

УДК 539.3

## ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА БЛИЗЬКО РОЗТАШОВАНИХ ОТВОРІВ У ПРУЖНІЙ ПЛОЩИНІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

*М. П. САВРУК, О. І. КВАСНЮК, А. Б. ЧОРНЕНЬКИЙ*

*Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів*

Побудовано сингулярне інтегральне рівняння антипласкої періодичної задачі теорії пружності для ізотропної площини, послабленої гладкими криволінійними отворами. Отримано числовий розв'язок задачі для близько розташованих отворів із закругленими кутовими вершинами за однорідного зсуву на нескінченності. На цій основі знайдено коефіцієнти концентрації напружень у закруглених вершинах двобічного напівнескінченного кутового вирізу. Використовуючи відоме співвідношення між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих та закруглених кутових вирізів, зробили граничний перехід до двобічного гострого кутового вирізу. Встановлено залежність коефіцієнта інтенсивності напружень у гострих вершинах двобічного кутового вирізу від кута його розхилу.

**Ключові слова:** *антипласка задача теорії пружності, періодична система криволінійних отворів, двобічний кутовий виріз, коефіцієнти інтенсивності напружень, метод сингулярних інтегральних рівнянь.*

У механіці руйнування останнім часом значну увагу приділяють вивченню деформування та руйнування твердих тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами [1–5]. Розроблено єдиний підхід до розв'язування двовимірних задач теорії пружності для тіл з кутовими вирізами ([1, 2, 5–10] – I та II типи деформування, [11, 12] – III тип деформування), коли коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершині гострого вирізу знаходять на основі даних про концентрацію напружень у вершинах відповідних закруглених кутових вирізів (не дуже малого радіуса кривини), які можна отримати різними методами. Побудовано співвідношення між КІН у гострій вершині напівнескінченного кутового вирізу та максимальними напруженнями на контурі відповідного закругленого кутового вирізу. Такі співвідношення для обмежених тіл мають асимптотичний характер, коли радіус закруглення вершини вирізу прямує до нуля, що дає змогу використати їх для знаходження КІН у вершинах гострих вирізів на основі даних про концентрацію напружень біля закруглених вирізів у пружних тілах довільної форми.

Нижче методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано числовий розв'язок антипласкої задачі для періодичної системи близько розташованих криволінійних отворів із закругленими кутовими вершинами. На цій основі знайдено коефіцієнти концентрації напружень у вершинах двобічного кутового вирізу. Використовуючи відомі співвідношення між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострого та закругленого кутових вирізів [11, 12], за допомогою граничного переходу, коли радіус закруглення вирізу прямує до нуля, побудували залежність КІН у вершині двобічного гострого кутового вирізу від кута його розхилу за антипласкої деформації.

**Основні співвідношення антипласкої теорії пружності [2, 5, 13].** Розглянемо напружений стан у циліндричному тілі, викликаний навантаженням, напрям-

леним за твірними циліндра і сталим вздовж них. Якщо вісь деформації напрямлена вздовж осі  $Oz$  декартової системи координат  $(x, y, z)$ , із закону Гука випливає, що ненульові компоненти тензора напружень  $\tau_{xz}$  і  $\tau_{yz}$  є функціями двох змінних  $x$  і  $y$ , які можна виразити через переміщення  $w(x, y)$ :

$$\tau_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1)$$

де  $G$  – модуль зсуву.

Функція  $Gw(x, y)$  задовольняє рівняння Лапласа і її можна подати у вигляді дійсної частини деякої аналітичної функції  $f(z)$  комплексної змінної  $z = x + iy$ :

$$Gw(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad (2)$$

яка зв'язана з компонентами напружень співвідношенням

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = f'(z) = F(z). \quad (3)$$

Розв'язування антиплоскої задачі теорії пружності зводять до визначення аналітичної функції  $f(z)$  або  $F(z)$  в області  $S$ , зайнятій пружним тілом, за заданим граничним значенням цих функцій на контурі  $L$  (межі тіла). Для першої основної задачі, коли на контурі задані зовнішні навантаження, крайова умова має вигляд

$$\tau_{nz} = G \frac{\partial w}{\partial n} = \operatorname{Im} \left[ F(t) \frac{dt}{ds} \right] = \tau(t), \quad t \in L, \quad (4)$$

де  $\tau(t)$  – задане напруження  $\tau_{nz}$  на межі тіла  $L$  із зовнішньою нормаллю  $n$ ;  $s$  – дугова абсциса точки  $t$ .

