то вони безосередньо відображають генерацію кінетичної енергії і її подальшу дисипацію.

Загальна циклічна схема обчислень напружень і деформацій у моделях Кундала така:

Розв'язок рівнянь руху (другий закон Ньютона) → обчислення нових швидкостей й зміщень → врахування залежності між напруженнями й деформаціями (узагальнений закон Гука й модель міцності) → обчислення нових напружень й сил.

Спочатку використовують рівняння руху, результатом яких є нові швидкості й переміщення складових елементів моделі. Потім обчислюють темпи деформацій й знаходять нові напруження. Такий цикл відповідає одному кроку у часі. Важливо, що кожен етап схеми оновлює свої змінні у точках скінченно-різницевої моделі на основі уже відомих значень, які залишаються незмінними доки він активний. Отже, нові напруження, які обчислюють за залежністю між напруженнями і деформаціями, не впливають на швидкості, обчислені за рівняннями руху. Таке припущення цілком обґрунтоване, якщо приріст або крок у часі прийняти достатньо малим. Це узгоджується з реальною фізикою розповсюдження сейсмічних хвиль або тріщин у твердому тілі, швидкість яких є скінченною.

Одною з головних переваг такої схеми розрахунків є відсутність необхідності ітераційного обчислення напружень і деформацій після переходу ґрунту чи масиву гірських порід у позамежовий стан. Оскільки в МСР немає необхідності формувати глобальну матрицю жорсткості, то легко вирішується проблема оновлення координат точок різницевої сітки на кожному кроці приросту часу, що автоматично дає змогу моделювати у режимі великих деформацій, коли їх амплітуда становить не частку процента, а сотні процентів. Це є також суттєвою перевагою методу для моделювання незворотних зміщень і зсувів ґрунту й масивів гірських порід, які на кілька порядків перевищують пружні переміщення. Отже, модель Кундала й МСР є найприйнятнішим алгоритмом для вивчення цих процесів.

**Обґрунтування моделі міцності.** Під час моделювання нелінійної поведінки твердого тіла на сьогодні найбільш розробленим і апробованим є асоційований (з умовою пластичності) закон текучості [11]:

$$\Delta \varepsilon_i^p = \lambda \partial g / \partial \sigma_i,$$

де  $\Delta \varepsilon_i^p$  – компонента приросту пластичної деформації;  $\lambda$  – стала;  $g$  – пластичний потенціал;  $\sigma_i$  – компоненти напружень.

Повна деформація розкладається на пружну (зворотну) й пластичну (незворотну)  $\Delta \varepsilon_i = \Delta \varepsilon_i^e + \Delta \varepsilon_i^p$ , причому  $\Delta \varepsilon_i^e$  визначають згідно з узагальненим законом Гука.

Закон текучості визначає напрямок приросту пластичної деформації як нормаль до потенційної поверхні  $g(\sigma_n) = \text{const}$ . Коли напруження перевищують допустимі і умови міцності твердого тіла порушуються, поточні напруження зменшують відповідно до залежності

$$\sigma'_i = \sigma_i - \lambda S_i (\partial g / \partial \sigma_i),$$

де  $\sigma'_i$  – нові або скориговані компоненти напруження після обчислення інкрементальних пружних компонент напружень у момент часу  $t + \Delta t$  і порівняння їх за законом текучості;  $S_i (\partial g / \partial \sigma_i)$  – інкрементальні напруження, які отримують через узагальнений закон Гука для пружного середовища.

Згідно з досвідом, міцність найбільш представницької групи ґрунтів та гірських порід адекватно описують за законом Кулона–Мора (рис. 1):

$$f^s = \sigma_1 - \sigma_3 N \varphi + 2c \sqrt{N \varphi},$$

причому  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ , а

$$N \varphi = (1 + \sin(\varphi)) / (1 - \sin(\varphi)),$$

де  $\varphi$  – кут внутрішнього тертя;  $c$  – зчеплення.

