

ОЦІНЮВАННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ТА В'ЯЗКОПРУЖНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

В. В. ПАНАСЮК, В. П. СИЛОВАНЮК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Наведено огляд ефективних наближених методів розрахунку концентрації напружень біля надрізів, щілин, порожнин, які заповнені пружними та в'язкопружними матеріалами. Основну увагу приділено методу, що базується на використанні розв'язків відповідних задач для тіл з математичними розрізами вздовж серединних поверхонь концентраторів, суть якого – заміна включення певного об'єму деякою поверхнею з невідомими розривами напружень і (або) переміщень. Описана процедура побудови інтегральних рівнянь відповідних крайових задач для визначення цих розривів. На прикладі неоднорідностей, обмежених канонічними поверхнями, проілюстровано ефективність побудови наближених розв'язків таких задач.

Ключові слова: тріщина, включення, пружність, в'язкопружність, концентрація напружень.

Сучасний погляд на міцність конструкційних матеріалів ґрунтується на засадах механіки руйнування, де враховують дефекти структури матеріалів (тріщини, порожнини, надрізи, різного роду включення), які є концентраторами напружень і найчастіше саме в їх околі ініціюється руйнування. І хоч сучасні технічні засоби і числові методи дають можливість розрахувати напружено-деформований стан у тілах складної геометрії і структури, для інженерної практики цікаві аналітичні оцінки концентрації напружень біля неоднорідностей.

Для розв'язків задач про концентрацію напружень у точній поставі (навіть для дефектів канонічної форми) використовують складні громіздкі залежності, незручні для отримання кінцевих результатів [1, 2]. Ефективні оцінки концентрації напружень у тілах з надрізами, отворами, неоднорідностями структури одержують, застосовуючи відповідні розв'язки пружних задач для тіл з математичними розрізами [3–7].

Вершину контуру тонкої заокругленої порожнини (рис. 1) з деяким наближенням можна вважати параболічним циліндром. У малому її околі напружено-деформований стан такий, як біля вершини параболічного циліндра. Це дає підстави використати розв'язок задачі про параболічний виріз і компоненти тензора напружень в околі порожнини подати у вигляді залежностей [3–6]

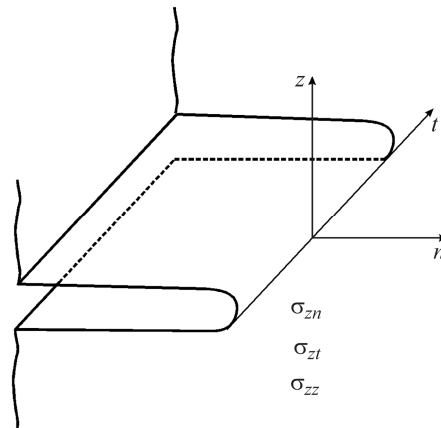


Рис. 1. Схематичне зображення тонкої порожнини.

Fig. 1. Schematic image of thin cavity.

$$\{\sigma_{zz}; \sigma_{zn}; \sigma_{zt}\} = \left\{ \frac{2K_I}{\sqrt{\pi\rho}} + \sigma_{zz}^0; \frac{2K_{II}}{3\sqrt{3\pi\rho}} + \sigma_{zt}^0; \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi\rho}} + \sigma_{zn}^0 \right\}, \quad (1)$$

де ρ – радіус кривини вершини порожнини; K_I, K_{II}, K_{III} – коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для еквівалентно завантаженого тіла з розрізом уздовж серединної поверхні порожнини; $\sigma_{zz}^0; \sigma_{zt}^0; \sigma_{zn}^0$ – компоненти тензора напружень у тілі без порожнини за дії прикладених навантажень. Таким чином, задачу про визначення концентрації напружень біля надрізу з радіусом заокруглення ρ звели до встановлення КІН для еквівалентно завантаженого тіла з тріщиною, що математично простіше. Проілюструємо ефективність такого підходу до класичних задач.