Нехай у нескінченному тілі є криволінійний тунельний розріз  $L$ , береги якого завантажені самозрівноваженими зусиллями

$$\tau_{nz}^+ = \tau_{nz}^- = \tau(t), \quad t \in L, \quad (5)$$

а напруження на нескінченності відсутні. Тут верхні індекси “+” і “-” позначають граничні значення функцій на контурі  $L$ , коли  $z \rightarrow t$  зліва (+) або справа (-) щодо вибраного додатного напрямку.

Комплексний потенціал напружень для розрізу візьмемо у вигляді

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\gamma'(t) dt}{t - z}, \quad (6)$$

де  $\gamma'(t)$  – похідна стрибка переміщень на контурі  $L$ :

$$G(w^+ - w^-) = 2\gamma(t). \quad (7)$$

Задовольнивши крайову умову (5) за допомогою інтегрального подання (6), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_L K(t, t') \gamma'(t) dt = \tau(t'), \quad t' \in L, \quad (8)$$

де

$$K(t, t') = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{t - t'} \frac{dt'}{ds'} \right]. \quad (9)$$

Інтегральне рівняння (8) у класі функцій з інтегровною особливістю на кінцях контуру інтегрування має єдиний розв'язок за виконання додаткової умови

$$\int_L \gamma'(t) dt = 0, \quad (10)$$

що забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини.

Якщо пружна площина послаблена періодичною системою криволінійних тріщин, розміщених вздовж осі  $Ox$  з періодом  $d$ , і на берегах тріщин задане одне і теж навантаження (5), то інтегральне подання комплексного потенціалу матиме вигляд

$$F(z) = \frac{1}{id} \int_L \gamma'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (t-z) dt, \quad (11)$$

де  $L$  – контур тріщини в основній смузі періодів. При цьому приходимо до інтегрального рівняння (9) з ядром

$$K(t, t') = \frac{\pi}{d} \operatorname{Re} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (t-t') \frac{dt'}{ds'} \right]. \quad (12)$$

Тут для існування єдиного розв'язку сингулярного інтегрального рівняння (8) також необхідна додаткова умова (10).

**Періодична система криволінійних отворів.** Розглянемо пружне тіло з періодичним рядом однакових криволінійних отворів, рівномірно розміщених вздовж осі  $Ox$  з періодом  $d$ . Межовий контур отвору в основній смузі періодів позначимо через  $L$ . За додатний вважатимемо напрям обходу контуру, коли пружна область  $S$  залишається зліва (рис. 1).

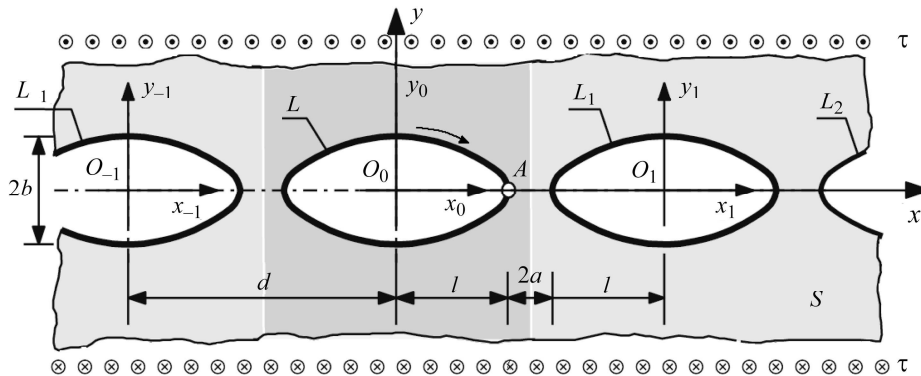


Рис. 1. Періодична система криволінійних отворів у пружній площині.