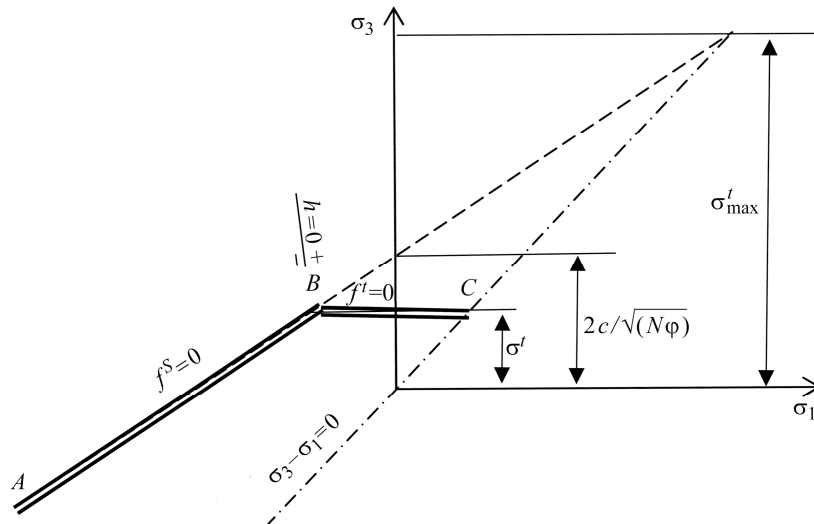


Рис. 1. Модель міцності ґрунтів й гірських порід [10, 12].

Fig. 1. Combined constitutive model of ground and rock mass [10, 12].

На ділянці від  $A$  до  $B$  (рис. 1) рівняння поверхні пластичності описують за законом Кулона–Мора і воно має вигляд  $f^s = 0$ . Правіше, на ділянці від  $B$  до  $C$ , використовують рівняння поверхні пластичності у вигляді

$$f^t = \sigma_3 - \sigma^t = 0,$$

оскільки розтягувальні нормальні напруження не можуть перевищувати границі міцності порід та ґрунтів на розтяг  $\sigma^t$ , яка, як відомо, на відміну від металів є на порядок менша за границю міцності на стиск. Отже, границя міцності породи на розтяг не може перевищити напруження  $\sigma_3$  у точці перетину прямої  $f^s = 0$  і  $\sigma_1 = \sigma_3$  у площині  $f(\sigma_1, \sigma_3)$ , хоча максимальне значення розтягувальних напружень може бути  $\sigma_{\max}^t = c / \operatorname{tg} \varphi$ .

Таким чином, потенційну функцію пластичності описують для ґрунтів і гірських порід функціями  $g^s$  і  $g^t$ , які використовують для визначення моменту пластичної текучості на зсув та розтяг відповідно. До того ж функція  $g^s$  відповідає неасоційованому закону пластичності, оскільки об'єм ґрунту або породи збільшується під час деформування за границею міцності. Отже, потенціал пластичності на ділянці  $BC$  має вигляд

$$g^s = \sigma_1 - \sigma_3 N_\psi,$$

де  $\psi$  – кут дилатансії, який коливається у межах від 1 до 15°, а

$$N_\psi = (1 + \sin \psi) / (1 - \sin \psi).$$

Функція  $g^t$  відповідає асоційованому закону і має вигляд  $g^t = -\sigma_3$ .

Вибирають відповідний закон за допомогою умови  $h(\sigma_1, \sigma_3) = 0$ , яка є діагоналлю між функціями  $f^s = 0$  і  $f^t = 0$  у  $(\sigma_1, \sigma_3)$ -площині. Рівняння функції таке:

$$h = \sigma_3 - \sigma_t + a^P (\sigma_1 - \sigma^P),$$

де  $a^P = \sqrt{(1 + N_\phi^2) + N_\phi \sigma^P} = \sigma^t N_\phi - 2c \sqrt{N_\phi}$ .

**Моделювання дисипації кінетичної енергії.** Згасання дисбалансу внутрішніх сил у системі відбувається під дією локальних сил демпфування дисбалансу активних сил. Сили демпфування  $\mathcal{F}$  мають протилежний знак, пропорційні активним силам  $F$ , масі  $M$  й швидкості руху локальних ділянок системи, яка моделюється [10]

$$F_i^l + \mathcal{F}_i^l = M^l \left( \frac{dv_i}{dt} \right),$$

$$\mathcal{F}_i^l = -0,8 | F_i^l | \operatorname{sign} (v_\downarrow i^l).$$

Індекс  $l$  вказує на номер вузла скінченно-різницевої сітки.

Перевагою такого способу є те, що демпфується тільки рух з прискоренням, тобто фіктивні демпфувальні сили не виникають; константа пропорційності стала й безрозмірна; демпфування є незалежне від частоти, а отже, області системи, що мають різні власні періоди коливання, демпфуються однаково й рівномірно. Саме це дає змогу змоделювати дисипативні системи у масиві гірських порід, який зрушується незворотно [9].