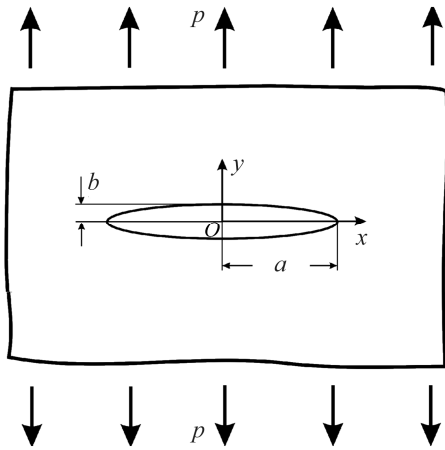


Рис. 2. Розтяг пластини з еліптичним отвором.

Fig. 2. The plate with elliptical hole under tension.

1. Нехай безмежна пластинка з еліптичним отвором $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) на нескінченності розтягується рівномірно розподіленими напруженнями інтенсивності $\sigma_y^\infty = p$ (рис. 2).

КІН для тріщини, що займає серединну область отвору ($y = 0, |x| \leq a$), $K_I = p\sqrt{\pi a}$ [4]. Радіус кривини у вершині еліптичного отвору $\rho = b^2/a$, напруження в пластині без отвору $\sigma_y^0 = p$. Тоді зі співвідношення (1), отримаємо

$$\sigma_y = p \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right), \quad (2)$$

що збігається із точним розв'язком цієї задачі [8].

2. Нехай контур об'ємної порожнини є еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ і безмежне тіло піддане розтягу на нескінченності з інтенсивністю $\sigma_{zz}^\infty = p$ (рис. 3). КІН K_I для еліптичного розрізу вздовж серединної поверхні еліпсоїда такий [9]:

$$K_I = \frac{\sqrt{\pi b} p (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/4}}{E(k) \sqrt{a}}, \quad (3)$$

де a, b – півосі еліпса; φ – кут, що визначає параметричні координати точки на еліпсі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 4); $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha, \quad k = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (4)$$

Концентрація напружень в околі еліпсоїдальної порожнини, встановлена зі співвідношень (1), (3), така:

$$\sigma_{zz} = \frac{[2\lambda + E(k)] p}{E(k)}, \quad (5)$$

де $\lambda = b/c$, c – найменша з півосей еліпсоїда.

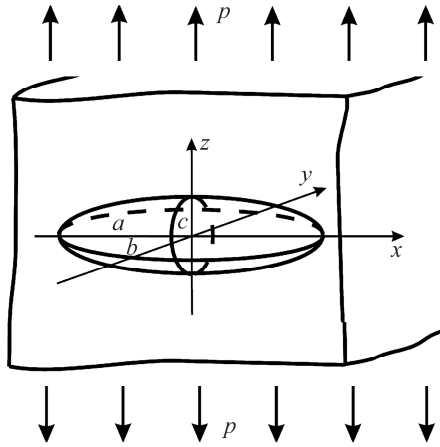


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Схема розтягу нескінченного пружного тіла з еліпсоїдальною порожниною.

Fig. 3. Tension of an infinite elastic body with ellipsoidal cavity.

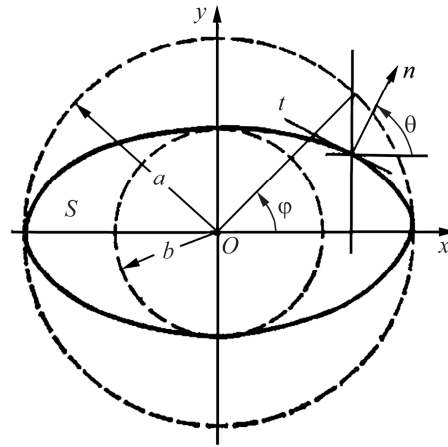


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Серединна область S еліпсоїдальної порожнини і системи координат.

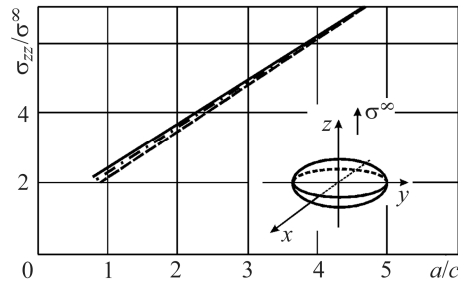
Fig. 4. The median area S of an elliptical cavity and related coordinate systems.