Fig. 1. Periodic system of curvilinear holes in elastic plane.

Вважаючи, що на контурах отворів задане однакоє навантаження (4), головний вектор якого

$$\int_L \tau_{nz}(t) ds = 0, \quad (13)$$

а напруження на нескінченності відсутні, з допомогою комплексного потенціалу (11) прийдемо до інтегрального рівняння (8) з ядром (12), де  $L$  – гладкий замкнений контур. Інтегральне рівняння для багатозв'язної області тут побудовано за допомогою переходу від розіркнених розрізів у нескінченній пружній площині до замкнених. Отримане так сингулярне інтегральне рівняння першого роду на замкненому контурі (межі тіла) доповнимо регуляризувальним доданком, який забезпечує єдиний розв'язок інтегрального рівняння за довільної правої частини [2, 5, 13]:

$$\frac{1}{d} \int_L \operatorname{Re} \left[ \operatorname{ctg} \frac{\pi}{d} (t-t') \frac{dt'}{ds'} \right] \gamma'(t) dt + \frac{1}{\pi l} \int_L \gamma'(t) dt = \tau(t'), \quad t' \in L, \quad (14)$$

де  $l$  – довільний параметр розмірності довжини. Тут регуляризувальний доданок у лівій частині рівняння рівний нулю за виконання умови (13), що забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру отвору.

Знайшовши функцію  $\gamma'(t)$  з інтегрального рівняння (14), матимемо комплексний потенціал напружень (11), за яким можемо встановити напруження у всьому тілі, зокрема і на контурі отвору [2, 5, 13]:

$$\tau_{sz} = \operatorname{Re} \left[ F^+(t) dt/ds \right], \quad t \in L. \quad (15)$$

Розглянемо докладніше задачу, коли на нескінченності задані зсувні напруження  $\tau_{yz}^\infty = \tau$ , а контури отворів вільні від зовнішніх навантажень:

$$\tau_{nz}^*(t) = 0, \quad t \in L. \quad (16)$$

Комплексний потенціал напружень шукатимемо у вигляді

$$F_*(z) = F_0(z) + F(z), \quad (17)$$

де потенціал  $F_0(z) = -i\tau$  описує основний напружений стан у суцільній площині без отворів, а функція  $F(z)$  визначає збурений стан, викликаний отворами.

Крайова умова для збурених напружень має вигляд

$$\tau_{nz}(t) = \tau(t) = -\operatorname{Im} \left[ F_0(t) \frac{dt}{ds} \right] = \tau \operatorname{Re} \left[ \frac{dt}{ds} \right], \quad t \in L. \quad (18)$$

Тоді напруження на контурі отвору можемо знайти безпосередньо через розв'язок інтегрального рівняння (14). Для цього скористаємося формулою Сохоцького–Племеля [14] для інтеграла (11)

$$F_*^+(t') - F_*^-(t') = F^+(t') - F^-(t') = 2\gamma'(t'). \quad (19)$$

Оскільки область всередині контуру  $L$  ненавантажена, то граничне значення потенціалу  $F_*^-(t) = 0$ . Враховуючи співвідношення (15) і (19), тепер матимемо:

$$\tau_{sz}^* = \operatorname{Re} \left[ F_*^+(t) \frac{dt}{ds} \right] = 2\gamma'(t) \frac{dt}{ds}, \quad t \in L. \quad (20)$$

Для отримання числового розв'язку рівняння (14) квадратурним методом [13], задамо контур  $L$  параметричним рівнянням  $t = l\omega(\xi)$ ,  $0 \leq \xi < 2\pi$ . Використовуючи квадратурні формули [2, 13] за парної кількості вузлів  $2N$ , дістанемо систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} & \frac{\pi l}{Nd} \operatorname{Re} \left[ \frac{\omega'(\eta_m)}{|\omega'(\eta_m)|} \sum_{k=1}^{2N} \gamma'(\xi_k) \operatorname{ctg} \frac{\pi l}{d} (\omega(\xi_k) - \omega(\eta_m)) \right] + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{2N} \gamma'(\xi_k) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\omega'(\eta_m)}{|\omega'(\eta_m)|} \right], \quad m = 1, \dots, 2N, \end{aligned} \quad (21)$$

де  $\xi_k = \pi(2k-1)/(2N)$ ,  $\eta_m = \pi(m-1)/N$  і  $\gamma'(\xi_k) = \omega'(\xi_k) \gamma'(l\omega(\xi_k)) / \tau$ .