**Приклад моделювання зсуву похилої ґрунтової поверхні.** Зсуви ґрунту – поширене й небезпечне явище в Україні, яке призводить до масштабних економічних збитків. Зсуви розповсюджені на схилах річок (наприклад, Дніпра), узбережжі Азовського та Чорного морів, Карпатах. Моделювали зсув для умов типових зсувів Приазов'я.

За результатами випробувань ґрунту встановили, що модуль об'ємного стиску  $2 \cdot 10^8$  Па, модуль зсуву  $1 \cdot 10^8$  МПа, кут внутрішнього тертя 20°, зчеплення  $1 \cdot 10^4$  Па, границя міцності на розтяг  $1 \cdot 10^3$  Па. Тривимірна модель масиву (рис. 2а) має такі

розміри: ширина 40 м, довжина 80 м і висота 40 м. Кут нахилу ґрунтової поверхні  $50^\circ$ . Розрахункову схему розбили на 2460 зон і 3094 вузлів скінченно-різницевої сітки. Щільність ґрунту  $2300 \text{ kg/m}^3$ . Крайові умови такі: на усіх вертикальних стінках моделі зміщення по нормалі дорівнювали нулю, а на дні моделі усі три компоненти зміщень фіксували. Верхня (земна) поверхня і ґрунтовий схил вільні від будь-яких напружень.

Калібрування моделі, згідно з результатами геодезичних спостережень за розвитком зсувів, показало, що тривалість одного модельного циклу відповідала 5,6 h. На рис. 3с побудований графік зсуву характерної точки ґрунтового схилу, за результатами геометричного нівелювання й моніторингу відстані вказаної точки від опорного пункту, що закладений поза межею впливу зсуву на земну поверхню. Геодезичні вимірювання виконували у літній період упродовж трьох років. Орієнтовно визначили, що першу сесію моніторингу виконували 10 років після початку розвитку зсуву.

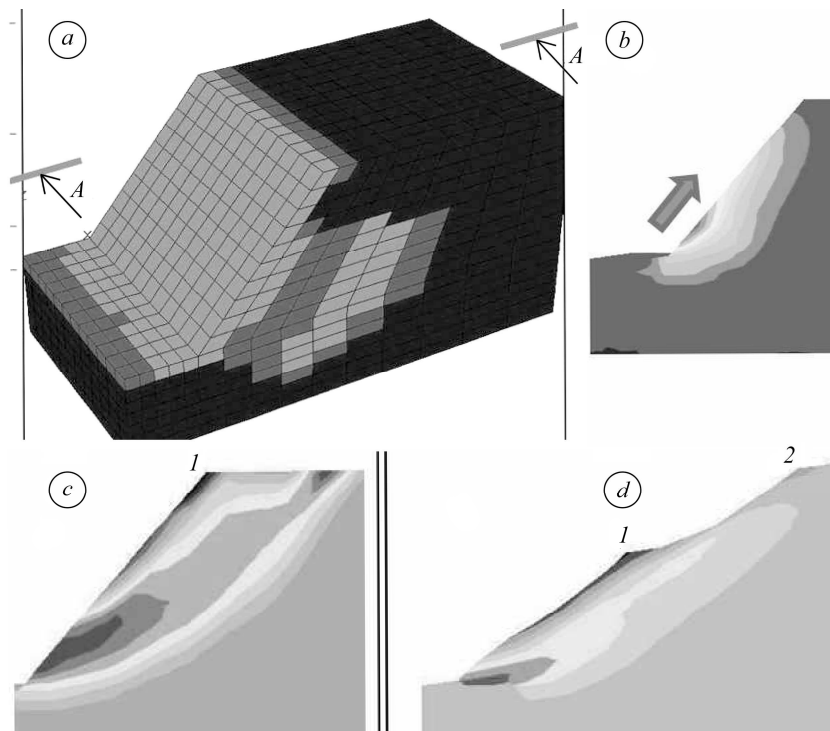


Рис. 2. Руйнування зсувного тіла від позамежових дотичних деформацій (а) та зони ковзання на початковій стадії зсуву (b), під час його розвитку (c) й на завершальній стадії (d): 1, 2 – верхній й нижній уступи, відповідно.

Fig. 2. The failure of the landslide body from shear strain (a) and shear zone at the initiation stage of the slide (b) during its development (c), and at the final stage (d): 1, 2 – lower and upper benches, respectively.