Порівнювали (рис. 5) напруження, розраховані за формулою (5) (суцільна лінія), і відомі з літератури [10, 11] (штрихова і штрих-пунктирна лінії). Як бачимо, навіть для сферичної порожнини розбіжності не перевищують 10%.

Для тонших порожнин результати практично збігаються. Це дає підстави вважати, що наближений підхід дає достатньо достовірні результати розрахунків концентрації напружень біля надрізів, отворів та порожнин різної форми.

Рис. 5. Концентрація напружень біля сфероїдальної порожнини за одновісного розтягу.

Fig. 5. Stress concentration near an ellipsoidal cavity under tension.



Концентрація напружень біля пружних включень. Розглянемо пружне тіло, що містить тонке пружне включення, обмежене достатньо гладкою сплющеною поверхнею V . До тіла прикладена самозрівноважена система зовнішніх навантажень. На поверхні можуть виконуватися як умови ідеального механічного, так і неідеального контакту (відшарування, проковзування тощо).

Загальний підхід до розв'язання цієї проблеми полягає ось у чому. Включення умовно вилучають із тіла і окремо розглядають задачі про рівновагу включення і тіла з порожниною, що утворилася на місці неоднорідності (рис. 6).

До поверхні порожнини V прикладені напруження σ_{3j}^{\pm} ($j = 1, 2, 3$), взагалі кажучи, невідомі. Знаки (+) і (-) відносяться до верхньої V^+ ($z > 0$) і нижньої V^- ($z < 0$) частин поверхні V . Індеси 1, 2, 3 відповідають осям координат x, y, z .

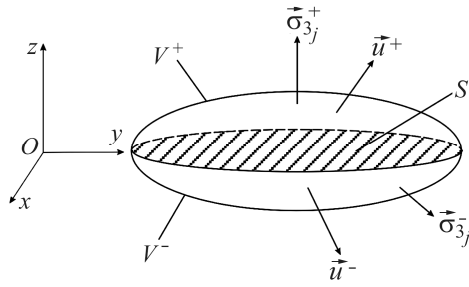


Рис. 6. Схематичне зображення включення.

Fig. 6. Schematic image of an inclusion.

σ_{3j}^{\pm} і т.д.

Припущення про малу товщину включення дає змогу знести величини σ_{3j}^{\pm} на середину поверхню S у площині $z = 0$. У результаті отримуємо крайову задачу теорії пружності для тіла з розрізом в області S , на якому діють напруження σ_{3j}^{\pm} . Як відомо, розріз у тілі є поверхнею розриву переміщень, тобто переміщення u_j за переходу через область S дістають стрибок $[u_j] = u_j^+ - u_j^-$. Формально вважаючи стрибки переміщень $[u_j]$ і напружень $[\sigma_{3j}]$ відомими, розв'яжемо крайову задачу теорії пружності. Тут ефективні розв'язки рівнянь рівноваги у формі Папковича–Нейбера (для тривимірних задач) або у формі комплексних потенціалів Колосова–Мусхелішвілі (для двовимірних) та метод інтегральних перетворень Фур'є. У результаті отримуємо залежності для обчислення напружень і переміщень у деформованому тілі через їх стрибки в області S [7, 12]:

$$u_j = u_j([u_j], [\sigma_{3j}]); \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}([u_j], [\sigma_{3j}]). \quad (6)$$

Таким чином, якщо стрибки $[u_j]$ і $[\sigma_{3j}]$ відомі, то задача про визначення напружено-деформованого стану тіла з неоднорідністю розв'язана. Загалом у тілі маємо шість невідомих стрибків переміщень і напружень, для обчислення яких необхідні додаткові умови – умови рівноваги включення, а також співвідношення, що пов'язують напруження і переміщення у ньому. Застосувавши до цих співвідношень операцію усереднення по товщині включення, отримуємо шість умов, що пов'язують переміщення і напруження на поверхні поділу матеріалів V :

$$F_m(u_j^{\pm}, \sigma_{3j}^{\pm}) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, 6. \quad (7)$$

Підставляючи в ці рівняння замість u_j^{\pm} , σ_{3j}^{\pm} їх вирази через стрибки $[u_j^{\pm}]$, $[\sigma_{3j}^{\pm}]$ згідно зі співвідношеннями (6), одержимо систему зі шести інтегро-диференціальних рівнянь відносно невідомих стрибків $[u_j^{\pm}]$, $[\sigma_{3j}^{\pm}]$ ($j = 1, 2, 3$):

$$G_m([u_j^{\pm}], [\sigma_{3j}^{\pm}]) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, 6.$$

Залежно від природи включень, умов контакту із основним матеріалом, типу зовнішнього навантаження кількість рівнянь може бути меншою і в окремих випадках звестись навіть до одного.