Отримавши величини  $\gamma'(\xi_k)$  із системи (21), знаходимо напруження  $\tau_{sz}^*(t)$  на контурі  $L$

$$\tau_{sz}^*(\xi_k) = \tau_{sz}^*(l\omega(\xi_k)) = \frac{2\tau'(\xi_k)}{|\omega'(\xi_k)|}. \quad (22)$$

Зауважимо, що формулу (22) раніше [2, 5, 12] наводили з деякими описками.

**Числові результати.** Розглянемо періодичну систему еліптичних та овальних отворів. Для еліптичного отвору параметричне рівняння контуру  $L$  візьмемо у вигляді

$$t = l\omega(\xi) = l(\cos \xi - i\sqrt{\varepsilon} \sin \xi), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi, \quad (23)$$

де  $\varepsilon = \rho/l$  – відносний радіус кривини у вершині еліпса;  $l$  – велика піввісь еліпса.

Гладкий контур  $L$  овального отвору складається з двох симетричних дуг кола радіуса  $R$ , кінці яких гладко з'єднанні між собою дугами кола радіуса  $\rho$ . Коли  $\rho = 0$ , дуги кола радіуса  $R$  перетинаються під кутом  $2\beta$ . Вершини утвореного так двокутного отвору закруглені дугами радіуса  $\rho$ . Параметричне рівняння частини контуру овального отвору  $L$  у четвертій чверті декартової системи координат має вигляд

$$t = l\omega_0(\xi) = l \begin{cases} (1-\varepsilon) + \varepsilon(\cos(c\xi/\varepsilon) - i \sin(c\xi/\varepsilon)), & 0 \leq \xi < \xi_B, \\ \varepsilon_R \cos[(c(\xi - \xi_B) + \varepsilon_R \theta_B)/\varepsilon_R] + \\ + i\varepsilon_R [\cos \beta - \sin[(c(\xi - \xi_B) + \varepsilon_R \theta_B)/\varepsilon_R]], & \xi_B \leq \xi \leq \pi/2, \end{cases} \quad (24)$$

де

$$c = 2\varepsilon\theta_B/\pi + \varepsilon_R(1 - 2\theta_B/\pi); \quad \varepsilon_R = \left[ \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + (1 - 2\varepsilon)\sin^2 \beta} \right] / \sin^2 \beta;$$

$$\theta_B = \arctg[\varepsilon_R \cos \beta / (1 - \varepsilon)]; \quad \xi_B = \varepsilon\theta_B/c; \quad \varepsilon = \rho/l, \quad \varepsilon_R = R/l.$$

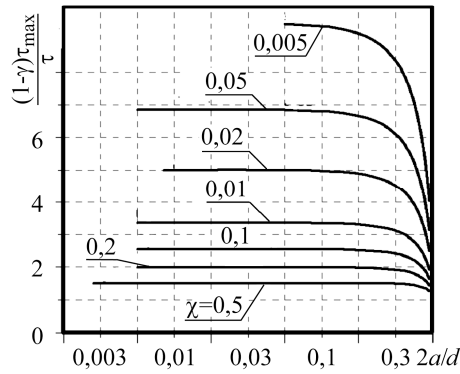


Рис. 2. Залежність функції  $(1-\gamma)\tau_{\max}/\tau$  у вершині  $A$  еліптичного отвору від відношення  $2a/d$  для різних значень параметра  $\gamma = \rho/a$ .

Fig. 2. Dependence of function  $(1-\gamma)\tau_{\max}/\tau$  at the tip  $A$  of elliptic hole on relation  $2a/d$  for various values of parameter  $\gamma = \rho/a$ .