У результаті розвитку зсуву частина зон між точками різницевої сітки перейшла через границю міцності і знаходиться у стані активного зсуву (рис. 2a), що порушило статичну рівновагу моделі після встановлення геостатичного рівня напружень (рис. 3a, крива 2). Видно, як під час розвитку зсуву дисбаланс сил флукутував, що відображало динамічні локальні зрушення окремих фрагментів ґрунтового схилу. Приблизно до 13400-го циклу або через 794 доби після ініціації зсуву йшло накопичення пошкодженості й розгін зсувного процесу. Це видно,

якщо зіставити криві 2 (рис. 3a) і 1 (рис. 3b). На цей момент загальне незворотне переміщення уступу 1 (рис. 2c) досягло 12 м й почав зароджуватись уступ 2 (рис. 2d).

Після цього відбувся сплеск кінетичної енергії й подальше порушення дисбалансу сил (рис. 3a, крива 2). Дисбаланс сил почав згасати відповідно до того, як біля підніжжя зсуву утворилась пластична складка, торкнулась підніжжя, а потім почала спиратись на нього, передаючи частину своєї ваги. Паралельно цьому процесу почала зменшуватись швидкість зсуву (рис. 3b, c, крива 1). Усі вказані процеси добре узгоджуються між собою і наочно демонструють здатність моделі Кундала відтворювати реальну поведінку незворотного зрушення й деформування ґрунту.

### ВИСНОВКИ

Особливістю зрушень і деформацій ґрунтів та масивів гірських порід є їх незворотність і велика амплітуда, що перевищує пружні зрушення й деформації на кілька порядків. Для врахування цих особливостей необхідно зважати на час протікання незворотних процесів та інерційні сили, які виникають у момент порушення статичної рівноваги системи під час переходу її окремих ділянок у позамежовий напружено-деформований стан, коли ґрунтовий масив руйнується. Доведено, що відтворення вказаних особливостей досягається моделлю Кундала, яка базується на циклічному обчисленні у часі швидкостей деформування на основі другого закону Ньютона та напружень і деформацій на базі узагальненого закону Гука, асоційованого закону текучості й модифікованої моделі міцності Кулона–Мора. Кінетична ж енергія інерційних сил, які виникають під час порушення статичної рівноваги під час руйнування гірських порід, розсіюється завдяки введенню демпферних сил, які є пропорційними активним силам й швидкостям деформування. Вказаний алгоритм реалізується методом скінченних різниць на нерегулярній сітці Уілкінсона, що дало змогу моделювати великі незворотні деформації ґрунту й гірських порід.

Наведені алгоритм, методи й схема обчислень апробовані на прикладі моделювання повільного зсуву ґрунтового схилу. Достовірність результатів моделювання підтверджена зіставленням розрахункових й вимірних швидкостей незворотних зрушень ґрунту, їх величин, а також характеру розвитку й загасання зсувного процесу.

**РЕЗЮМЕ.** Проанализировано существующие алгоритмы, модели и схемы вычислений и доказано преимущество модели Кундала для исследования необратимых процессов сдвижения и деформирования грунтов и массивов горных пород, которая предусматривает циклическую во времени схему пересчета инкрементальных скоростей деформирования с помощью второго закона Ньютона и напряжений и деформаций на основе обобщенного закона Гука, а также модели прочности Кулона–Мора, модифицированной введени-

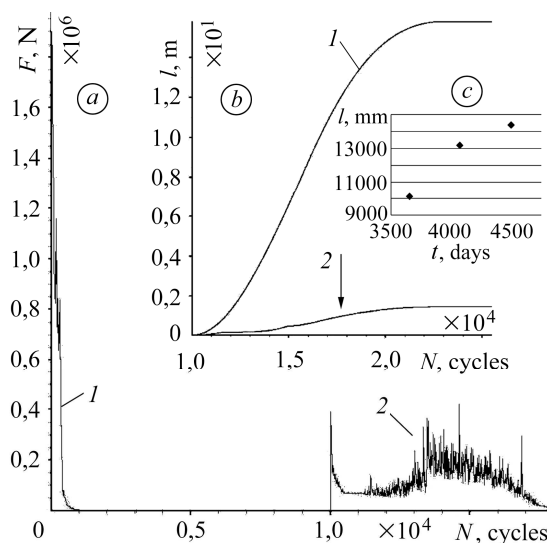


Рис. 3. Динаміка дисбалансу сил під час моделювання зсуву (a); зміщення нижнього (1) і верхнього (2) уступів у часі  $t$  (b, c).