Зазначимо, що вперше ідею про заміну тонкого пружного включення умовами типу (7) висловив Я. С. Підстригач [13]. Розвинули її, побудували інтегральні

Напруження σ_{3j}^{\pm} відомі лише у деяких часткових випадках: для включення нульової жорсткості $\sigma_{3j}^{\pm} = 0$; для неідеального механічного контакту можуть бути відомі деякі з компонент векторів напружень. За умов гладкого контакту маємо: $\sigma_{31}^{\pm} = \sigma_{32}^{\pm} = 0$; за відшарування включення, наприклад, на частині поверхні V^+ ($V = V^+ + V^-$), стають відомі компоненти напружень

рівняння та отримали розв'язки задач для тіл з тонкими включеннями в монографіях [5, 7, 12, 14].

Як окремий випадок загальної схеми, наведеної вище, часто застосовують модель типу Вінклера, в межах якої одержують ефективні розв'язки задач про концентрацію напружень біля тонких пружних включень [5]. Умови взаємодії матриці і включення тут задають співвідношення

$$\bar{\sigma}_z^* \{ \sigma_{xz}^*, \sigma_{yz}^*, \sigma_{zz}^* \} = \bar{\sigma}_z^* \left\{ \frac{[u_x^*]}{2h} \mu_1, \frac{[u_y^*]}{2h} \mu_1, \frac{[u_z^*]}{2h} E_1 \right\}, \quad (8)$$

де μ_1, E_1 – модулі зсуву і Юнга матеріалу включення; u_x^*, u_y^*, u_z^* – компоненти вектора переміщень точок поверхні V ; $2h$ – товщина включення; квадратні дужки $[u]$ означають стрибок функції u під час переходу через область S .

Для визначення невідомих трьох компонент вектора переміщення берегів тріщини методами теорії потенціалу будують інтегральні рівняння [5]

$$\begin{aligned} \nabla_{xy}^2 \iint_S \frac{\bar{u}(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} + \nu \left(\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial y} - \bar{e}_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{u_y(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{u_x(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) = \frac{4\pi(1-\nu^2)}{E} \frac{[\bar{u}^0 + \bar{u}]}{2h} \mu_1 - \bar{\sigma}_z^0. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут $\bar{\sigma}_z^0, \bar{u}^0$ – вектори напружень і переміщень у тілі за відсутності тріщини; $\bar{u} = \bar{u}^* - \bar{u}^0$; E, ν – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона тіла.

З розв'язку системи рівнянь (9) КІН (K_I, K_{II}, K_{III}) можна знайти безпосередньо через компоненти вектора переміщень \bar{u} . Для цього достатньо скористатися тим, що за тривимірної задачі локальні зміщення в околі контуру тріщини мають таку ж функціональну структуру, як і за відповідної комбінації плоскої задачі і задачі про поздовжній зсув, тобто

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{\pi/(2n)} \mu u_z / (1-\nu), \\ K_{II} &= \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{\pi/(2n)} \mu u_n / (1-\nu), \\ K_{III} &= \lim_{n \rightarrow 0} \sqrt{\pi/(2n)} \mu u_t. \end{aligned} \quad (10)$$

КІН K_I, K_{II}, K_{III} характеризують інтенсивність напружень в околі концентратора напружень, що охоплює вістря включення [15]. У ближній зоні, розміщеній безпосередньо біля включення, концентрація напружень максимальна і залежить від радіуса кривини його контуру.