Цього рівняння достатньо для повного опису контуру  $L$ , оскільки він симетричний відносно осей координат.

Обчислення максимальних напружень  $\tau_{\max} = \tau_{sz}^*(0)$  на контурі еліптичного отвору для малих відношень  $2a/d$  показали, що функції  $(1-\gamma)\tau_{\max}/\tau$  прямують до певних граничних значень, коли параметр  $\gamma = 2l/d \rightarrow 1$  (рис. 2). Подібні залежності отримали також для періодичної системи овальних отворів. Це дає змогу зробити граничний перехід до двобічних напівнескінчених параболічного та кутового вирізів у пружній площині, вважаючи, що добуток  $\tau d = T$  стала величина, коли відношення  $2a/d \rightarrow 0$ .

Отримані так коефіцієнти концентрації напружень (ККН)  $k_t = \tau_{\max}/\tau$  у вершинах двобічних параболічного та U-подібного вирізів у циліндричному тілі,

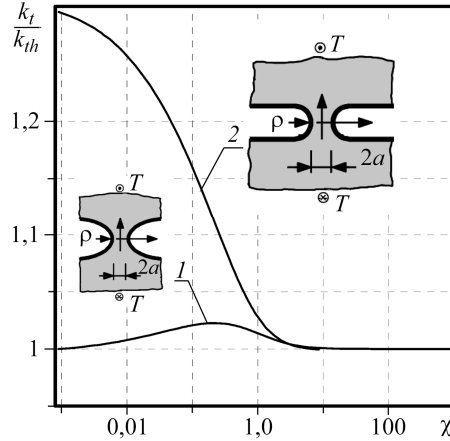
що деформується на нескінченності зсувними напруженнями з головним вектором  $T$ , порівняно (рис. 3) з точним аналітичним розв'язком [15]

$$k_{th} = 1/(\sqrt{\chi} \arctg(1/\sqrt{\chi})),$$

побудованим для двобічного гіперболічного вирізу. Аналіз цих результатів свідчить, що для малих значень параметра  $\chi = \rho/a$  форма околу вершини вирізу за антиплоскої деформації значно більше впливає на концентрацію напружень, ніж за I типу деформування [2, 5]. Тут максимальне відхилення між ККН для U-подібного, параболічного та гіперболічних вирізів з вершинами однакового радіуса закруглення досягає майже 30% (рис. 3), тоді як за I типу менше 6%.

Рис. 3. Залежність відношення ККН для двобічних параболічного (1) та U-подібного (2) вирізів до ККН  $k_{th}$  для гіперболічного вирізу від параметра  $\chi$ .

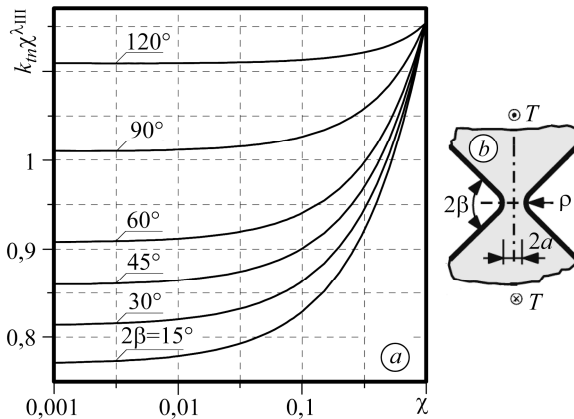
Fig. 3. Dependence of stress concentration factor for bilateral parabolic (1) or U-shaped (2) notches normalized by corresponding stress concentration values  $k_{th}$  for hyperbolic notch on parameter  $\chi$ .



Аналогічно з числового розв'язку задачі для періодичної системи близько розташованих овальних отворів отримано ККН  $k_m(\chi) = \tau_{\max}/(T/(2a))$  для двобічного кутового вирізу із закругленими вершинами у пружній площині за зсуву на нескінченності зусиллями, головний вектор яких дорівнює  $T$  (рис. 4). Коли параметр  $\chi$  прямує до нуля, добуток  $k_m\chi^{\lambda_{III}}$  ( $\lambda_{III}$  – показник особливості напружень у вершині гострого кутового вирізу) наближається до певних асимптотичних значень, що відповідають двобічному гострому кутовому вирізу.