Fig. 3. Dynamics of unbalance forces under landslide simulation (a); displacement of the lower (1) and the upper benches (2) in time  $t$  (b, c).

ем границы прочности на растяжение. Диссипация же кинетической энергии, возникающей под действием временного дисбаланса сил, реализуется путем введения демпфирующих сил, которые пропорциональны активным силам и скоростям деформирования. Новизна исследования заключается в сочетании указанных алгоритмов и моделей на основе конечно-разностной схемы вычислений, которая обеспечивает достоверный расчет больших необратимых деформаций горных пород, а также позволяет воссоздать реальную историю их сдвижений и деформаций за границей прочности. Практическая значимость исследований подтверждена сравнением результатов моделирования с данными геодезических наблюдений смещений грунтовых склонов.

*SUMMARY.* This paper aimed to select and analyze an algorithm and a model for investigation of irreversible movement and deformation of ground and rock mass. Methodological approach has been based on accounting the time of irreversible movement and stress and strain distribution in the rock mass. Loading path and history of non-reversible ground behavior was taken into consideration as well as inertial forces, which violate the static equilibrium. In addition, process of kinetic energy dissipation has been simulated using damping forces that are proportional to active forces and ground velocity. Finally, Cundall procedure has been selected to cyclically recalculate incremental strain rate using the second Newton's law and then the stress and strain using Hook law, plastic flow rule, and Coulomb–Mohr constitutive model that has been modified by tension failure criterion. Novelty of the results is that the mentioned above procedure and laws have been composed with the finite difference method that ensures reliable calculation of the large irreversible deformations of the rock mass and reconstructs the real history of their land slides and deformations beyond the boundary of its strength. Practical significance of the model has been proven by comparison of simulated and geodetically observed slopes displacements of the ground.

***Робота є частиною плану НДР III-2\_2017 НАН України (№0117U002193). Авторка висловлює подяку О. Б. Кусеню за допомогу під час геодезичних вимірювань.***

1. Logan D. L. A first course in the finite element method. – New York: Cengage Learning, 2013. – 808 p.
2. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., and Zhu J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (Sixth ed.). – New York: Butterworth-Heinemann, 2005. – 756 p.
3. Wrobel L. C. and Aliabadi M. H. The Boundary Element Method. – New York: John Wiley & Sons, 2002. – 1066 p.
4. Lubliner J. Plasticity Theory. – London: Courier Dover Publications, 2008. – 540 p.
5. Boffi D., Brezzi F., and Fortin M. Mixed finite element methods and applications. – Heidelberg: Springer, 2013. – 662 p.
6. Banz L. and Schröder A. Biorthogonal basis functions in hp-adaptive FEM for elliptic obstacle problems // Comput. Math. Appl. – 2015. – **70**. – P. 1721–1742.
7. Youn H. and Tonon H. Multi-stage triaxial test on brittle rock // Int. J. of Rock Mech. & Mining Sci. – 2016. – **47**. – P. 678–684.
8. Bukowska M. Post-critical mechanical properties of sedimentary rocks in the upper Silesian coal basin (Poland) // Arch. Min. Sci. – 2015. – **60**, № 2. – P. 517–534.
9. Zakharova L. Close interaction of rock fragments in underground roadway during irreversible movement of surrounding rock mass // Metallurgical and mining industry. – 2017. – № 6. – P. 39–42.
10. Cundall P. A. Explicit finite difference methods in geomechanics. Numerical methods in engineering // Proc. of the EF Conf. on Numerical Methods in Geomechanics. – Virginia: Blacksburg, 1976. – **Vol. 1**. – P. 132–150.
11. Hredil M. I., Toribio J., and Nykyforchyn H. M. Analysis of the plasticity characteristics of progressively drawn pearlitic steel wires // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 4. – С. 71–75.  
(Hredil M. I., Toribio J., Nykyforchyn H. M. Analysis of the plasticity characteristics of progressively drawn pearlitic steel wires // Materials Science. – 2015. – **51**, № 4. – P. 514–519.)
12. FLAC3D Fast Lagrangian Analysis of Continua in 3 Dimensions. – Itasca Consulting Group, 2015. – 214 p.

*Одержано 17.07.2017*