Для прикладу розглянемо еліпсоїдальне включення, що міститься в нескінченному тілі за одновісного розтягу на нескінченності (див. рис. 3). Задачу зведемо до розв'язування лише одного з рівнянь (9) відносно невідомих нормальних переміщень u_z поверхні тріщини S^+ [16]:

$$\nabla_{xy}^2 \iint_S \frac{u_z(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{4\pi(1-\nu^2)}{E} \frac{u_z(x, y)}{h(x, y)} = \frac{4\pi(1-\nu^2)}{E} p(\omega-1), \quad \omega = \frac{E_1}{E}. \quad (11)$$

Звідси

$$u_z(x, y) = \frac{2bp(1-v^2)(1-\omega)}{E(2\lambda\omega(1-v^2) + E(k))} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (12)$$

На основі співвідношень (1), (10), (12) отримаємо залежність для розрахунку напруження в околі еліпсоїдального включення:

$$\sigma_{zz} = \frac{[2\lambda(1-\omega v^2) + E(k)]p}{2\lambda\omega(1-v^2) + E(k)}. \quad (13)$$

Концентрація напружень в околі в'язкопружних включень. Напруження в околі включень, матеріал яких схильний до повзучості, за довготривалого навантаження змінюються з часом. Для їх розрахунку ефективною виявилась модель тонких в'язкопружних включень [17]. Змінні в часі напруження у включенні в межах моделі в'язкопружних тіл Вольтерра–Больцмана визначають співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}(x, y, z, t) &= \mu_1(1 + K_1^*) \frac{[u_x(x, y, z, t)]}{2h(x, y, z)}, \\ \sigma_{yz}(x, y, z, t) &= \mu_1(1 + K_1^*) \frac{[u_y(x, y, z, t)]}{2h(x, y, z)}, \\ \sigma_{zz}(x, y, z, t) &= E_1(1 + K^*) \frac{[u_z(x, y, z, t)]}{2h(x, y, z)}, \end{aligned} \quad (14)$$

де K_1^*, K^* – інтегральні оператори за часом

$$\begin{aligned} K_1^* f(t) &= \int_0^t K_1(t-\tau) f(\tau) d\tau, \\ K^* f(t) &= \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau; \end{aligned} \quad (15)$$

E_1, μ_1 – пружні модулі; $K_1(t-\tau), K(t-\tau)$ – ядра операторів, що описують релаксацію напружень у часі [18]. Вид цих ядер встановлюють на основі експериментальних результатів про повзучість матеріалу.

Для пружного тіла з еліпсоїдальним в'язкопружним включенням, що піддає довготривалому одновісному розтягу на нескінченності зусиллями інтенсивності $\sigma_{zz}^\infty = p$, задачу звели [17] до розв'язування інтегрального рівняння

$$\begin{aligned} \nabla_{xy}^2 \iint_s \frac{u_z(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} &= \frac{4\pi(1-v^2)}{E} \left\{ \frac{E_1}{h(x, y)} [u_z(x, y, t) + \right. \\ &\left. + \int_0^t K(t-\tau) \cdot u_z(x, y, \tau) d\tau] + \frac{E_1 p}{E} \int_0^t K(t-\tau) d\tau + \frac{E_1 p}{E} - p \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

у вигляді [17]

$$u_z(x, y, t) = \frac{f(t)pb}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (17)$$

де функція $f(t)$ задовольняє рівняння Вольтерра

$$\chi f(t) + \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau + q(t) = 0, \quad (18)$$

$$\chi = \frac{E(k) + 2(1-v^2) \omega \lambda_0}{2(1-v^2) \omega \lambda}, \quad \lambda = b/c, \quad \omega = E_1/E, \quad q(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t K(t-\tau) d\tau + \frac{(\omega-1)}{\omega \lambda}.$$

Для матеріалу включення, реологічні властивості якого відповідають тілу Кельвіна, ядро релаксації

$$K(t-\tau) = -\mu e^{-(\mu+\beta)(t-\tau)},$$

де μ, β – реологічні параметри матеріалу, які встановлюють із експериментів на повзучість.