Рис. 4. Залежність функції  $k_m\chi^{\lambda_{III}}$  від параметра  $\chi$  для різних кутів розхилу  $2\beta$  (a) двобічного кутового закругленого вирізу у пружній площині (b).

Fig. 4. Dependence of function  $k_m\chi^{\lambda_{III}}$  on parameter  $\chi$  for various apex angles  $2\beta$  (a) of bilateral rounded V-notch in elastic plane (b).



Використовуючи залежність між ККН у вершині закругленого кутового вирізу та КІН  $K_{III}^V$  у вершині відповідного гострого вирізу [2, 5]

$$K_{III}^V = \frac{\sqrt{2\pi}}{R_{III}} \lim_{\rho \rightarrow 0} \tau_{\max} \rho^{\lambda_{III}} = F_{III}^V \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{T}{a^{1-\lambda_{III}}}, \quad (25)$$

де

$$F_{III}^V = \pi / (\sqrt{2} R_{III}) \lim_{\chi \rightarrow 0} k_m \chi^{\lambda_{III}}; \quad \gamma = \pi/2 - \beta, \quad \lambda_{III} = 1 - \pi / (2\pi - 2\beta);$$

$$R_{III} = (1 + 17,845\gamma + 20,266\gamma^2 - 19,123\gamma^3 + 9,502\gamma^4 - 1,916\gamma^5) / (1 + 14,248\gamma),$$

побудували залежність відносного КІН  $F_{III}^V = K_{III}^V \sqrt{\pi a}^{1-\lambda_{III}} / T$  від кута розхилу  $2\beta$  двобічного кутового вирізу в циліндричному тілі, навантаженому на нескінченності зсувними силами  $T$  (рис. 5).

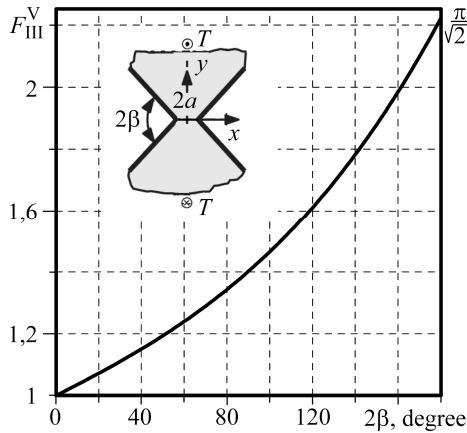


Рис. 5. Залежність відносного КІН  $F_{III}^V = K_{III}^V \sqrt{\pi a}^{1-\lambda_{III}} / T$  для двобічного кутового вирізу від кута розхилу  $2\beta$ .

Fig. 5. Dependence of relative stress intensity factor  $F_{III}^V = K_{III}^V \sqrt{\pi a}^{1-\lambda_{III}} / T$  for bilateral V-shaped notch on apex vertex angle  $2\beta$ .

Для залежності відносного КІН від кута  $\beta$  побудували апроксимувальну формулу

$$F_{III}^V = 1 + 0,402\beta + 0,041\beta^2 + 0,126\beta^3,$$

де відносна похибка не перевищує 0,74% в інтервалі  $\beta \in [0, \pi/2]$ .

Отримані вище залежності для ККН та КІН для зовнішніх двобічних закруглених та гострих вирізів можна використовувати під час асимптотичного оцінювання відповідних параметрів для глибоких двобічних вирізів в обмежених тілах.

### ВИСНОВКИ

Побудовано інтегральне рівняння антиплоскої періодичної задачі теорії пружності для ізотропної площини з криволінійними отворами. Отримано числовий розв'язок задачі для близько розташованих еліптичних та овальних отворів. На цій основі знайдено ККН для двобічних напівнескінчених параболічних, U-подібних та кутових закруглених отворів у пружній площині. За допомогою граничного переходу, коли радіус закруглення вирізу прямує до нуля, розраховано КІН для двобічного гострого кутового вирізу за різних кутів розхилу.