Для такого тіла отримали аналітичний розв'язок рівняння (18):

$$f(t) = \frac{1}{\lambda E_1} \frac{(\mu+\beta)(E-E_1) - \mu E_1}{\chi(\mu+\beta) - \mu} - \frac{\mu}{\lambda E_1 \chi} \cdot \frac{E-E_1(\chi+1)}{\mu(\chi-1) + \chi\beta} \cdot e^{-\left(\mu+\beta-\frac{\mu}{\chi}\right)t}. \quad (19)$$

Для визначення концентрації нормальних напружень в околі еліпсоїдального в'язкопружного включення на основі співвідношень (1), (10), (17) маємо формулу

$$\sigma_{zz} = p(1 + \lambda f(t)). \quad (20)$$

Концентрація напружень в околі фізично нелінійного пружного включення. Матеріал тонких включень може зазнавати великих деформацій і вийти за межі дії закону Гука. Прикладом такої ситуації є тонке включення, що виникає в результаті “заліковування” тріщини за ін'єкційними технологіями [19]. У цьому випадку товщина ін'єкційного матеріалу може бути сумірна з розкриттям тріщини під навантаженням, що за умови $E_1 < E$ може викликати деформацію за межею лінійної пружності матеріалу включення, де зв'язок напружень і деформацій нелінійний.

Щоб встановити концентрацію напружень у тілі в околі тонкого включення, застосуємо нелінійну модель пружних включень [20–22]. Нехай у безмежному ізотропному пружному тілі міститься тонке включення у вигляді тривісного еліпсоїда з півосями a, b, c ($a, b \ll c$) (див. рис. 3). На нескінченності до тіла прикладені зовнішні зусилля розтягу інтенсивністю p , нормальні до площини $z = 0$ прямокутної системи координат x, y, z (див. рис. 3). Реакцію матеріалу включення на зовнішні зусилля розтягу характеризуватимемо умовами

$$\sigma_{zz}(x, y) = f(\varepsilon_{zz}) = f\left(\left[u_z^*(x, y)\right] h^{-1}(x, y)\right),$$

$$\sigma_{xz}(x, y) = \sigma_{yz}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1. \quad (21)$$

Тут $f(\varepsilon_{zz})$ – деяка неперервна функція, що описує зв'язок нормальних напружень σ_{zz} з поздовжньою деформацією ε_{zz} (вид цієї функції встановлюють за діаграмою розтягу матеріалу включення); u_z^* – переміщення точок поверхні поділу матеріалів ($u_z^* = u_z + u_z^0$). Крайову задачу (21) зводимо до розв'язування нелінійного інтегрального рівняння [20]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \iint_S \frac{u_z d\zeta d\eta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{4\pi(1-\nu^2)}{E} f\left(\frac{[u_z + u_z^0]}{h(x,y)}\right) = -\frac{4\pi(1-\nu^2)}{E} p, \quad (22)$$

розв'язок якого шукаємо у вигляді

$$u_z(x,y) = Ac \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (23)$$

Тут невідому константу A знаходимо із розв'язку трансцендентного рівняння

$$AE(k) + \frac{2(1-\nu^2)}{E} \lambda \left(f\left(A + \frac{p}{E}\right) - 1 \right) = 0. \quad (24)$$

Зі співвідношень (1), (10), враховуючи (23), (24), отримаємо залежність для розрахунку концентрації напружень в околі тонкого включення, матеріал якого деформований за межі лінійної пружності:

$$\sigma_{zz} = \frac{c A E (2\lambda(1-\omega\nu^2) + E(k))}{2\lambda(1-\nu^2)(1-\omega)}. \quad (25)$$

РЕЗЮМЕ. Приведен обзор эффективных приближенных методов расчета концентрации напряжений около надрезов, щелей, полостей, заполненных упругими и вязкоупругими материалами. Основное внимание уделено методу, основанному на использовании решений соответствующих задач для тел с математическими разрезами вдоль срединных поверхностей концентраторов, суть которого – замена включения определенного объема некоторой поверхностью с неизвестными разрывами напряжений и (или) перемещений. Описана процедура построения интегральных уравнений соответствующих краевых задач для определения этих разрывов. На примере неоднородностей, ограниченных каноническими поверхностями, проиллюстрирована эффективность построения приближенных решений таких задач.

SUMMARY. The review of the methods for stress concentration estimation near thin elastic or viscoelastic inclusions is presented in the work. The methods are based on relationships that interrelate stresses near thin smooth notches, holes, or cavities with stress intensity factors in identically loaded bodies with cracks. In the case of elastic inclusions, the stress concentration problem (using the conjugation principle) is reduced to determining the unknown displacements and/or stresses discontinuity across the middle surface of inhomogeneities. The problem solution for stress concentration in a body with ellipsoidal inclusion under uniaxial tension is presented as an example. In the case of viscoelastic inclusions in a body under long-term static loading, the problem is solved using the Volterra–Boltzmann principle and the same analytical approach as for elastic inclusions. The exact solution of respective integral equations is derived for the ellipsoidal inclusion with the Kelvin solid type rheological characteristics under uniaxial tension. Time dependence of stresses near the viscoelastic inclusion is presented in the form of quite simple analytical expression.

1. Подільчук Ю. М. Про напружений стан необмеженого середовища з пружним еліпсоїдальним включенням // Прикл. механіка. – 1968. – 4, № 5. – С. 28–37.
2. Eshelby J. D. Elastic inclusions and inhomogeneities // Progr. Solid Mech. – 1961. – 2. – P. 89–140.
3. Paris P. C. and Sih G. C. Stress analysis of cracks // Fract. toughness testing and its appl. Philadelphia (Pa.). – 1965. – P. 30–81. (ASTM Spec. Techn. Publ.; № 381).
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
5. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силований В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
6. Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. Т. 2: Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.

7. Стадник М. М. Термопружний стан та міцність тіл з тонкими включеннями довільної жорсткості. – Львів: Нац. лісотехн. ун-т України, 2015. – 316 с.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
9. Sih G. C. Handbook of stress-intensity factors. – Bethlehem: Lehigh University press., 1973. – 416 p.
10. Нейбер Г. Концентрация напряжений. – М.: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
11. Warren M. R. and Andersen S. I. A simple approximation for the stress concentration factor at the equator of an oblate spheroidal cavity // Int. J. Fract. – 1973. – **9**, № 2. – P. 225–227.
12. Силованюк В. П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2000. – 300 с.
13. Підстригач Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1963. – № 7. – С. 872–874.
14. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
15. Бережницький Л. Т., Качур П. С., Мазурак Л. П. До теорії концентраторів напружень із заокругленими вершинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1989. – **25**, № 5. – С. 28–41.
(Berezhnitskii L. T., Kachur P. S., Mazurak L. P. The theory of stress concentrations with round vertices // Materials Science. – 1989. – **25**, № 5. – P. 465–476.)
16. Панасюк В. В., Андрейків О. С., Стадник М. М. Пружна рівновага безмежного тіла з тонким включенням // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 7. – С. 637–640.
17. Силованюк В. П., Ревенко А. В. Вплив повзучості матеріалу включення на концентрацію напружень у тілі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 4. – С. 76–80.
(Sylovanyuk V. P., Revenko A. V. Influence of creep of the material of inclusions on the stress concentration in the body // Materials Science. – 2009. – **45**, № 4. – P. 555–561.)
18. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука. 1966. – 752 с.
19. Panasyuk V. V., Marukha V. I., and Sylovanyuk V. P. Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. – Springer, 2014. – 230 p.
20. Силованюк В. П., Галазюк О. В. Розрахункова модель тіла із тріщиною, “залікованою” в результаті ін’єктування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 2. – С. 88–92.
(Sylovanyuk V. P., Halazyuk O. V. Numerical of the body containing a crack “healed” by injection // Materials Science. – 2011. – **47**, № 2. – P. 211–216.)
21. Вплив форми графітових включень на механічні властивості залізвуглецевих сплавів / І. П. Акімов, В. П. Силованюк, І. В. Волчок, Н. А. Івантишин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – № 5. – С. 61–66.
(Akimov I. V., Sylovanyuk V. P., Volchok I. P., Ivantyshyn N. A. Influence of the shape of graphite inclusions on the mechanical properties of iron-carbon alloys // Materials Science. – 2013. – **48**, № 5. – P. 620–627.)
22. Силованюк В. П., Івантишин Н. А. Концентрація напружень біля нелінійно деформованих тонких включень // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – № 4. – С. 35–38.
(Sylovanyuk V. P., Ivantyshyn N. A. Stress concentration near nonlinearly deformed thin inclusions // Materials Science. – 2008. – **44**, № 4. – P. 500–505.)

Одержано 16.08.2017