**РЕЗЮМЕ.** Построено сингулярное интегральное уравнение антиплоской периодической задачи теории упругости для изотропной плоскости, ослабленной гладкими криволинейными отверстиями. Получено численное решение задачи для близко расположенных отверстий с закругленными угловыми вершинами при однородном сдвиге на бесконечности. На этой основе найдены коэффициенты концентрации напряжений в закругленных вершинах двухстороннего полубесконечного углового выреза. Используя известные соотношения между коэффициентами интенсивности и концентрации напряжений для острых и закругленных угловых вырезов, сделан граничный переход к двухстороннему острому угловому вырезу. Установлена зависимость коэффициента интенсивности напряжений в острых вершинах двухстороннего углового выреза от угла его раскрытия.

**SUMMARY.** Singular integral equation of antiplane periodic problem of elasticity theory for isotropic plane with smooth curvilinear holes is constructed. Numerical solution of the problem for closely spaced holes with rounded V-shaped vertices in elastic plane under uniform shear at infinity is obtained. Stress concentration factors at rounded V-shaped vertices of bilateral

semi-infinite notch are found on this basic. Using known relations between stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded V-shaped notches, the limit transition to bilateral sharp V-shaped notch is made. Dependence of stress intensity factor at sharp vertices of the bilateral V-notch on its apex angle is determined.

1. *Kazberuk A.* Dwuwymiarowe zagadnienia mechaniki pękania ciał z korbami. – Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, 2010. – 242 s.
2. *Саврук М. П., Казберук А.* Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. пос. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – **14**. – 384 с.
3. *Berto F. and Lazzarin P.* Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // *Mater. Sci. Eng. R.* – 2014. – **75**. – P. 1–48.
4. *Radaj D.* State-of-the-art review on extended stress intensity factor concepts // *Fat. Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2014. – **37**, № 1. – P. 1–28.
5. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
6. *Саврук М. П., Казберук А.* Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих і закруглених кутових вирізів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2006. – **42**, № 6. – С. 17–26.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches // *Materials Science.* – 2006. – **42**, № 6. – P. 725–738.)
7. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Two-dimensional fracture mechanics problems for solids with sharp and rounded V-notches // *Int. J. Fract.* – 2010. – **161**, № 1. – P. 79–95.
8. *Саврук М. П., Казберук А.* Розподіл напружень біля кутових вирізів за складного напруженого стану // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – **47**, № 4. – С. 52–61.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Distribution of stresses near V-shaped notches in the complex stressed state // *Materials Science.* – 2012. – **47**, № 4. – P. 476–487.)
9. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stress concentration near sharp and rounded V-notches in orthotropic and quasi-orthotropic bodies // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2016. – **84**. – P. 166–176.
10. *Kazberuk A., Savruk M. P., and Chornenkyi A. B.* Stress distribution at sharp and rounded V-notches in quasi-orthotropic plane // *Int. J. Solids Struct.* – 2016. – **85**. – P. 134–143.
11. *Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г.* Розподіл напружень на контурі кутового закругленого вирізу за антиплоскої деформації // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – **47**, № 6. – С. 7–14.  
(*Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasiuk G.* Distribution of stresses over the contour of a rounded V-shaped notch under antiplane deformation // *Materials Science.* – 2012. – **47**, № 6. – P. 7–14.)
12. *Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г.* Концентрація напружень біля отворів у пружній площині за антиплоскої деформації // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2012. – **48**, № 4. – С. 5–13.  
(*Savruk M. P., Kazberuk A. and Tarasiuk G.* Stress concentration near holes in the elastic plane subjected to antiplane deformation // *Materials Science.* – 2013. – **48**, № 4. – P. 415–426.)
13. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
14. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
15. *Neuber H.* Kerbspannungslehre: Theorie der spannungskonzentration; genaue Berechnung der Festigkeit. – Berlin: Springer, 1985. – 326 s.

Одержано 16.08.2017